Mécanique – chapitre 7

Mouvement à force centrale conservative

Sommaire

Capacités exigibles

- ☐ Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.
- ☐ Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.
- ☐ Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.
- ☐ Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique et les conséquences de cette conservation : mouvement plan, loi des aires.
- ☐ Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement.
- ☐ Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.
- ☐ Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective.
- ☐ Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.
- ☐ Établir quand le mouvement est uniforme et déterminer sa période.
- ☐ Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
- ☐ Exprimer l'énergie mécanique pour les mouvements circulaire et elliptique (en fonction du demi-grand axe).
- ☐ Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions ; déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

L'essentiel

Propriétés

Démonstrations

Définitions

Lois

Corollaires

Applications

Points importants

Erreurs communes

I Forces centrales conservatives

I/A Force centrale

Définition M7.1 : Force centrale

Une force $\overrightarrow{F}$ est dite **centrale** s'il existe un point O fixe (dans $\mathcal{R}$) tel que $\overrightarrow{F}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ pour tout point M ; O est alors appelé **centre de force**. Autrement dit,

I/B Force centrale conservative

Propriété M7.1 : $\mathcal{E}_p$ force centrale

L'énergie potentielle d'une force centrale conservative ne dépend que de r et t :

Démonstration M7.1 : Énergie potentielle d'une FCC

Plaçons-nous dans le plan contenant $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans un repère polaire centré en O, avec $\overrightarrow{F} = F(\mathrm{M},t)\,\overrightarrow{u_r}$.
On a alors deux méthodes :

Utilisation du travail	Utilisation du gradient

Ainsi, $\mathcal{E}_p$ ne dépend ni de θ ni de z, donc dépend uniquement des variables r et t. ■

Attention M7.1 : Constantes dans les $\mathcal{E}_p$

Les énergies potentielles sont toujours définies à une constante près, qu'il convient de déterminer !

I/C Forces newtonienne

Définition M7.2 : Force newtonienne

Une force **newtonienne** est une **force centrale conservative** de la forme

$$\text{avec} \quad \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \\ k < 0 \Rightarrow \end{cases}$$

Force gravitationnelle

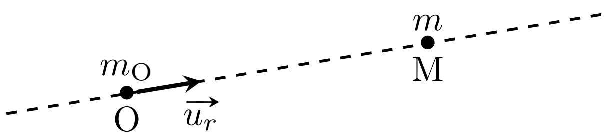


Figure M7.1 – $\overrightarrow{F_g}$

Force couloumbienne

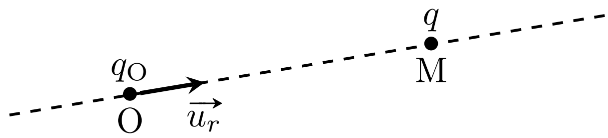


Figure M7.2 – $\overrightarrow{F_e}$

♥ Propriété M7.2 : Énergie potentielle newtonienne

L'énergie potentielle d'une force newtonienne s'écrit

En fixant par convention $\mathcal{E}_p(+\infty) = 0$, on obtient :

Interaction gravitationnelle

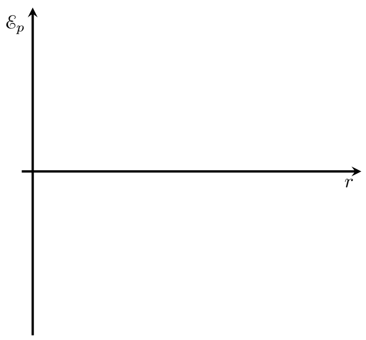


Figure M7.3 – $\mathcal{E}_{p,\mathrm{g}}(r,t)$

Interaction électrostatique

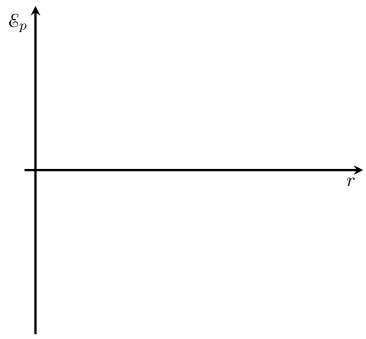


Figure M7.4 – $\mathcal{E}_{p,\mathrm{e}}(r,t)$

♥ Démonstration M7.2 : $\mathcal{E}_{p,\mathrm{grav}}$ et $\mathcal{E}_{p,\mathrm{elec}}$

