

Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont autorisées

Au programme

Toute l'électrocinétique, oscillateurs en RSF résonance et filtrage ; toutes les ondes et interférences ; cinématique et dynamique du point sans mouvement courbe.

Sommaire

E1	Couche anti-reflet	2
E2	Étude d'un système masse-ressort vertical	4
P1	Étude de 3 filtres	7
P2	Étude d'un volant de badminton (<i>D'après X-ENS PC 2015 Physique B</i>)	13

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendrez soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ◇ A : application numérique mal faite ; ◇ N : numéro de copie manquant ; ◇ P : prénom manquant ; ◇ E : manque d'encadrement des réponses ; ◇ M : marge non laissée ou trop grande ; ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ; | <ul style="list-style-type: none"> ◇ Q : question mal ou non indiquée ; ◇ C : copie grand carreaux ; ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ; ◇ H : homogénéité non respectée ; ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ; ◇ φ : loi physique fondamentale brisée. |
|---|---|

Exemple application numérique

$$n = \frac{PV}{RT} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

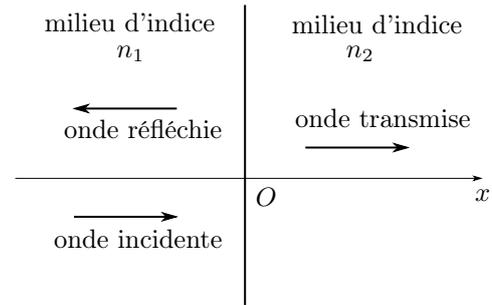
A.N. : $n = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol}$

~~$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8,32 \cdot 300} = 0,56$$~~

/33 **E1** Couche anti-reflet

Lorsqu'une onde lumineuse incidente se propageant dans un milieu transparent d'indice n_1 arrive sur un dioptre plan séparant le milieu d'indice n_1 du milieu d'indice n_2 , elle donne naissance à une onde réfléchie revenant dans le milieu d'indice n_1 et une onde transmise se propageant dans le milieu d'indice n_2 .

Dans cet exercice, on considère uniquement le cas où l'onde incidente arrive normalement au dioptre. Toutes les ondes se propagent alors selon l'axe (Ox). On repère le dioptre par la coordonnée $x = 0$.



On supposera que l'onde incidente est monochromatique de fréquence f , c'est-à-dire sinusoïdale de fréquence f .

- /2 [1] On suppose que les milieux d'indice n_1 et n_2 sont transparents, linéaires, homogènes et isotropes. Définir ces quatre adjectifs. Lequel de ces adjectifs permet d'affirmer que les ondes réfléchie et transmise sont monochromatiques de fréquence f ?

————— Réponse —————

- ⑤ ◇ Un milieu transparent n'absorbe pas d'énergie lumineuse, il laisse passer la lumière.
- ⑤ ◇ Un milieu linéaire est un milieu pour lequel les signaux de sortie sont proportionnels aux entrées, notamment en terme de fréquence ; cela revient à dire que la vitesse de propagation est indépendante de la fréquence de l'onde.
- ⑤ ◇ Un milieu homogène a ses propriétés physico-chimiques identiques en tout point du milieu.
- ⑤ ◇ Un milieu isotrope a ses propriétés physico-chimiques identiques dans toutes les directions.
- ◇ C'est le caractère linéaire des milieux qui permet d'affirmer que les ondes réfléchie et transmise seront sinusoïdales à la même fréquence f .



- /2 [2] On note λ_1 la longueur d'onde des ondes se propageant dans le milieu d'indice n_1 et λ_2 celle des ondes se propageant dans le milieu d'indice n_2 . Exprimer λ_1 en fonction de n_1 , f et c la célérité de la lumière dans le vide. En déduire la relation entre λ_1 et λ_2 .

————— Réponse —————

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} \quad \text{et} \quad n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lambda_1 = \frac{c}{n_1 f} = \lambda_2 \cdot \frac{n_2}{n_1}}$$



- /3 [3] La vibration lumineuse de l'onde incidente en $x = 0$ s'écrit $s_i(0,t) = A_i \cos(2\pi ft - \phi_i)$. Exprimer $s_i(x,t)$ en tout point de l'axe (Ox) tel que $x \leq 0$ en fonction de A_i , f , t , ϕ_i , λ_1 et x .

————— Réponse —————

$$s_i(x,t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} s_i \left(0, t - \frac{x}{v_1} \right) \quad \text{et} \quad f/v_1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1/\lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_i(x,t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} A_i \cos \left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda_1} x - \phi_i \right)}$$



- /2 [4] L'onde réfléchie est décrite par la fonction $s_r(x,t)$. On montre que $s_r(x,t)$ vérifie la condition $s_r(0,t) = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} s_i(0,t)$. Exprimer $s_r(x,t)$ en fonction de f , t , ϕ_i , λ_1 , x , A_i , n_1 et n_2 .

————— Réponse —————

$$s_r(x,t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} s_r \left(0, t + \frac{x}{v_1} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_r(x,t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} A_i \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \cos \left(2\pi ft + \frac{2\pi}{\lambda_1} x - \phi_i \right)}$$



- /3 [5] En déduire que la réflexion s'accompagne d'un déphasage de π si $n_1 < n_2$ et ne modifie pas la phase si $n_1 > n_2$.

————— Réponse —————

$$A_r \stackrel{\textcircled{1}}{=} A_i (n_1 - n_2) / (n_1 + n_2) \quad \text{donc,} \quad n_1 < n_2 \Rightarrow A_r < 0 \quad \text{soit} \quad s_r(x,t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} |A_r| \cos(\omega t + kx - \phi_i + \pi)$$



On définit le facteur de réflexion $R = P_r/P_i$ comme le rapport de la puissance P_r transportée par l'onde réfléchie et de celle P_i transportée par l'onde incidente. De même le facteur de transmission $T = P_t/P_i$ est le rapport de la puissance P_t transportée par l'onde transmise et de celle transportée par l'onde incidente. On admet que :

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 ; \quad T = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

- /3 [6] Que vaut $R + T$? Commenter. Calculer alors R puis T dans le cas d'une lumière se propageant dans l'air d'indice $n_1 = 1$ qui se réfléchit sur un verre d'indice $n_2 = 1,5$.

Réponse

$R + T = 1$ (1), ce qui traduit la conservation de l'énergie (1). On trouve alors $R = 0,04$ et $T = 0,96$ (1)



Une automobiliste qui conduit avec le soleil dans le dos porte des verres de lunettes ayant cet indice. L'éclairement venant du soleil est dix fois supérieur à l'éclairement venant du paysage. L'automobiliste reçoit les rayons provenant du soleil qui sont réfléchis par ses verres de lunettes, et ceux provenant du paysage devant elle qui sont transmis à travers ses verres de lunettes.

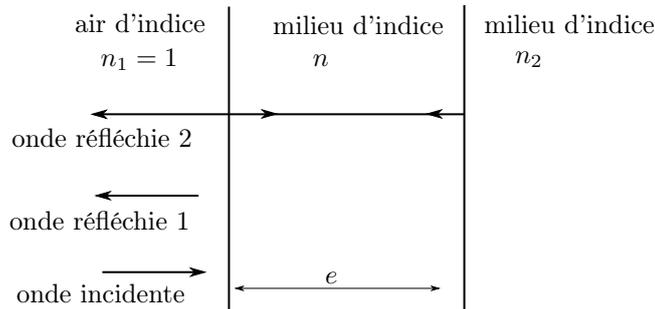
- /2 [7] Donner une valeur approchée du rapport des éclairagements entrant dans l'œil de l'automobiliste provenant du soleil et du paysage. Conclure.

