Devoir maison 3 – À rendre le 24 février 2025 – Facultatif

Pendule asymétrique – corrigé

I Pendule asymétrique

1) Lorsque θ passe de 0 à une valeur positive, M descend de $z > 0$, tel que $z = R\theta$, car le fil est enroulé sur le cylindre de rayon R.

2) La masse m décrit une trajectoire circulaire de rayon ℓ telle que, en utilisant les coordonnées polaires,

$$\overrightarrow{OP_1} = \ell\overrightarrow{u_r} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{v_m} = \ell\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

Ainsi, $$\mathcal{E}_{c1} = \frac{1}{2}m{v_m}^2 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_{c1} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

La masse M décrit un mouvement de translation selon (Oz). Donc, en coordonnées cartésiennes,

$$\overrightarrow{OP_2} = z\overrightarrow{u_z} \quad \text{avec} \quad z = R\theta \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{v_M} = \dot{z}\overrightarrow{u_z} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

Ainsi, $$\mathcal{E}_{c2} = \frac{1}{2}Mv_M^2 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_{c2} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

Pour l'ensemble des deux masses,

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_{c1} + \mathcal{E}_{c2} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}(ml^2 + MR^2)\dot{\theta}^2}$$

3) On s'intéresse aux énergies potentielles de pesanteur et on sait que

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -\delta\mathcal{W}(\overrightarrow{P})$$

Pour m : $$\mathrm{d}\mathcal{E}_{p1} = -\delta\mathcal{W}(\overrightarrow{P_1}) = -\overrightarrow{P_1}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$$

Or $$\overrightarrow{P_1} = mg\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} - mg\sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \ell\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

Ainsi : $$\mathrm{d}\mathcal{E}_{p1} = [-mg\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} + mg\sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}]\cdot\ell\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} \Leftrightarrow \mathrm{d}\mathcal{E}_{p1} = mgl\sin(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p1} = -mg\ell\cos(\theta) + \mathrm{cte}_1}$$

Pour M : $$\mathrm{d}\mathcal{E}_{p2} = -\delta\mathcal{W}(\overrightarrow{P_2}) = -\overrightarrow{P_2}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$$

Or $$\overrightarrow{P_2} = Mg\overrightarrow{u_z} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$$

Ainsi : $$\mathrm{d}\mathcal{E}_{p2} = -Mg\mathrm{d}z$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p2} = -Mgz + \mathrm{cte}_2 = -MgR\theta + \mathrm{cte}_2}$$

Pour l'ensemble des deux masses, on a donc bien :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -mg\ell\cos(\theta) - MgR\theta + \mathrm{cte}}$$

4) Les positions d'équilibre sont telles que $\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta_{\mathrm{eq}}} = 0$. Or,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta} = mg\ell\sin(\theta) - MgR$$

Ainsi : $$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta_{\mathrm{eq}}} = 0 \Leftrightarrow mg\ell\sin(\theta_{\mathrm{eq}}) = MgR$$

Donc :
$$\sin(\theta_{\text{eq}}) = \frac{MR}{m\ell}$$

Or $\sin(\theta_{\text{eq}}) < 1$: on en déduit donc que θ_{eq} n'existe que si $MR < m\ell$. Donc il existe des positions d'équilibre uniquement si

$$\boxed{M < \frac{m\ell}{R} = M_0}$$

5) $\sin(\theta_{\text{eq}}) = \frac{MR}{m\ell}$ possède deux solutions :

◇ $\theta_{\text{eq1}} = \arcsin\left(\frac{MR}{ml}\right) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (1er quart de cercle trigonométrique)

◇ $\theta_{\text{eq2}} = \pi - \theta_{\text{eq1}} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ (2ème quart de cercle trigonométrique).

6) Il faut étudier les stabilités, donc étudier les signes des dérivées seconde $\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}$ en θ_{eq1} et θ_{eq2}. Or,

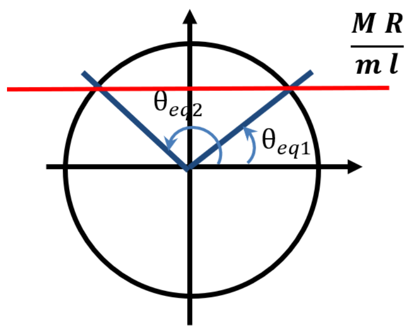
$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2} = mg\ell\cos(\theta)$$

θ_{eq1} :
$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_{\text{eq1}}} = mg\ell\cos(\theta_{\text{eq1}}) > 0 \quad \text{car} \quad \theta_{\text{eq1}} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Ainsi θ_{eq1} est une position d'équilibre stable.

θ_{eq2} :
$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_{\text{eq2}}} = mg\ell\cos(\theta_{\text{eq2}}) < 0 \quad \text{car} \quad \theta_{\text{eq2}} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

Ainsi θ_{eq2} est une position d'équilibre instable.