Interaction gravitationnelle

Interaction électrostatique

II Conservation du moment cinétique

II/A Présentation

Propriété M7.3 : Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un système soumis uniquement à $\overrightarrow{F}$ centrale conservative se conserve :

Démonstration M7.3 : Conservation du moment cinétique

Or ■

II/B Conséquence : mouvement plan

Corollaire M7.1 : Mouvement plan

La conservation du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O fixe dans $\mathcal{R}$ implique que le mouvement **se fait dans le plan défini par** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0)$ et $\overrightarrow{v}(0)$.

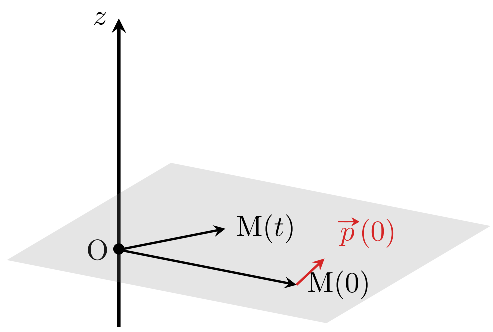


Figure M7.5 – Mouvement plan

Démonstration M7.4 : Mouvement plan

Soit $\overrightarrow{u_z}$ la direction initale du moment cinétique, c'est-à-dire

$\overrightarrow{u_z}$ définit donc une direction perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0)$ et $\overrightarrow{v}(0)$. Or, comme $\overrightarrow{\mathcal{L}}$ se conserve, on a

donc $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{v}$ **restent orthogonaux** à $\overrightarrow{u_z}$. Autrement dit, **le mouvement reste dans le plan** $\perp$ **à** $\overrightarrow{u_z}$ **passant par O**. ■

Remarque M7.1 : Nullité du moment cinétique

Si $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0)$ et $\overrightarrow{v}(0)$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{\mathcal{L}}(0)$ est nul, et reste donc nul à tout instant : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{v}$ restent colinéaires, et le mouvement est alors simplement rectiligne.

II/C Conséquence : loi des aires

Corollaire M7.2 : Constante et loi des aires

L'aire balayée $\mathrm{d}\mathcal{A}$ par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en un temps $\mathrm{d}t$ est constante, telle que

avec

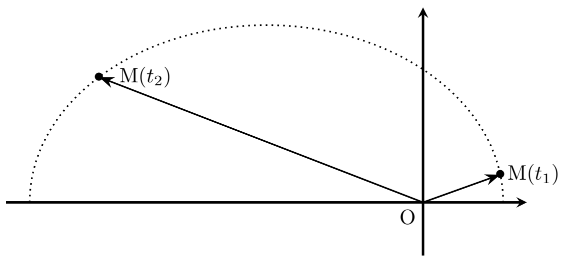


Figure M7.6 – Loi des aires.

Démonstration M7.5 : Loi des aires

La norme du moment cinétique quantifie l'aire balayée $\mathrm{d}\mathcal{A}$ pendant un temps $\mathrm{d}t$:

■

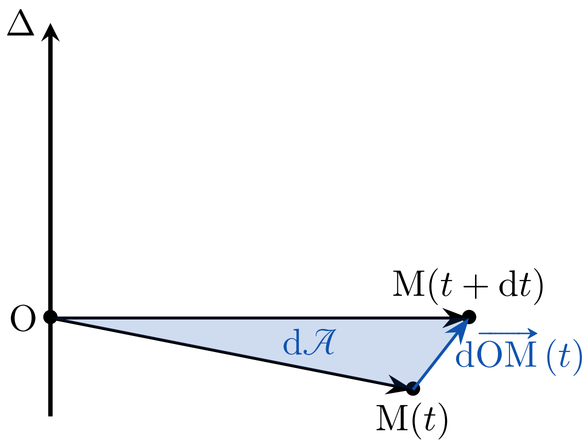


Figure M7.7 – Aire balayée.