Réponse

$E = 10 \times R/T \approx 0,4$ (1) : la conductrice est éblouie. (1)



Le système de la couche antireflet permet de réduire fortement le pourcentage du flux lumineux réfléchi. On recouvre pour cela la surface de verre d'indice n_2 par une couche d'épaisseur e et d'indice n tel que $n_1 < n < n_2$. On utilise le phénomène d'interférences entre l'onde qui est réfléchie sur le dioptre air/milieu d'indice n (notée onde réfléchie 1) et l'onde qui est réfléchie sur le dioptre milieu d'indice n /milieu d'indice n_2 (notée onde réfléchie 2). On notera λ_0 la longueur d'onde dans le vide.



L'onde réfléchie 1 correspond au signal $s_1(M,t)$ et l'onde réfléchie 2 au signal $s_2(M,t)$ où M est un point de l'espace :

$$s_1(M,t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1(M)) ; \quad s_2(M,t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2(M))$$

- /5 [8] Sachant que la transmission ne s'accompagne d'aucun déphasage, exprimer le déphasage $\Delta\phi$ entre les ondes réfléchies 1 et 2 en fonction de e , n et λ_0 . Vous justifierez soigneusement votre réponse.

Réponse

Le déphasage en M correspond au déphasage en un point O situé juste avant le dioptre air/milieu d'indice n . En supposant que la phase de l'onde incidente en O est nulle, alors

- (1) ◇ la phase de l'onde réfléchie 1 vaut $\phi_1(O) = \pi$ car il y a réflexion entre un milieu d'indice n_1 vers un milieu d'indice n tel que $n_1 < n$ (cf. question [5]).

- ◇ la phase de l'onde réfléchie 2 vaut $\phi_2(O) = \frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot 2e + \pi$. (1)

Cette phase correspond à la propagation d'une distance $2e$ (1) de l'onde de longueur d'onde λ_n dans le milieu d'indice n et du déphasage de π induit par la réflexion entre un milieu d'indice n_2 vers un milieu d'indice $n_1 < n_2$. Or $\lambda_n = \lambda_0/n$. (1)

- ◇ On en déduit le déphasage en O , donc en M : $\Delta\phi = \frac{4\pi ne}{\lambda_0}$ (1)



- /2 [9] On appelle p l'ordre d'interférence. Quelles sont les valeurs de l'épaisseur e permettant d'avoir une amplitude de l'onde réfléchie totale minimale ?

Réponse

Il faut qu'il y ait interférences destructives, soit $\Delta\phi(M) = (2p + 1)\pi$ (1), avec $p \in \mathbb{Z}$. On en déduit :

$$e = \frac{\textcircled{1} \lambda_0}{2n} \left(p + \frac{1}{2} \right) \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}$$

◇

On s'intéresse à un verre d'indice $n_2 = 1,5$ recouvert d'une couche de fluorure de magnésium d'indice $n = 1,38$ et d'épaisseur e telle que $4ne = \lambda_0$ avec λ_0 la longueur d'onde de la lumière dans le vide. Par définition, le coefficient de réflexion R est le pourcentage de la puissance lumineuse qui est réfléchi par le système.

On rappelle que la puissance transportée par une onde lumineuse monochromatique est proportionnelle au carré de son amplitude. On rappelle que l'on s'intéresse uniquement aux ondes réfléchies 1 et 2 définies précédemment. On note $s(M,t)$ le signal résultant de la superposition des deux ondes réfléchies en un point M .

- /5 [10] Montrer que l'amplitude au carré $A(M)^2$ de l'onde $s(M,t)$ s'exprime $A(M)^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\phi(M))$

Réponse

En supposant directement que $s(M,t) = A(M) \cos(\omega t + \varphi(M))$ (par linéarité),

$$\begin{aligned} s(M,t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} s_1(M,t) + s_2(M,t) \\ \Leftrightarrow A(M)e^{j\varphi(M)}e^{j\omega t} &= A_1e^{j\varphi_1(M)}e^{j\omega t} + A_2e^{j\varphi_2(M)}e^{j\omega t} \\ \Leftrightarrow A(M)e^{j\varphi(M)} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} A_1e^{j\varphi_1(M)} + A_2e^{j\varphi_2(M)} = \underline{A_1} + \underline{A_2} \\ \Rightarrow |A(M)|^2 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \underline{A(M)} \cdot \underline{A^*(M)} = (A_1 + A_2)(A_1^* + A_2^*) \\ \Leftrightarrow A(M)^2 &= (A_1e^{j\varphi_1(M)} + A_2e^{j\varphi_2(M)}) \cdot (A_1e^{-j\varphi_1(M)} + A_2e^{-j\varphi_2(M)}) \\ \Leftrightarrow A(M)^2 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} A_1^2 \underbrace{e^{j(\varphi_1(M)-\varphi_1(M))}}_{=1} + A_2^2 \underbrace{e^{j(\varphi_2(M)-\varphi_2(M))}}_{=1} + A_1A_2 \underbrace{(e^{j(\varphi_1(M)-\varphi_2(M))} + e^{-j(\varphi_1(M)-\varphi_2(M))})}_{=2 \cos \Delta\varphi_{2/1}(M)} \\ \Leftrightarrow A(M) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi_{2/1}(M))} \end{aligned}$$

◇

- /2 [11] Montrer que le coefficient de réflexion du système dépend de la longueur d'onde.

Réponse

$R = A(M)^2/A_i^2$ (1). Or, $A(M)$ dépend de $\Delta\phi(M)$ donc de λ_0 . (1)

◇

- /2 [12] Expérimentalement, $R(\lambda_0) = 0,015$. Est-ce surprenant que le coefficient de réflexion ne soit pas nul ? Comparer avec l'application numérique de la question [6].

Réponse

L'épaisseur est choisie pour obtenir des interférences destructives. Le coefficient de réflexion n'est pas nul car les amplitudes des deux ondes réfléchies ne sont pas égales. (1)

$R(\lambda_0) < 0,04$ on a donc diminué le coefficient de réflexion. (1)

◇

/45 E2 Étude d'un système masse-ressort vertical

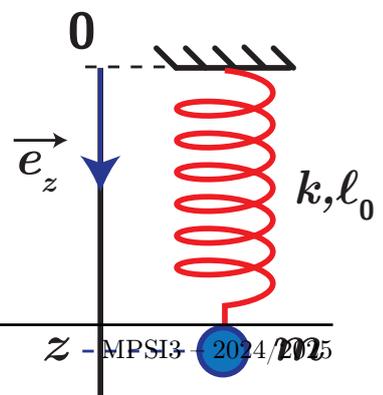
On considère le dispositif expérimental suivant, constitué d'un système masse-ressort suspendu verticalement. La valeur de la masse est notée m et le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide ℓ_0 . Le paramétrage est défini sur le schéma ci-contre.

- /10 [1] Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $z(t)$. Montrer que celle-ci se met sous la forme :

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 h \quad (5.1)$$

Préciser les expressions de ω_0 et h en fonction de m , k , ℓ_0 et g .

