Mécanique – chapitre 6

Moment cinétique pour un point matériel

Sommaire

I Moment d'une force **3**

I/A Par rapport à un point 3

I/B Par rapport à un axe orienté 4

I/C Bras de levier d'une force 5

II Moment cinétique **7**

II/A Moment cinétique par rapport à un point 7

II/B Moment cinétique par rapport à un axe orienté 8

III Théorème du moment cinétique **9**

III/A Par rapport à un point *fixe* 9

III/B Par rapport à un axe orienté *fixe* 9

III/C Application du pendule simple 10

Capacités exigibles

- ☐ Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.
- ☐ Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.
- ☐ Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.
- ☐ Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen.
- ☐ Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
- ☐ Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
- ☐ Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
- ☐ Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

L'essentiel

Définitions

- ▢ M6.1 : Moment d'une force $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ . . 3
- ▢ M6.2 : Moment axial $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ 4
- ▢ M6.3 : Droite d'action et bras de levier 5
- ▢ M6.4 : Moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M},t)$ . . . 7
- ▢ M6.5 : Moment cinétique axial $\mathcal{L}_\Delta(\mathrm{M},t)$ 8

Propriétés

- ▢ M6.1 : Moment et bras de levier 5
- ▢ M6.2 : $\mathcal{L}_\Delta$ et point O 9

Démonstrations

- ▢ M6.1 : Moment et bras de levier 6
- ▢ M6.2 : $\mathcal{L}_\Delta$ et point O 9

Théorèmes

- ▢ M6.1 : TMC vectoriel 9
- ▢ M6.2 : TMC scalaire 9

Preuves

- ▢ M6.1 : TMC vectoriel 9
- ▢ M6.2 : TMC scalaire 10

Interprétations

- ▢ M6.1 : Sens d'un moment 3
- ▢ M6.2 : Signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ 4
- ▢ M6.3 : Moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M},t)$ . . . 8
- ▢ M6.4 : Signe de $\mathcal{L}_\Delta(\mathrm{M},t)$ 9

Applications

- ▢ M6.1 : Moment du poids 4
- ▢ M6.2 : Moments par 2 méthodes 6
- ▢ M6.3 : Trois forces pour un mouvement 7
- ▢ M6.4 : Pendule simple par TMC 10

Outils

- ▢ M6.1 : Méthode du bras de levier . . . 6

Erreurs communes

- ▢ M6.1 : Bonne pratique 4
- ▢ M6.2 : Moment axial $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ 4
- ▢ M6.3 : Moment vecteur et moment scalaire 9

I Moment d'une force

I/A Par rapport à un point

Observation M6.1 : Rotation d'une planche

Lorsqu'une masse m est placée à distance d'un point « pivot », cette masse **génère une rotation**.

- ◇ On peut compenser cette rotation en mettant une **même masse** à la **même distance** de l'autre côté.
- ◇ On peut compenser cette rotation en mettant une **masse plus grande** à une **distance faible plus** loin du pivot.
- ◇ Ainsi l'effet est **proportionnel à la distance au pivot**.

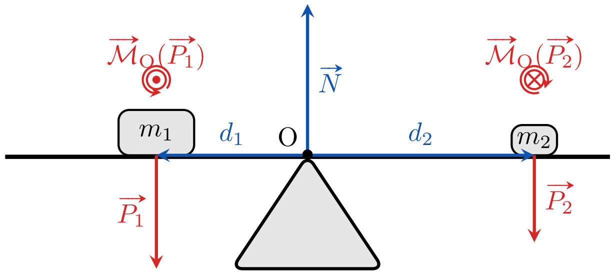


FIGURE M6.1

Définition M6.1 : Moment d'une force $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{F})$

Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée au point M par rapport à un point O est le **vecteur** :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{F}}$$

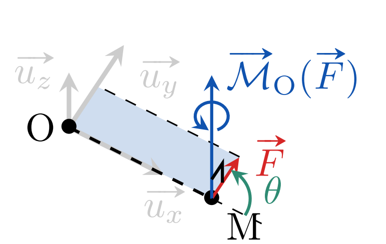
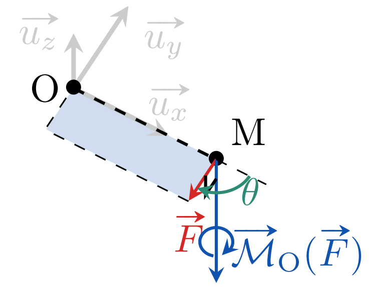
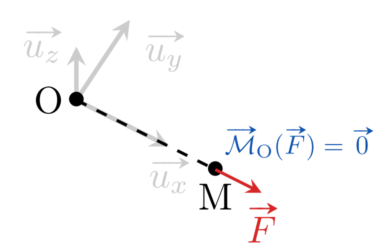
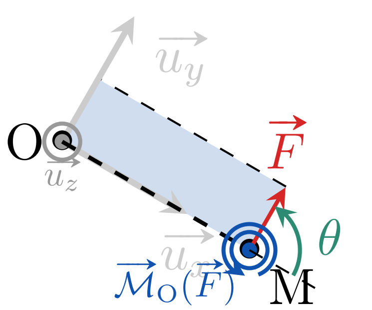
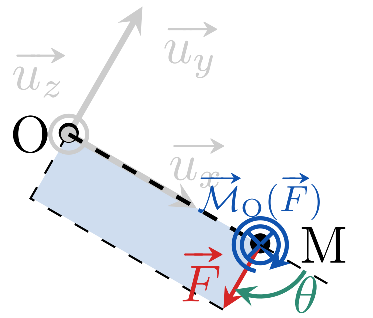
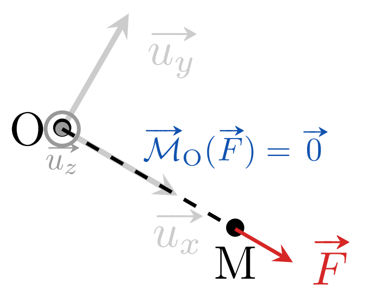
Unité