De plus, le mouvement étant plan, on peut se placer en coordonnées polaires et calculer $\overrightarrow{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}$:

III Étude des trajectoires

III/A Énergie potentielle effective

Propriété M7.4 : Énergie potentielle effective

L'énergie mécanique d'un point matériel M soumis à une force centrale conservative est constante, et peut se mettre sous la forme

avec

Démonstration M7.6 : Énergie potentielle effective

Interprétation M7.1 : Énergie potentielle effective

L'énergie potentielle effective permet de se ramener à l'étude d'une seule dimension, ici r la distance au centre de force, plutôt que d'utiliser à la fois r et θ, en considérant $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ comme l'énergie potentielle du système et $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ son énergie cinétique.

III/B Cas attractif

Propriété M7.5 : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ newtonienne et cas attractif

Si $\vec{F}$ newtonienne, $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r,t) =$ $\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r,t) \xrightarrow[r\to 0]{} \\ \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r,t) \xrightarrow[r\to +\infty]{} \end{cases}$

De plus, pour $k > 0$, $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ présente un minimum en $r_{\min}$ tel que :

Démonstration M7.7 : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ attractive

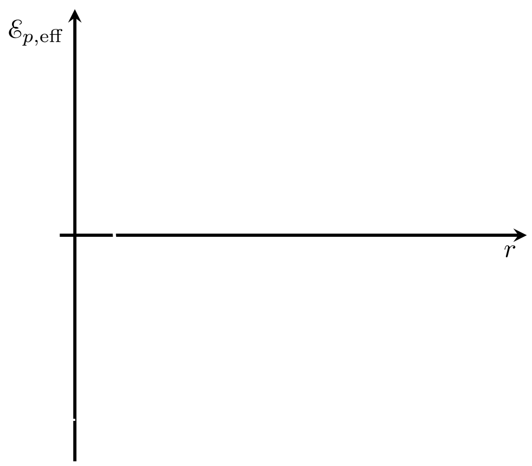


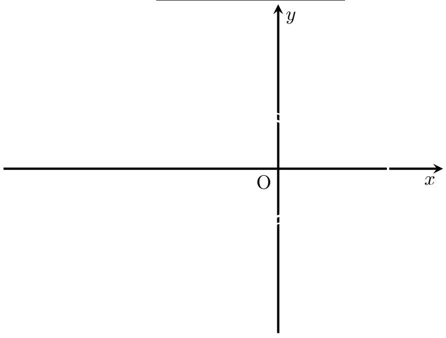
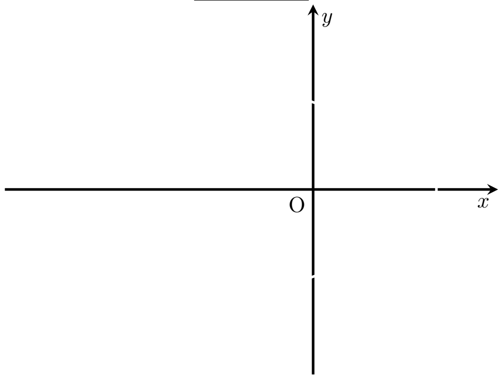
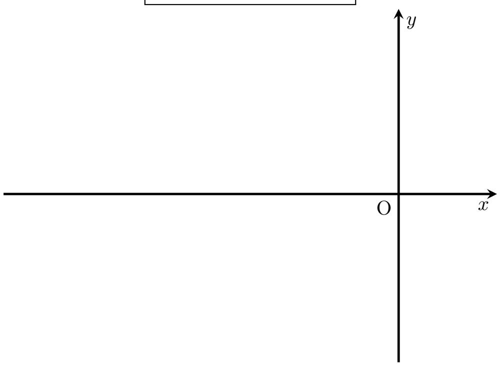
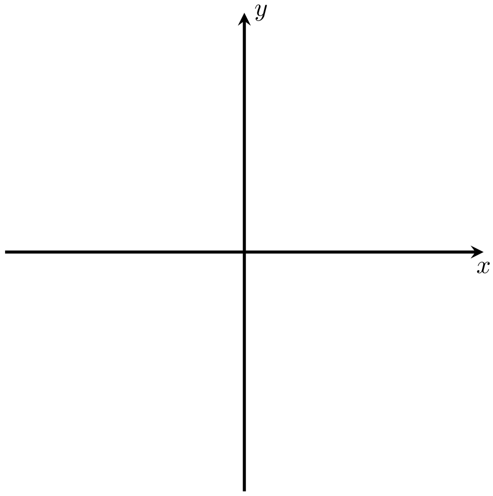
Figure M7.8 – $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ cas attractifs.