Réponse



- ① ◇ **Système** : {masse} accrochée à un ressort, représenté par M de masse m dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen.
- ① ◇ **Schéma** avec les forces
- ① ◇ **Repère et repérage** : (O, \vec{u}_z) vertical descendant,

$$\vec{OM}(t) = z(t)\vec{u}_z \quad ; \quad \vec{v}(t) = \dot{z}(t)\vec{u}_z \quad ; \quad \vec{a}(t) = \ddot{z}(t)\vec{u}_z$$

◇ **BdF** :

① **Poids** $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\vec{u}_z$

① **Force HOOKE** $\vec{F}_r = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_k = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_z$

◇ **PFD général** :

$$\begin{aligned}
 m\vec{a}(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{P} + \vec{F}_r \\
 \Leftrightarrow m\ddot{z}(t) &= +mg - k(\ell(t) - \ell_0) \quad \left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \downarrow \ell(t) = \ell_0 + z(t) \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow m\ddot{z}(t) + kz(t) &= (mg + k\ell_0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \ddot{z}(t) + \frac{k}{m}z(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{k}{m}\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) \\
 &\Leftrightarrow \boxed{\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 h} \quad \left. \vphantom{\ddot{z}(t)} \right\} \text{On identifie} \\
 &\text{avec } \omega_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad h \stackrel{\textcircled{1}}{=} \ell_0 + \frac{mg}{k}
 \end{aligned}$$

/2 [2] Établir l'expression de la période du mouvement en fonction des paramètres du système.

Réponse

La période est liée à la pulsation ω_0 par la relation :

$$T \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

/3 [3] Donner la solution générale de l'équation harmonique (5.1), sans chercher à déterminer les constantes d'intégration.

Réponse

Solution générale de l'équation homogène : $z_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ ①.

Solution particulière de l'équation générale : $z_p(t) = h$ ①.

La solution générale de l'équation harmonique (5.1) est la somme de ces deux solutions :

$$\boxed{z(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} h + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)} \tag{5.2}$$

/3 [4] Exprimer la valeur moyenne z_{moy} de z en fonction de ℓ_0, g, k et m .

Réponse

La valeur moyenne d'une somme étant la somme des valeurs moyennes, il suffit de calculer les valeurs moyennes des trois termes de la solution trouvée. La valeur moyenne de la constante h est h et les valeurs moyennes du cosinus et du sinus étant nulles ①, on a : $\langle z(t) \rangle = \langle h \rangle + \langle A \cos(\omega_0 t) \rangle + \langle B \sin(\omega_0 t) \rangle = h$ ①. Soit :

$$\boxed{z_{\text{moy}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} h = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

/3 [5] Montrer que cette position moyenne z_{moy} est celle pour laquelle la somme des forces qui s'appliquent sur la masse est nulle. Comment appelle-t-on usuellement cette position ?

Réponse

On calcule la résultante des forces extérieures en $z(t) = z_{\text{moy}}$:

$$\begin{aligned}
 \sum \vec{F}_{\text{ext}}(z = z_{\text{moy}}) &= \vec{P} + \vec{F}_r(z = z_{\text{moy}}) \stackrel{\textcircled{1}}{=} mg\vec{e}_z - k(z_{\text{moy}} - \ell_0)\vec{e}_z \\
 \Leftrightarrow \sum \vec{F}_{\text{ext}}(z = z_{\text{moy}}) &= \left(mg - k\left(\ell_0 + \frac{mg}{k} - \ell_0\right) \right) \vec{e}_z = (mg - mg)\vec{e}_z \\
 \Leftrightarrow \sum \vec{F}_{\text{ext}}(z = z_{\text{moy}}) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{0}
 \end{aligned}$$

z_{moy} est la position d'équilibre de la masse. ①

- /2 [6] Comparer z_{moy} à ℓ_0 et commenter physiquement.

Réponse

$$z_{\text{moy}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} > \ell_0$$

z_{moy} est plus grand que ℓ_0 , ce qui est normal car la masse est suspendue au ressort et celui-ci doit s'allonger pour compenser l'effet du poids de la masse. ① Comme, ici, $z = \ell$, on a bien une longueur pour le ressort plus grande à l'équilibre qu'à vide.

- /4 [7] On lâche la masse à $t = 0$ sans vitesse initiale, à une position telle que $z(t = 0) = h + z_1$ avec $z_1 > 0$. Déterminer la solution $z(t)$ dans ce cas.

Réponse

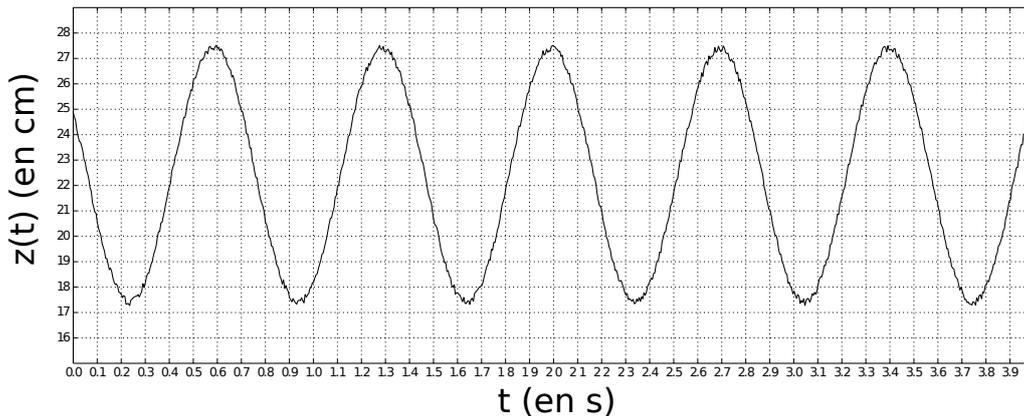
On calcule la position et la vitesse initiales données par l'expression (5.2) décrivant le mouvement de la masse :

$$\begin{cases} z(0) = h + A = h + z_1 \\ v(0) = \omega_0 B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = z_1 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{①}$$

Et on peut finalement exprimer l'équation horaire décrivant le mouvement de la masse dans ces conditions particulières :

$$z(t) = h + z_1 \cos(\omega_0 t)$$

Lors d'une étude expérimentale de ce système, on relève le graphe de $z(t)$.



- /2 [8] Cette courbe peut-elle être celle de l'expérience précédente ? Justifier.

Réponse

La courbe fournie ne peut pas être rigoureusement celle de l'expérience précédente car la phase à l'origine n'est pas la bonne. ① Pour coller aux conditions initiales précédentes, on devrait avoir un maximum de la sinusoïde en $t = 0$. Cependant, cette courbe pourrait tout à fait décrire l'expérience précédente en admettant que l'acquisition n'ait pas été lancée à $t = 0$. ①

- /10 [9] Calculer la valeur de la fréquence du mouvement avec son incertitude. On utilisera plusieurs valeurs pour augmenter la précision, on détaillera le choix d'incertitude mesurée. On rappelle les expressions de composition des incertitudes :

$$y = \alpha x_1 \pm \beta x_2 \Rightarrow u(y) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2} \quad ; \quad y_{\text{calc}} = f(x_{\text{mes}}) \Rightarrow u(y_{\text{calc}}) = \left(\left| \frac{df}{dx} \right| \right)_{x_{\text{mes}}} \cdot u(x_{\text{mes}})$$

Réponse

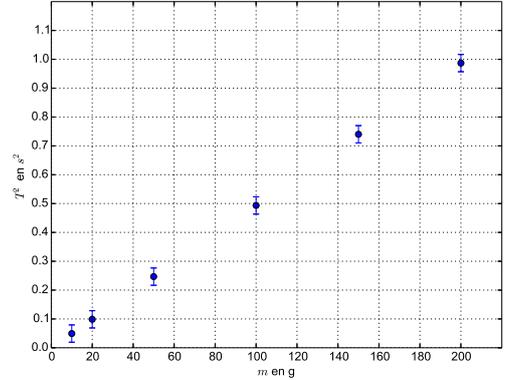
On mesure 5 périodes en prenant la valeur minimale à chaque fois, avec comme erreur le demi-intervalle :

$$\begin{aligned} t_1 \in [0,22 ; 0,26] \text{ s} &\Rightarrow u(t_1) = \frac{\Delta t_1}{2\sqrt{3}} \quad \text{soit} \quad t_1 = (0,240 \pm 0,012) \text{ s} \\ t_6 \in [3,72 ; 3,76] \text{ s} &\Rightarrow u(t_6) = \frac{\Delta t_6}{2\sqrt{3}} \quad \text{soit} \quad t_6 = (3,740 \pm 0,012) \text{ s} \end{aligned}$$