J = N·m

Interprétation M6.1 : Sens d'un moment

Le **sens** de $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{F})$ indique la manière dont la force $\overrightarrow{F}$ a tendance à faire tourner M autour de O, et est donné par la **règle de la main droite**. Avec $\overrightarrow{u_z}$ ascendant,

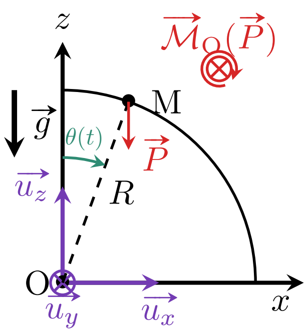
- ◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{F}) \parallel +\overrightarrow{u_z}$, $\overrightarrow{F}$ fait tourner M dans le **sens direct**
- ◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{F}) \parallel -\overrightarrow{u_z}$, $\overrightarrow{F}$ fait tourner M dans le **sens horaire**
- ◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{F}$ ne fait pas tourner M par rapport à O.

	Direct	**Horaire**	**Nul**
3D			
2D			

♥ Application M6.1 : Moment du poids

Un véhicule assimilé à un point matériel M de masse m se déplace de haut en bas d'une colline ; la trajectoire est assimilée à un quart de cercle vertical de centre O et de rayon R. On note θ l'angle que fait OM avec la verticale.

Calculer le moment du poids par rapport à O.



Pour calculer le moment d'une force, on décompose ladite force et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ **dans la même base**. Ici, le poids s'exprime en coordonnées cartésiennes : on projette donc la position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans le repère cartésien. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg\,\vec{u_z} \\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = R\vec{u_r} = R(\cos(\theta(t))\,\vec{u_z} + \sin(\theta(t))\,\vec{u_x}) \end{cases}$$

On peut donc calculer le moment du poids :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{P}) &= \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \wedge \vec{P} \\ &= -mgR(\cos(\theta(t))\,\vec{u_z} + \sin(\theta(t)\vec{u_x}) \wedge \vec{u_z} \\ &= -mgR\cos(\theta(t))\,\underbrace{\vec{u_z} \wedge \vec{u_z}}_{=\vec{0}} \\ &\quad - mgR\sin(\theta(t))\,\underbrace{\vec{u_x} \wedge \vec{u_z}}_{=-\vec{u_y}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{P}) = +mgR\sin(\theta(t))\vec{u_y}}$$

♥ Attention M6.1 : Bonne pratique

On vérifie **systématiquement** que la direction du moment calculé donne bien le sens de rotation attendu avec la règle de la main droite.

I/B Par rapport à un axe orienté

On peut directement s'intéresser à la **projection** d'un moment.

♥ Définition M6.2 : Moment axial $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

Le moment d'une force par rapport à un axe orienté Δ est le **scalaire** défini par :

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u_\Delta} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) \cdot \vec{u_\Delta}}$$

avec O un point de l'axe Δ. $\mathcal{M}_\Delta$ est donc le **projeté** du moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ sur l'axe Δ.

♥ Attention M6.2 : Moment axial $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

1) $\mathcal{M}_\Delta$ est un **scalaire** puisqu'il est issu d'un **produit scalaire**.

2) $\mathcal{M}_\Delta$ ne dépend pas du point O considéré.

♥ Interprétation M6.2 : Signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

Cette fois-ci c'est le **signe** de $\mathcal{M}_\Delta$ qui indique le **sens de rotation** par rapport à l'axe orienté :

◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F}) > 0$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le **sens direct** par rapport à l'orientation de Δ

◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F}) < 0$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le **sens horaire** par rapport à l'orientation de Δ

◇ Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F}) = 0$, $\vec{F}$ ne fait pas tourner M par rapport à Δ.

I/C Bras de levier d'une force

Définition M6.3 : Droite d'action et bras de levier

Pour calculer le moment d'une force $\vec{F}$ exercée en un point M par rapport à un axe orienté Δ (souvent $(\mathrm{O},\vec{u_z})$), on décompose $\vec{F}$ en deux composantes :

◇ L'une parallèle à l'axe Δ, notée $\vec{F_\parallel}$

◇ L'une dans le plan perpendiculaire à l'axe Δ, notée $\vec{F_\square}$

◇ On a ainsi $\boxed{\vec{F} = \vec{F_\parallel} + \vec{F_\square}}$.