Important M7.1 : Trajectoires cas attractif

Comme $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$, on a forcément $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}} < \mathcal{E}_m}$. Ainsi, selon la valeur de $\mathcal{E}_m$ par rapport à $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$, le système aura différentes trajectoires, toutes ayant O comme foyer ou centre :

◇ $\mathcal{E}_m \geq 0$:

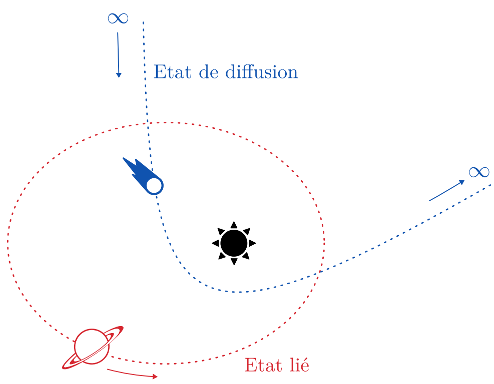
◇ $\mathcal{E}_m < 0$:

État	$\mathcal{E}_m$	Trajectoires	
Diffusion	$\mathcal{E}_m \geq 0$	$\boxed{0 < \mathcal{E}_m < \infty}$  **Hyperbolique**	$\boxed{\mathcal{E}_m = 0}$  **Parabolique**
Lié	$\mathcal{E}_m < 0$	$\boxed{-\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_m < 0}$  **Elliptique**	$\boxed{\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_0}$  **Circulaire**

Exemple M7.1 : État lié, état de diffusion

◇ Les planètes du système solaire restent confinées près du Soleil, ce sont donc des états liés.

◇ Un état de diffusion correspond par exemple au cas d'un comète arrivant vers le Soleil, atteignant une distance minimale avant de retourner à l'infini.



III/C Cas répulsif

Important M7.2 : Trajectoires cas répulsif

Dans le cas d'une forcé répulsive, l'énergie potentielle effective **n'a pas de minimum** ; la trajectoire est alors **toujours hyperbolique**.

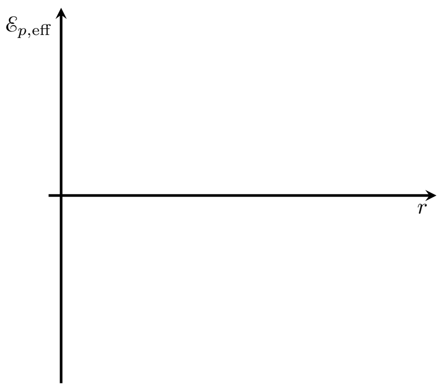


Figure M7.9 – $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ cas répulsifs.