Ainsi $5T = t_6 - t_1 \Leftrightarrow T = \frac{t_6 - t_1}{5}$ et $u(T) = \frac{\sqrt{2}u_{t_1}}{5}$ soit $T = (0,7000 \pm 0,0033) \text{ s}$

Or $f = \frac{1}{T} \Rightarrow u(f) = \frac{u(T)}{T^2}$ soit $f = (1,4286 \pm 0,0067) \text{ Hz}$

On effectue une étude expérimentale de ce système, en mesurant la période T des oscillations pour différentes valeurs de la masse m accrochée au ressort étudié. On trace ensuite $T^2 = f(m)$. On obtient alors le graphique suivant :



/3 10 Expliquer en quoi ce graphique est compatible avec la modélisation précédente.

Réponse

Les résultats expérimentaux montrent clairement que les points sont alignés selon un droite qui passe par l'origine. Pour vérifier que la théorie prédit ce comportement, on part de l'expression de la période trouvée à la question 2. On a alors :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} \Leftrightarrow y = a \cdot x$$

avec $a = \frac{4\pi^2}{k}$ et $x = m$

La fonction T^2 est bien une fonction linéaire d'après la théorie.

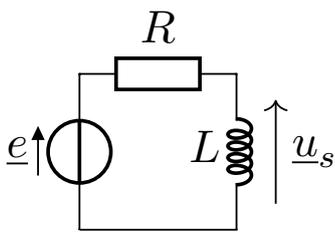
/2 11 En déduire la valeur de k que l'on exprimera en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ (on ne cherchera pas à exprimer l'incertitude ici).

Réponse

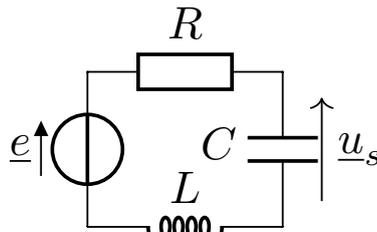
Comme la fonction T^2 passe par l'origine (graphiquement et théoriquement), on n'a besoin que d'une seule valeur pour déterminer la pente. On lit : $T^2(0,200 \text{ kg}) = 0,98 \text{ s}^2$, soit : $a = 4,9 \text{ s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$. On en déduit k : $k = \frac{4\pi^2}{a} \Rightarrow k = 8,0 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

/86 P1 Étude de 3 filtres

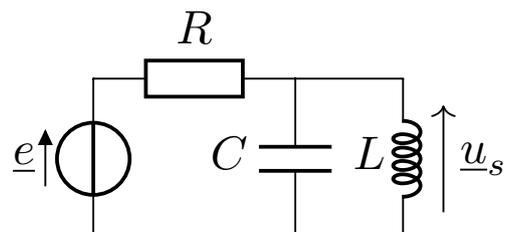
On étudie les trois circuits suivants alimentés par une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi f$. Les composants passifs utilisés ont les mêmes valeurs pour les trois circuits.



Circuit 1



Circuit 2



Circuit 3

On rappelle les expressions canoniques des filtres du premier ordre :

$$H_{\text{p-bas},1}(x) = \frac{1}{1 + jx} ; H_{\text{p-haut},1}(x) = \frac{jx}{1 + jx} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jx}}$$

et du deuxième ordre :

$$H_{p\text{-bas},2}(x) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} ; H_{p\text{-bande},2}(x) = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} ; H_{p\text{-haut},2}(x) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

I/A Mise en équation des filtres

1 On considère ici le premier circuit.

/6 a) De quel type de filtre s'agit-il? Justifier la réponse sans calcul.

Réponse

Schéma 1 \diamond En BF : $\underline{u}_s = 0$ (1) (la bobine est équivalente à un fil).

Schéma 1 \diamond En HF : $\underline{u}_s = \underline{e} - R_i$ (1) or $i = 0$ donc $\underline{u}_s = \underline{e}$ (1) (courant nul car la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert).

On obtient alors un filtre passe haut. (1)

/2 b) Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_1 = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}}$ en fonction de L , R et ω .

Réponse

On obtient la fonction de transfert à l'aide d'un pont diviseur de tension :

$$\underline{H}_1 = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

/3 c) Après avoir défini la pulsation de coupure, établir son expression $\omega_{c,1}$ en fonction de R et L . Ré-exprimer ensuite \underline{H}_1 avec $x = \omega/\omega_{c,1}$.

Réponse

On définit ω_c tel que : $|\underline{H}_1(\omega_{c,1})| = \frac{|H_{\max}|}{\sqrt{2}}$ avec $|H_{\max}| = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{(L/R)\omega_{c,1}}{\sqrt{1 + ((L/R)\omega_{c,1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + ((L/R)\omega_{c,1})^2 = 2((L/R)\omega_{c,1})^2 \Rightarrow \omega_{c,1} = \frac{R}{L}$$

soit

$$\underline{H}_1 = \frac{jx}{1 + jx}$$

/10 d) Déterminer l'expression de la phase en fonction de x puis tracer le diagramme de BODE en phase en fonction de $\log(x)$. L'expression le tracé des asymptotes et la valeur en $x = 1$ sont aussi attendus.

Réponse

$$\phi(x) = \arg(\underline{H}(x)) = \arg(jx) - \arg(1 + jx)$$

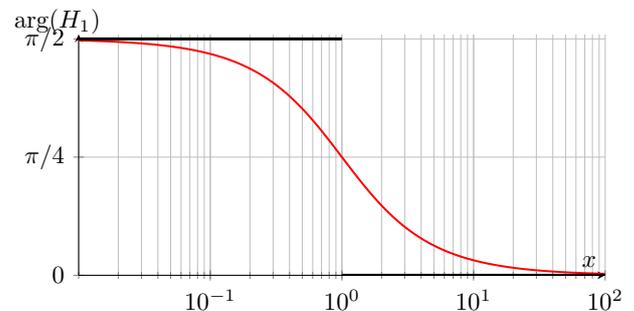
$$\Leftrightarrow \phi(x) = \pi/2 - \arctan(x)$$

$$\diamond \underline{H}_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} jx \Rightarrow \phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \pi/2$$

$$\diamond \underline{H}_1(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 1 \Rightarrow \phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\diamond \phi(1) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$$

(1) + (1) + (1) pour le graphique.



2 On considère maintenant le deuxième circuit.

/6 a) De quel type de filtre s'agit-il ? Justifier la réponse sans calcul.

Réponse

Schéma ① ◇ En BF, on trouve $\underline{u}_s = \underline{u}_e$ ① (courant nul à cause du condensateur et $\frac{\underline{u}_R}{=Ri=0} + \frac{\underline{u}_L}{0} + \underline{u}_s = \underline{u}_e$ ①).

Schéma ① ◇ De plus, on trouve en HF que $\underline{u}_s = 0$ ① (condensateur équivalent à un fil).