7) Au voisinage de chaque position d'équilibre, on peut faire un développement de TAYLOR de $\mathcal{E}_p$:

$$\mathcal{E}_p(\theta) \sim \mathcal{E}_p(\theta_{\text{eq}}) + (\theta - \theta_{\text{eq}})\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta_{\text{eq}}}}_{=0 \text{ car équilibre}} + \frac{1}{2}(\theta - \theta_{\text{eq}})^2\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_{\text{eq}}}}_{=mg\ell\cos(\theta_{\text{eq}})}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_p(\theta) \sim \mathcal{E}_p(\theta_{\text{eq}}) + \frac{1}{2}mg\ell\cos(\theta_{\text{eq}})(\theta - \theta_{\text{eq}})^2$$

Par identification avec l'expression fournie dans l'énoncé, il vient :

$$C_1 = \frac{1}{2}mg\ell\cos(\theta_{\text{eq1}})$$

Il faut supprimer $\cos(\theta_{\text{eq1}})$. On sait que $\sin(\theta_{\text{eq1}}) = \frac{MR}{m\ell}$ et $\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$; ainsi

$$C_1 = \frac{1}{2}mg\ell\sqrt{1 - \sin^2(\theta_{\text{eq1}})} = \frac{1}{2}mg\ell\sqrt{1 - \frac{M^2R^2}{m^2\ell^2}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{2}mg\ell\sqrt{1-\frac{M^2}{{M_0}^2}}}$$

Pour C_2 : $$C_2 = \frac{1}{2}mg\ell\cos\left(\theta_{\text{eq2}}\right) = -\frac{1}{2}mg\ell\sqrt{1-\sin^2\left(\theta_{\text{eq2}}\right)} = -\frac{1}{2}mg\ell\sqrt{1-\frac{M^2R^2}{m^2l^2}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C_2 = -\frac{1}{2}mgl\sqrt{1-\frac{M^2}{{M_0}^2}}}$$

On a donc bien $C_2 = -C_1$.

8) Il faut exprimer $\mathcal{E}_m$, puis utiliser le théorème de la puissance mécanique qui, pour un système conservatif, s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}) = 0$$

Or, d'après l'énoncé : $$\mathcal{E}_p(\theta) \sim \mathcal{E}_0 + C\left(\theta-\theta_{\text{eq}}\right)^2$$

De plus, d'après Q2 : $$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}(m\ell^2+MR^2)\dot{\theta}^2$$

D'où $$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_0 + C\left(\theta-\theta_{\text{eq}}\right)^2 + \frac{1}{2}(m\ell^2+MR^2)\dot{\theta}^2}$$

En dérivant : $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 2C\left(\theta-\theta_{\text{eq}}\right)\dot{\theta} + \left(m\ell^2+MR^2\right)\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

Soit $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dot{\theta}\left[2C\left(\theta-\theta_{\text{eq}}\right) + \left(m\ell^2+MR^2\right)\ddot{\theta}\right] = 0}$$

Or $\dot{\theta}$ non toujours nul, car il y a mouvement. Il faut donc que

$$\left(m\ell^2+MR^2\right)\ddot{\theta} + 2C\left(\theta-\theta_{\text{eq}}\right) = 0$$

Forme canonique : $$\ddot{\theta} + \frac{2C}{m\ell^2+MR^2}\left(\theta-\theta_{\text{eq}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2C}{m\ell^2+MR^2}\theta = \frac{2C}{m\ell^2+MR^2}\theta_{\text{eq}}}$$

9) ◇ En $\theta_{\text{eq}} = \theta_{\text{eq1}}$, $C = C_1 > 0$. L'équation différentielle est alors de la forme

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = \text{cste} \quad\text{avec}\quad {\omega_0}^2 = \frac{2C_1}{m\ell^2+MR^2}$$
$$\Rightarrow \theta\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right) + \text{cste}$$

Cette solution sinusoïdale est **bornée**.

◇ En $\theta_{\text{eq}} = \theta_{\text{eq2}}$, $C = C_2 < 0$. L'équation différentielle est alors de la forme

$$\ddot{\theta} - \omega_0^2\theta = \text{cste} \quad\text{avec}\quad \omega_0^2 = \frac{2C_1}{m\ell^2+MR^2}$$
$$\Rightarrow \theta(t) = A\mathrm{e}^{\omega_0 t} + B\mathrm{e}^{-\omega_0 t} + \text{cste}$$

Cette solution exponentielle diverge lorsque le temps tend vers l'infini, elle n'est donc **pas bornée**.

10) Les 3 courbes présentent deux tangentes horizontales, correspondant aux deux positions d'équilibres stable et instable.

- ◇ θ_{eq1} : stable ; Forme cuvette
- ◇ θ_{eq2} : instable ; Forme barrière.

Ainsi les deux positions d'équilibres existent pour les trois courbes, on a donc $M_i < M_0$ pour les trois courbes.

11) On a vu que le système était conservatif, donc $\mathcal{E}_m = \text{cste}$. Or à $t = 0$, on lit $\mathcal{E}_p(\theta = 0) = 0$ et il est précisé dans l'énoncé que la vitesse initiale est nulle, donc $\mathcal{E}_c(t = 0) = 0$. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(t = 0) = \mathcal{E}_c(0) + \mathcal{E}_p(0) = 0}$$

12) L'énergie potentielle est maximale en θ_{eq2}, c'est donc aussi la position pour laquelle l'énergie cinétique est minimale, puisque l'énergie mécanique se conserve.

- ◇ Courbe 1 : $\mathcal{E}_p(\theta_{\text{eq2}}) > 0$, donc $\mathcal{E}_p(\theta_{\text{eq2}}) > \mathcal{E}_m$. Il y a donc un domaine interdit et la barrière de potentiel ne peut pas être franchie. Le système est confiné : mouvement oscillatoire périodique ; état lié.
- ◇ Courbe 2 : $\mathcal{E}_p(\theta_{\text{eq2}}) < 0$ Donc $\mathcal{E}_c > 0$ en θ_{eq2}. État de diffusion (car non borné).
- ◇ Courbe 3 : $\mathcal{E}_p(\theta_{\text{eq2}}) = 0$. Cas limite pour lequel l'énergie cinétique s'annule en θ_{eq2}. C'est le régime qui sépare état lié et de diffusion.