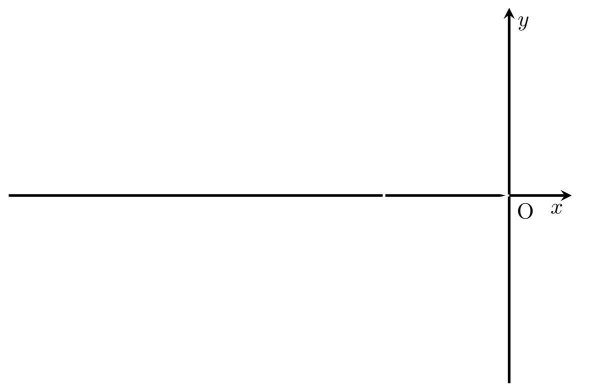


Figure M7.10 – Trajectoire cas répulsifs.

IV Mécanique céleste

IV/A Qu'est-ce qu'une ellipse ?

Définition M7.3 : Ellipse

Une ellipse se définit comme l'ensemble des points M tels que

avec O et O' les **foyers** de l'ellipse, et son a demi-grand axe.

Le point le plus proche s'appelle le **péricentre**[1] P, et le plus éloigné s'appelle l'**apocentre**[2], A.

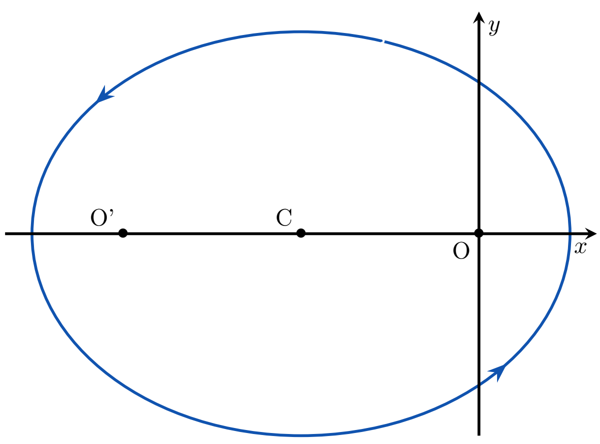


Figure M7.11 – Ellipse et paramètres

Propriété M7.6 : Caractéristiques en P ou A

◇ Les rayons r_{P} et r_{A} sont reliés à a tels que

◇ P et A sont à des extremum du rayon, soit

1. Périgée pour la Terre, périhélie pour le Soleil
2. Apogée pour la Terre, aphélie pour le Soleil

IV/B Lois de KEPLER

Les lois de KEPLER ont été établies par Johannes KEPLER au début du XVII^e siècle (publiées en 1609 et 1619) à partir de relevés expérimentaux effectués par Tycho BRAHE à la fin du XVI^e siècle.

Loi M7.1 : de KEPLER

1) **Loi des orbites :**

2) **Loi des aires :**

3) **Loi des périodes :**

3

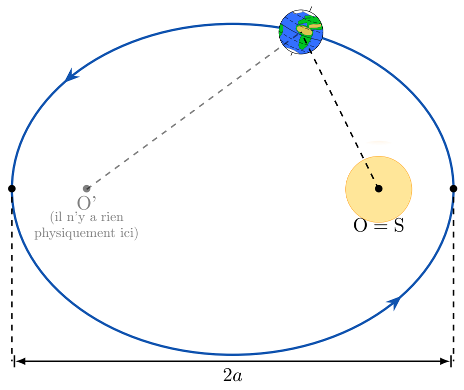


FIGURE M7.12 – 1re loi de KEPLER

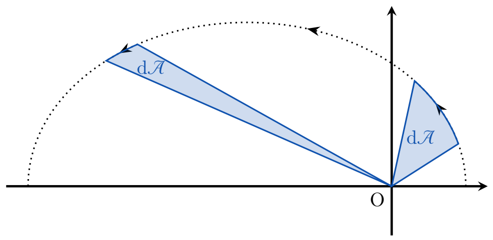


FIGURE M7.13 – 2^e loi de KEPLER

Application M7.1 : Troisième loi de KEPLER

Calculer la période de révolution de Mars autour du Soleil. On donne $a_{\text{Terre}} = 150 \times 10^6$ km et $a_{\text{Mars}} = 228 \times 10^6$ km.