Il s'agit donc d'un filtre passe bas. ①

/5 b) Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_2(\omega) = \frac{\underline{u}_s}{e}$ en fonction de ω . Faire apparaître un facteur de qualité Q_2 dont l'expression devra être précisée en fonction de R, L et C ainsi qu'une pulsation propre notée ω_2 .

Réponse

On trouve encore une fois la fonction de transfert à l'aide de la formule du pont diviseur de tension généralisée (3 dipôles en série) :

$$\underline{H}_3(\omega) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{G_0}{1 + \frac{j}{Q_2} \frac{\omega}{\omega_2} - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

On procède ensuite par identification et on obtient :

$$\omega_2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{puis} \quad \frac{1}{Q_2\omega_2} = RC \Rightarrow Q_2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

3 On considère alors le troisième et dernier circuit.

/4 a) De quel type de filtre s'agit-il ? Justifier la réponse sans calcul.

Réponse

Schémas : ① et ①. On observe une tension de sortie nulle en BF et HF (il y a dans les deux cas un dipôle qui se comporte comme un fil). ① Le filtre associé est donc un filtre passe bande. ①

/6 b) Établir l'équation différentielle reliant la tension réelle $u_s(t)$ à $\frac{de}{dt}$. On rappelle que $e(t)$ est une fonction quelconque du temps. La mettre sous la forme canonique puis identifier la pulsation propre ω_3 ainsi que le facteur de qualité Q_3

Réponse

On applique tout d'abord la loi des noeuds puis on exprime les courants i_c et i_l en fonction de u_s

$$i(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} i_c(t) + i_l(t) \Rightarrow \frac{di}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} C \frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{1}{L} u_s$$

LdM : $e(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} u_R(t) + u_s(t) = Ri(t) + u_s(t) \Rightarrow \frac{de}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} RC \frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{R}{L} u_s + \frac{du_s}{dt}$

Forme canonique $\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{CL} u_s(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{RC} \frac{de}{dt}$

Identification $\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ puis $\omega_3/Q_3 = 1/RC \Rightarrow Q_3 \stackrel{\textcircled{1}}{=} R\sqrt{\frac{C}{L}}$

/3 c) Dédurre de la question précédente que la fonction de transfert \underline{H}_3 s'écrit

$$\underline{H}_3(\omega) = \frac{1}{1 + jQ_3 \left(\frac{\omega}{\omega_3} - \frac{\omega_3}{\omega} \right)} \tag{5.1}$$

Réponse

On passe l'équation précédente en complexes :

$$\frac{\omega_3}{Q_3} j\omega \underline{u}_e \stackrel{\textcircled{1}}{=} \left((j\omega)^2 + \frac{\omega_3}{Q_3} j\omega + \omega_3^2 \right) \underline{u}_s$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}_3 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\frac{\omega_3}{Q_3} j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_3}{Q_3} j\omega + \omega_3^2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{1 + jQ_3 \left(\frac{\omega}{\omega_3} - \frac{\omega_3}{\omega} \right)}$$

/4 d) Déterminer les équations des asymptotes hautes et basses fréquences de ce filtre en fonction de $\log \omega$.

Réponse

Basses fréquences	Hautes fréquences
$H_3(\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{\omega}{-jQ_3\omega_3}$	$H_3(\omega) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\omega_3}{jQ_3\omega}$
$\Rightarrow G_{dB}(\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(\omega) - 20 \log(Q_3\omega_3)$	$\Rightarrow G_{dB}(\omega) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} 20 \log(\omega_3/Q_3) - 20 \log(\omega)$

/3 e) En déduire l'expression théorique des coordonnées du point d'intersection des asymptotes $(\omega_i, G_{dB,i})$.

Réponse

On résout $20 \log \omega_i - 20 \log(Q_3\omega_3) \stackrel{\textcircled{1}}{=} 20 \log(\omega_3/Q_3) - 20 \log \omega_i$ soit $\omega_i = \omega_3 \stackrel{\textcircled{1}}$
d'où $G_{dB,i} = -20 \log Q_3 \stackrel{\textcircled{1}}$

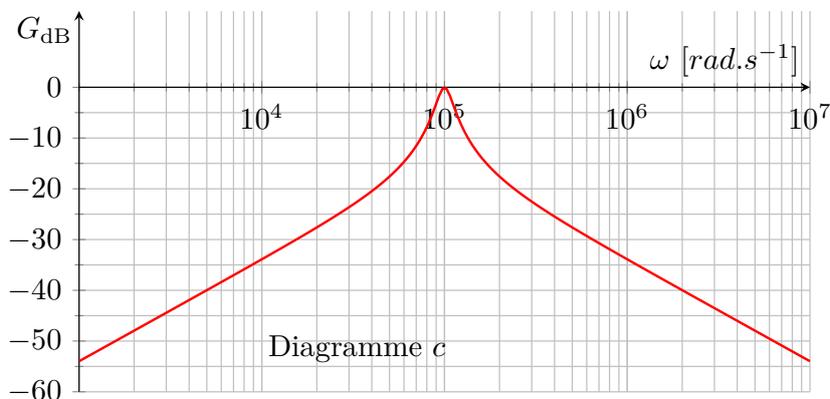
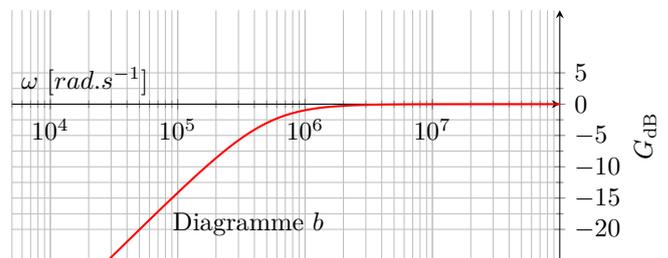
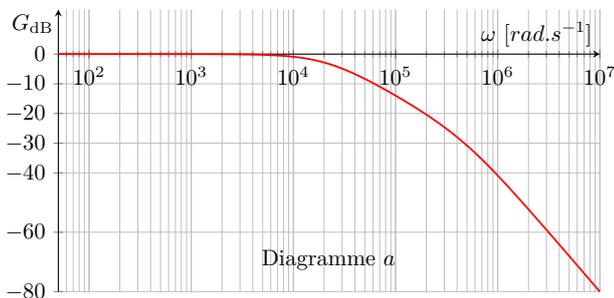
/3 f) Déterminer l'expression théorique du gain maximal $G_{dB,max}$. Comparer $G_{dB,max}$ et $G_{dB,i}$ en fonction de la valeur de Q_3 .

Réponse

Le gain est maximal pour $\omega = \omega_3 \stackrel{\textcircled{1}}$, et $|H_3|(\omega_3) = 1$ soit $G_{dB,max} = 0 \stackrel{\textcircled{1}}$.
Ainsi, si $Q_3 > 1$, alors $G_{dB,i} < G_{dB,max} \stackrel{\textcircled{1}}$.

I/B Obtention des valeurs des composants

On présente ci-dessous les diagrammes de Bode en Gain associés aux trois filtres étudiés.



/3 4 Associer chaque diagramme de Bode (a, b et c) à son filtre (1, 2 et 3). Il conviendra de justifier votre réponse.

Réponse

- ① \diamond Le diagramme de Bode a correspond à un passe bas du deuxième ordre (pente de -40 dB/dec), il est donc associé au filtre 2.
① \diamond Finalement, le diagramme de Bode b, de type passe haut, est associé au filtre 1.
① \diamond Le diagramme de Bode c correspond à un filtre passe bande ; il est donc associé au filtre 3.

- /4 [5] Déterminer graphiquement les valeurs de Q_3 , ω_3 et $\omega_{c,1}$ en utilisant les résultats théoriques déterminés dans les questions précédentes.

Réponse

Dans le dernier diagramme, l'intersection des asymptotes se fait à

$$\omega_i = \omega_3 = 1 \times 10^5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad G_{\text{dB},i} = -14 \text{ dB}$$

$$\Leftrightarrow Q_3 = 10^{\frac{-G_{\text{dB},i}}{20}} \Rightarrow Q_3 \approx 5$$

Le diagramme b (associé au filtre 1) a comme pulsation de coupure (qui est aussi la pulsation à l'intersection des asymptotes) $\omega_{c,1} = 5 \times 10^5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

- /4 [6] En déduire les valeurs des composants L et C sachant que $R = 0,5 \text{ k}\Omega$. On rappelle que les composants utilisés sont identiques pour les trois circuits.

Réponse

Pour le filtre de type passe haut d'ordre 1 (diagramme b), on a

$$\omega_{c,1} = \frac{R}{L} \Leftrightarrow L = \frac{R}{\omega_{c,1}} \Rightarrow L \approx 1 \text{ mH}$$

De plus, pour le filtre de type passe bande (diagramme c), on a la pulsation propre :

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow C = \frac{1}{L\omega_3^2} \Rightarrow C \approx 1 \times 10^{-7} \text{ F}$$

I/C Application des filtres à divers signaux $e(t)$

On donne les décompositions en série de Fourier pour un signal triangulaire $s_t(t)$ de fréquence fondamentale f_t et un signal créneau $s_c(t)$ de fréquence fondamentale f_c :

$$s_t(t) = C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin((2k+1)\omega_t t)}{(2k+1)^2} \quad \text{avec} \quad \omega_t = 2\pi f_t \quad \text{et} \quad C = \text{cste}$$

$$s_c(t) = D \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\omega_c t)}{(2k+1)} \quad \text{avec} \quad \omega_c = 2\pi f_c \quad \text{et} \quad D = \text{cste}$$

Par la suite, on notera l'harmonique de rang n , l'harmonique de fréquence $f_n = n f_t$ pour le signal triangulaire ou $f_n = n f_c$ pour le signal créneau, avec n un entier impair ($n = 2k + 1$).

- /4 [7] On considère d'abord un signal d'entrée $e(t)$ envoyé sur le filtre 3 de type créneau et de fréquence $f_c = f_3/3$ avec $f_3 = \omega_3/(2\pi)$ où ω_3 désigne la pulsation propre du filtre 3 comme montré dans la question [3]b).

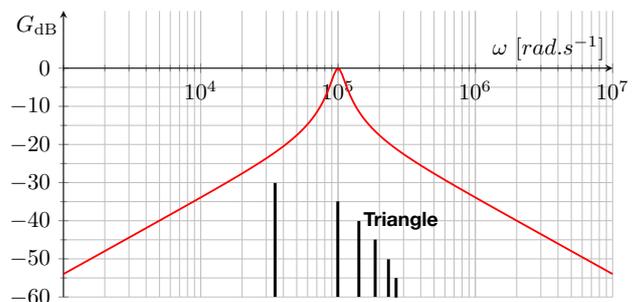
Tracer sommairement l'allure du spectre de $e(t)$ superposé au diagramme de BODE du filtre. Prédire l'expression ainsi que l'allure du signal de sortie $u_s(t)$ du filtre 3 en argumentant votre réponse.

Réponse

On ajoute le spectre au diagramme de BODE en gain de la question précédente (voir ci-contre, en noir). On observe alors que seul l'harmonique de rang $n = 3$ se trouve dans la bande passante du filtre; les autres harmoniques sont fortement atténués.

Le signal de sortie aura donc l'allure d'un **signal quasi harmonique** de pulsation ω_3 :

$$s(t) \approx -\frac{C}{9} \sin(\omega_3 t)$$



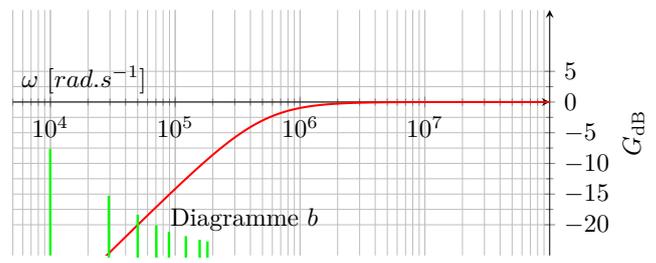
- /3 [8] On considère maintenant un signal d'entrée de forme triangulaire et de fréquence $f_t = 1590 \text{ Hz}$ envoyé sur le filtre 1.

Tracer sommairement l'allure du spectre de $e(t)$ superposé au diagramme de BODE du filtre. Prédire l'allure du signal de sortie $u_s(t)$ du filtre en argumentant votre réponse.

Réponse

On ajoute le spectre au diagramme de BODE en gain de l'énoncé (voir ci-contre, en vert ①). On constate qu'il est quasiment inclus dans la zone où le filtre à un comportement dérivateur ①.

On obtiendra donc en sortie un signal de type créneau ① (dérivé d'une fonction affine par morceaux), d'amplitude très faible (car on travaille dans la bande atténuée).



9) Finalement, on considère le signal d'entrée $e(t)$ comme un échelon de tension, tel que

$$e(t) = 0, \forall t < 0 \quad \text{et} \quad e(t) = E, \forall t \geq 0 \quad (5.2)$$

/6 a) Faire l'étude du circuit à $t = 0^-$ puis en déduire deux conditions initiales sur u_s et $\frac{du_s}{dt}$ en $t = 0^+$ dans le cas du circuit 3.

Réponse

À $t = 0^-$, on est en régime permanent et on a $u_s(0^-) = 0$ car la bobine se comporte comme un fil ①. On en déduit que $u_s(0^+) = 0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur. ①

De plus, $i_c = C \frac{du_s}{dt}$ or $i_c(0^+) \stackrel{\text{①}}{=} i_r(0^+) - i_l(0^+)$

et $i_l(0^+) \stackrel{\text{①}}{=} i_l(0^-) = e(0^-)/R = 0$ mais en $t = 0^+$ $E = Ri_r(0^+) + u_s(0^+) \Rightarrow i_r(0^+) \stackrel{\text{①}}{=} E/R$

Ainsi

$$\left(\frac{du_s}{dt} \right)_{0^+} \stackrel{\text{①}}{=} \frac{E}{RC}$$



/7 b) Déterminer alors le signal de sortie $u_s(t)$ associé au signal d'entrée défini dans l'équation (5.2) en résolvant l'équation différentielle obtenue à la question 3 b).

Si cette dernière n'a pas été trouvée; elle peut être obtenue à partir de la fonction de transfert du circuit 3 donnée dans l'équation (5.1).

Réponse

L'équation différentielle s'écrit $\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{\omega_3}{Q_3} \frac{du_s}{dt} + \omega_3^2 u_s(t) \stackrel{\text{①}}{=} 0 \quad \forall t > 0$

On a $Q_3 = 5 > 1/2$, donc on obtient un régime pseudo-périodique ① de pseudo-pulsation

$$\omega \stackrel{\text{①}}{=} \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_3 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_3^2}}$$

On pose $\tau = 2Q_3/\omega_3$, alors l'ensemble des solutions s'écrit

$$u_s(t) \stackrel{\text{①}}{=} e^{-t/\tau} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

avec A et B , deux constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales :

$$u_s(0) = 0 \Rightarrow A \stackrel{\text{①}}{=} 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{du_s}{dt} \right)_0 = \frac{E}{RC} \Rightarrow B \stackrel{\text{①}}{=} \frac{E}{RC\omega}$$

On en déduit au final

$$u_s(t) \stackrel{\text{①}}{=} \frac{E}{RC\omega} e^{-t/\tau} \sin(\omega t)$$



/64 P2 Étude d'un volant de badminton (D'après X-ENS PC 2015 Physique B)

Le badminton est un sport dans lequel les joueurs frappent un projectile, appelé volant, à l'aide d'une raquette. Le but de ce problème est de proposer une modélisation simplifiée de la trajectoire du volant sous l'effet conjugué de la pesanteur et de la résistance de l'air, et de confronter le modèle aux résultats d'une expérience. On négligera la poussée d'Archimède dans tout le problème.