IV/C Cas particulier du mouvement circulaire et généralisation

IV/C) 1 Vitesse uniforme

Important M7.3 : Vitesse des orbites circulaires

Le mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre est nécessairement uniforme, et on a

3. Plus précisément, $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_S}$

Démonstration M7.8 : Démonstration vitesse circulaire

1 **Système** :

2 **Référentiel** :

3 **Repère** :

4 **Repérage** :

5 **Bilan des forces** :

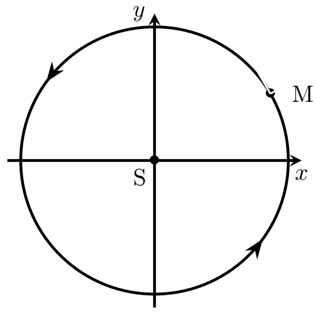


FIGURE M7.14

6 **PFD** :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad = \quad & (7.1) \\ \quad = \quad & (7.2) \end{cases}$$

7 **Vitesse du mouvement circulaire** : l'équation (7.2) donne $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte}$, et (7.1) donne

$$\Leftrightarrow \qquad \blacksquare \qquad (7.3)$$

Attention M7.2 : Vitesse des orbites elliptiques

Le mouvement elliptique n'est pas uniforme !

IV/C) 2 Période

Important M7.4 : Période circulaire

La période de révolution du mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre vérifie

Pour l'ellipse, on **remplace** R **par** a.

Démonstration M7.9 : T_{cercle}

En effet, avec (7.3),

$\blacksquare$

IV/C) 3 Énergie mécanique

Important M7.5 : $\mathscr{E}_m$ circulaire

L'énergie mécanique du mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre vérifie

Pour l'ellipse, on **remplace** R **par** a.

Démonstration M7.10 : $\mathscr{E}_{m,c}$

Enfin, avec (7.3) et l'énergie mécanique :

$\blacksquare$

V Satellite en orbite terrestre

V/A Vitesses cosmiques

V/A) 1 Première vitesse cosmique

Définition M7.4 : 1$^{\text{re}}$ vitesse cosmique

La première vitesse cosmique, ou *vitesse de satellisation minimale*, est la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite **circulaire** à sa surface

Propriété M7.7 : 1$^{\text{re}}$ vitesse cosmique

Sur Terre, on trouve

Démonstration M7.11 : Première vitesse cosmique

Pour satelliser un corps, il faut faire varier son **énergie mécanique** d'un état partant **du sol** jusqu'**en orbite**. La plus petite énergie mécanique pour cela est celle que l'on vient de déterminer dans l'étude de la trajectoire circulaire. Ainsi, à partir de l'énergie mécanique d'un objet lancé au niveau du sol, on a

et

Or système conservatif $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$ ■

Pour des altitudes plus élevées, il faut davantage de vitesse.

V/A) 2 Seconde vitesse cosmique

Définition M7.5 : 2$^{\text{nde}}$ vitesse cosmique

La seconde vitesse cosmique, ou *vitesse de libération* et notée v_{lib}, correspond à la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir **l'éloigner définitivement** de la Terre.

Propriété M7.8 : 2$^{\text{nde}}$ vitesse cosmique

Pour la Terre, on trouve

Démonstration M7.12 : Seconde vitesse cosmique

Pour éloigner définitivement un objet de la Terre, il faut un **état de diffusion**, donc que sa trajectoire soit **au minimum parabolique** :

et

Or système conservatif $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$ ■

Exemple M7.2 : Trajectoires depuis la Terre

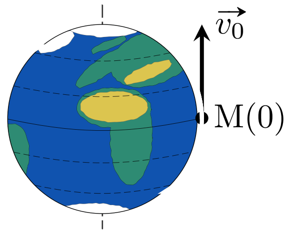


FIGURE M7.15 – Le code couleur correspond à celui de la Section III/B– Cas attractif.

La réalité est évidemment plus complexe que ça, étant donné les frottements, la non-galiléanité des référentiels, la prise en compte de la masse de carburant nécessaire, etc. . .