On néglige dans un premier temps la force de freinage exercée par l'air.

- /7 [1] On lance depuis le sol le volant de masse m avec une vitesse initiale U_0 , dans une direction faisant un angle θ_0 avec le plan du sol, supposé horizontal. Déterminer les équations horaires du mouvement du volant.

Réponse

① \diamond **Système** : {volant} assimilé à M de masse m dans le référentiel terrestre du sol, supposé galiléen.

① \diamond **Repère** : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ avec O départ du lancer, \vec{u}_y vertical *ascendant* (voir schéma)

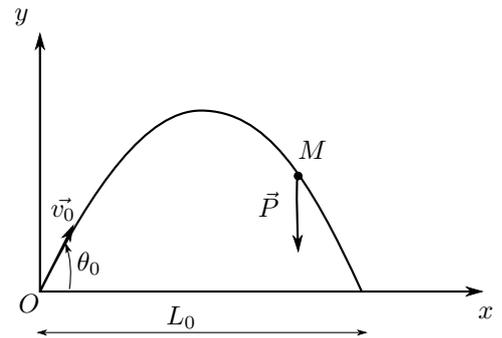
① \diamond **Repérage** : $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$, $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y$, $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y$

① \diamond **BDF** : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$

\diamond **PFD** :

$$m\vec{a}(t) = \vec{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{x}(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}(t) = -gt + U_0 \sin(\theta_0) \\ \dot{x}(t) = U_0 \cos(\theta_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(t) = -\frac{gt^2}{2} + U_0 t \sin(\theta_0) \\ x(t) = U_0 t \cos(\theta_0) \end{cases}$$



- /7 [2] Établir l'équation de la trajectoire. Comment appelle-t-on ce type de courbe ? Dessiner son allure. Déterminer la portée L_0 (distance horizontale à laquelle le volant retombe sur le sol) en fonction de U_0 , de θ_0 , et de l'accélération de la pesanteur g .

Réponse

On isole $t(x)$ ① puis on injecte :

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2U_0^2 \cos^2(\theta_0)} + x \tan(\theta_0)$$

On obtient l'équation d'une parabole ①. ① pour l'allure. On cherche ensuite $x = L_0$ tel que $y(L_0) = 0$ ① :

$$L_0 = \frac{2U_0^2 \cos(\theta_0) \sin(\theta_0)}{g} = \frac{U_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

- /5 [3] Validez dimensionnellement l'expression de L_0 obtenue et vérifiez-la sur des cas limites simples que vous choisirez. La vitesse initiale étant fixée, quel angle θ_0 permet d'envoyer le volant le plus loin possible ?

Réponse

$$\dim L_0 = \frac{\dim U_0^2}{\dim g} = \frac{L^2 \cdot T^{-2}}{L \cdot T^{-2}} = L$$

Pour $U_0 = 0$, ou pour $\theta_0 = \pi/2$, on trouve $L_0 = 0$ ce qui est cohérent. ①

L_0 est maximale quand $\sin(2\theta_0)$ ① est maximale, soit $2\theta_0 = \pi/2$, donc $\theta_0 = \pi/4$. ①

On tient maintenant compte du freinage de l'air, modélisé en assimilant le volant à une sphère solide en mouvement dans un fluide newtonien. On écrit la force de freinage sous la forme $\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S C_x U \vec{U}$, où \vec{U} est la vitesse du volant et U sa norme, ρ la masse volumique de l'air, S la surface de référence du volant, et C_x le coefficient de traînée.

- /2 [4] Déterminer la dimension de C_x .

Réponse

$$\dim C_x = \frac{\dim \vec{F}}{\dim \rho S U^2} = \frac{MLT^{-2}}{ML^{-3} \cdot L^2 \cdot L^2 T^{-2}} = 1$$

- /4 [5] Écrire l'équation différentielle vectorielle vérifiée par la vitesse \vec{U} du volant. Montrer qu'elle admet une solution vectorielle particulière, correspondant à un mouvement rectiligne uniforme dont on exprimera la norme de la vitesse, notée U_∞ , en fonction des paramètres du problème.

Réponse

On applique la loi de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{\rho S C_x}{2m} U \vec{U} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{g}$$

Le second membre étant constant, on cherche une solution particulière constante, soit

$$U_\infty \vec{U} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2m}{\rho S C_x} \vec{g} \Rightarrow U_\infty \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x}}$$



On montre alors que l'équation différentielle vérifiée par \vec{U} s'écrit :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{gU\vec{U}}{U_\infty^2} = \vec{g}$$

- /8 [6] À quelle condition sur U peut-on négliger la pesanteur ? On suppose dans toute la suite du problème que cette condition est initialement vérifiée. Dans ce cas, quelle est la nature de la trajectoire ? Intégrer l'équation du mouvement pour obtenir U en fonction du temps. On pourra introduire un vecteur unitaire simple permettant la projection en scalaire.

Réponse

On peut négliger la pesanteur si $U \gg U_\infty$ $\textcircled{1}$. L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{gU\vec{U}}{U_\infty^2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{0}$$

La trajectoire est alors rectiligne $\textcircled{1}$. On note \vec{e}_u le vecteur unitaire tangent à la trajectoire, alors $\vec{U} = U\vec{e}_u$ $\textcircled{1}$. On projette l'équation sur \vec{e}_u :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{gU^2}{U_\infty^2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0$$

C'est une équation différentielle non linéaire. On utilise la méthode de séparation des variables :

$$-\frac{dU}{U^2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{g}{U_\infty^2} dt \Rightarrow \int_{U_0}^{U(t)} -\frac{dU}{U^2} = \frac{g}{U_\infty^2} \int_0^t dt \Leftrightarrow \frac{1}{U(t)} - \frac{1}{U_0} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{g}{U_\infty^2} t \Leftrightarrow U(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{\frac{g}{U_\infty^2} t + \frac{1}{U_0}}$$



- /7 [7] En utilisant l'expression de la question précédente, déterminer et calculer le temps $t_{1/2}$ pour lequel la vitesse est égale à la moitié de la vitesse initiale. Repérer le point correspondant sur la chronophotographie de la Figure C5.1.

Vérifier, par une mesure que l'on expliquera, que la vitesse en ce point est bien approximativement la moitié de la vitesse initiale.

Réponse

$$U(t_{1/2}) = \frac{U_0}{2} \Leftrightarrow t_{1/2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{U_\infty^2}{gU_0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_\infty = 6,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ U_0 = 58 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } t_{1/2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 80 \text{ ms}$$

Cela se situe entre le point 1 et le point 2. $\textcircled{1}$

On note d la distance parcourue entre les points 0 et 1. $\textcircled{1}$ On constate que la distance entre les points 2 et 3 est environ égale à $d/2$, $\textcircled{1}$ indiquant que la vitesse au point 2 est environ la moitié de celle en 0. $\textcircled{1}$ On obtiendrait alors $t_{1/2}$ compris entre 100 ms et 150 ms. C'est du même ordre de grandeur que la valeur calculée. $\textcircled{1}$



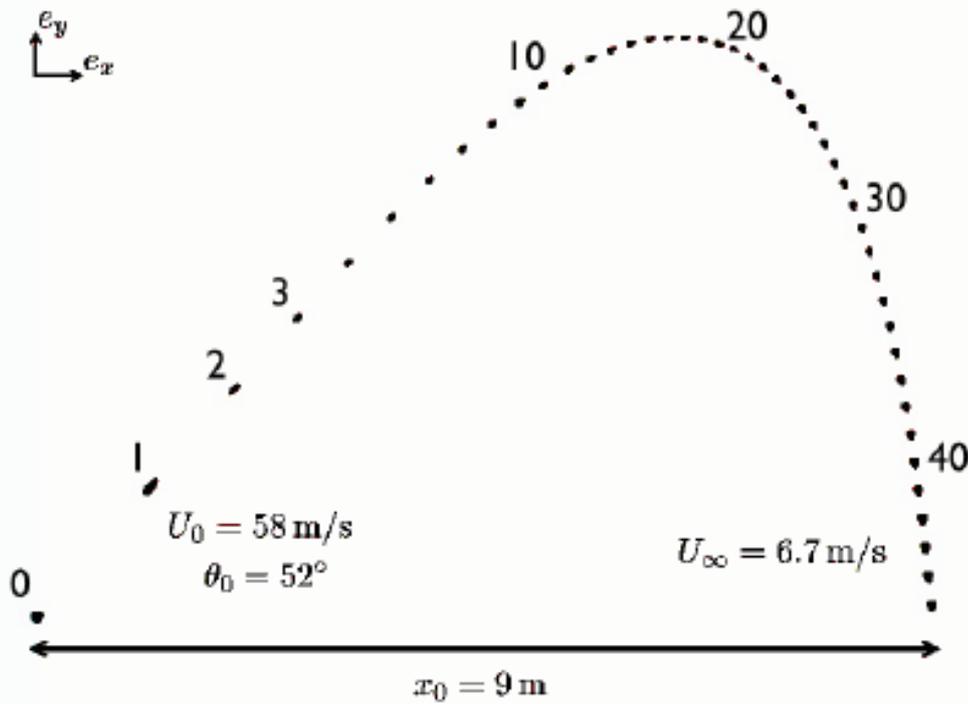


FIGURE C5.1 – Positions successives d'un volant de badminton allant de la gauche vers la droite, enregistrées toutes les 50 ms. Le premier point, repéré par le chiffre 0, correspond au lancer à $t = 0$.

/7 [8] Toujours dans le cadre de l'approximation de la question [6], déterminer l'expression donnant la distance horizontale $x(t)$ parcourue au temps t .

Réponse

La trajectoire est rectiligne faisant un angle θ_0 avec l'axe horizontal, donc

$$\frac{dx}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{U} \cdot \vec{e}_x = U(t) \cos(\theta_0) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\cos(\theta_0)}{\frac{g}{U_\infty^2} t + \frac{1}{U_0}} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = U_0 \cos(\theta_0) \cdot \frac{1}{1 + \frac{gU_0}{U_\infty^2} t}$$

On intègre :

$$\int_{t=0}^t \frac{dx}{dt} dt \stackrel{\textcircled{1}}{=} U_0 \cos(\theta_0) \int_{t=0}^t \frac{dt}{1 + \frac{gU_0}{U_\infty^2} t}$$

Change^t de variable : $t' = \frac{gU_0}{U_\infty^2} t \Rightarrow dt' \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{gU_0}{U_\infty^2} dt \Leftrightarrow dt = \frac{U_\infty^2}{gU_0} dt'$ et $t' \Big|_0^{\frac{gU_0}{U_\infty^2} t}$

Ainsi $x(t) - \underbrace{x(0)}_{=0} \stackrel{\textcircled{1}}{=} U_0 \cos(\theta_0) \cdot \frac{U_\infty^2}{gU_0} \int_{t'=0}^{t'} \frac{dt'}{1+t'} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{U_\infty^2}{g} \cos(\theta_0) [\ln(1+t') - \underbrace{\ln(1)}_{=0}]$

$$\Leftrightarrow x(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{U_\infty^2 \cos(\theta_0)}{g} \ln\left(\frac{gU_0}{U_\infty^2} t + 1\right)$$



/2 [9] Obtenir x en fonction de U .

Réponse

D'après [6], $\frac{U_0}{U(t)} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1 + \frac{gU_0}{U_\infty^2} t \Rightarrow x(U) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{U_\infty^2 \cos(\theta_0)}{g} \ln\left(\frac{U_0}{U}\right)$



/5 [10] On suppose que l'approximation de la question [6] cesse d'être valable lorsque la composante verticale de la force de freinage est égale au poids. Quelle est l'expression de U à cet instant ? En déduire la distance horizontale parcourue L .

Réponse

On cherche $\frac{\rho S C_x U^2(t_p) \sin(\theta_0) \stackrel{\textcircled{1}}{=} mg}{2}$

Or,

$$U_\infty^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2mg}{\rho S C_x} \quad \text{soit} \quad \frac{U^2(t_p)}{U_\infty^2} \sin(\theta_0) \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U(t_p) \stackrel{\textcircled{1}}{=} U_\infty}{\sqrt{\sin(\theta_0)}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L \stackrel{\textcircled{1}}{=} x(U(t_p)) = \frac{U_\infty^2 \cos(\theta_0)}{g} \ln\left(\frac{U_0 \sqrt{\sin(\theta_0)}}{U_\infty}\right)}$$



On modélise la trajectoire du volant en distinguant trois régimes successifs :

- (1) le régime que l'on vient d'étudier, durant lequel l'accélération de la pesanteur est négligeable ;
- (2) un régime intermédiaire ;
- (3) un régime limite durant lequel l'accélération du volant est négligeable.

/5 11 Localiser sur la chronophotographie le régime limite ainsi défini, en justifiant votre réponse.

Une approximation de la trajectoire consiste à oublier la partie correspondant au régime intermédiaire. Dessiner la trajectoire obtenue dans cette approximation.

Réponse

Le régime (3) correspond à un mouvement rectiligne et uniforme ①, soit après le point 38. ①

On aurait alors deux parties rectilignes. ①

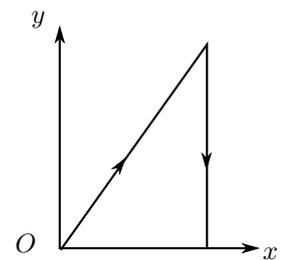


FIGURE C5.2 – ①+①



/5 12 Donner l'expression littérale de la portée du tir dans cette approximation. Estimer numériquement la portée du tir. Comparer le résultat avec la valeur indiquée sur la chronophotographie.

Réponse

C'est alors la portée trouvée précédemment ① :

$$\boxed{L \stackrel{\textcircled{1}}{=} x(U(t_p)) = \frac{U_\infty^2 \cos(\theta_0)}{g} \ln\left(\frac{U_0 \sqrt{\sin(\theta_0)}}{U_\infty}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta_0 = 52^\circ \\ U_0 = 58 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ U_\infty = 6,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \underline{L \stackrel{\textcircled{1}}{=} 5,8 \text{ m}}$$

Sur la chronophotographie, on lit $L = 9 \text{ m}$ ① ce qui est supérieur à la valeur calculée. On voit bien que le régime intermédiaire allonge la portée. ①