V/B Satellites artificiels

V/B) 1 Satellite géostationnaire

Définition M7.6 : Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui **reste constamment au-dessus d'un même point** de la surface terrestre ; il apparaît donc immobile pour um observataire terrestre.

Mission typique : obtenir des images fixes de la Terre avec une vue éloignée (à des fins météorologiques par exemple).

Propriété M7.9 : Satellite géostationnaire

1) Le plan de son orbite est le **plan de l'équateur** ;
2) Sa **vitesse angulaire est constante,** et vaut
3) Son **rayon est constant**, et on trouve

Attention M7.3 : Jours solaire et sidéral

Il existe deux durées qui peuvent s'appeler « jour » :

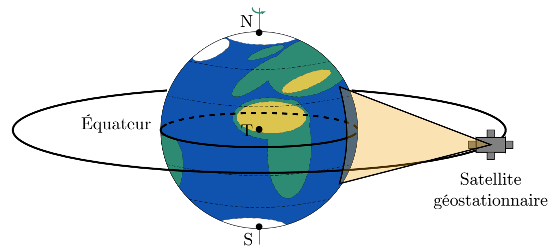
- le **jour sidéral**, que l'on croît à tort être celui qu'on emploie au quotidien, et qui correspond à la durée nécessaire pour que la Terre effectue une **rotation complète sur elle-même** :
- le **jour solaire** est l'intervalle de temps séparant deux **passages du Soleil au zénith** d'un point donné de la Terre, i.e. le temps qui sépare deux « midis » sur Terre ; on a

Ces deux notions diffèrent légèrement à cause de la révolution de la Terre autour du Soleil.

Figure M7.16

Démonstration M7.13 : Satellite géostationnaire

1)



2) Pour la même raison, il doit avoir la même vitesse angulaire que la Terre :

3) De plus,

V/B) 2 Satellite de positionnement

Définition M7.7 : Satellite de positionnement

Les satellites de positionnement fonctionnent par flotte de 20 à 30. Ils sont répartis dans quelques plans orbitaux (3 ou 6), de sorte qu'un point de la surface terrestre puisse toujours en voir au moins 3 dans le ciel.

- ◇ **Orbites** : $h \approx 20\,000\,\mathrm{km}$
- ◇ **Mission** : GPS

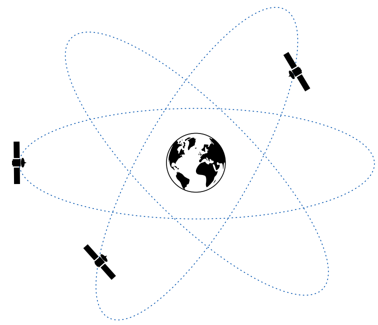


Figure M7.17 – Satellites de positionnement.

V/B) 3 Satellite circumpolaires

Définition M7.8 : Satellites circumpolaires

Ces satellites oscillent entre les pôles Nord et Sud, et ont une période d'environ 1h à 2h afin de balayer de nombreuses zones de la surface terrestre en un jour.

- **Orbites** : perpendiculaires au plan équatorial, ces orbites sont basses (environ 700 km de haut).
- **Mission** : cartographier la surface terrestre de plus proche que ne pourrait le faire un satellite géostationnaire.

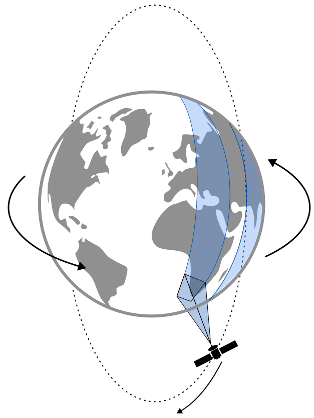


FIGURE M7.18 – Satellites circumpolaires

Remarque M7.2 : Sites internets

- **Géostationnaires** : https://www.ssec.wisc.edu/data/geo/
- **Circumpolaires** :
  - https://earthnow.usgs.gov/observer/
  - https://worldview.earthdata.nasa.gov
- **Planétarium** : https://stellarium-web.org/