Droite d'action

C'est la droite qui a **même direction** que la force et qui **passe par son point d'application**.

Bras de levier

C'est la **distance** $d = \mathrm{OH}$ entre l'axe Δ et le **projeté orthogonal H** de O sur la **droite d'action de** $\vec{F_\square}$

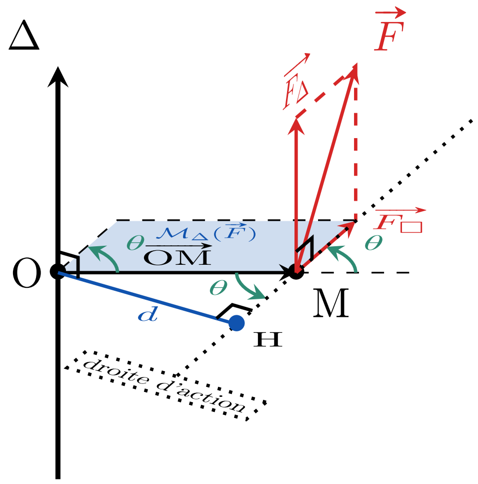


Figure M6.2 – Vue 3D

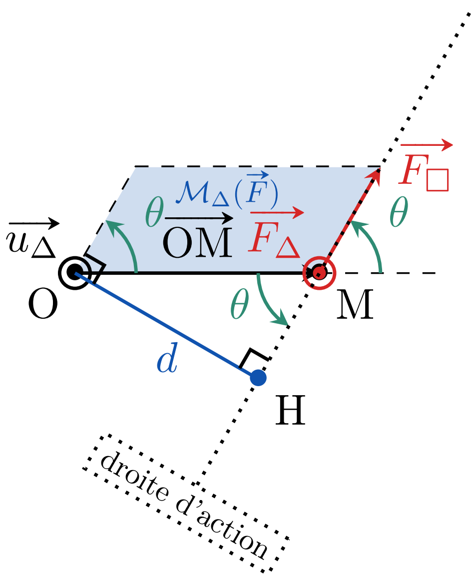


Figure M6.3 – Vue 2D

Propriété M6.1 : Moment et bras de levier

Soit M un point matériel, Δ un axe orienté et $\vec{F}$ quelconque, telle que $\vec{F} = \vec{F_\Delta} + \vec{F_\square}$.

1) La force $\vec{F_\Delta}$ ne fait pas tourner M autour de Δ : $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F_\Delta}) = 0}$

2) La force $\vec{F_\square}$ fait tourner M selon son bras de levier : $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F_\square}) = \pm d \|\vec{F_\square}\|}$

On détermine le signe en regardant **schématiquement** dans quel sens $\vec{F_\square}$ fait tourner M.

Démonstration M6.1 : Moment et bras de levier

On commence par déterminer le moment de la force par rapport au point O de l'axe, puis on projettera par produit scalaire avec $\overrightarrow{u_\Delta}$. On a donc :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge (\vec{F}_\Delta + \vec{F}_\square)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}_\Delta}_{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_\Delta)} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}_\square}_{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_\square)}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overbrace{\underbrace{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_\Delta)}_{\perp \overrightarrow{u_\Delta}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}^{=0}$$
$$+ \left(\mathrm{OM}\|\vec{F}_\square\| \sin(\theta)\overrightarrow{u_\Delta}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \underbrace{\mathrm{OM}\sin(\theta)}_{\pm d} \left\|\vec{F}_\square\right\|}$$

■

Exemple M6.1 : Cas de nullité

- ◇ $\vec{F} \parallel \overrightarrow{\mathrm{OM}} \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta = 0$
- ◇ $\vec{F} \parallel \overrightarrow{u_\Delta} \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta = 0$
- ◇ $d = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta = 0$

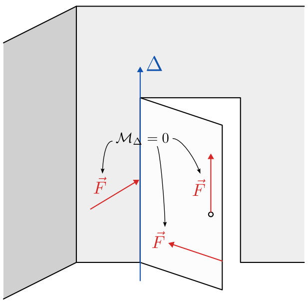


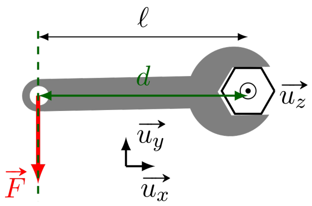
Figure M6.4 – Moments nuls

Outils M6.1 : Méthode du bras de levier

1) **Identifier** l'axe de rotation Δ et le point O dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{u_\Delta}$ passant par M ;
2) (Optionnel) **Projeter** $\vec{F}$ dans ce plan perpendiculaire pour avoir $\vec{F}_\square$ si nécessaire ;
3) **Tracer** la droite d'action, passant par M et dirigée par $\vec{F}_\square$;
4) **Placer** le point H et calculer géométriquement d ;
5) **Identifier** le sens de rotation avec la règle de la main droite.

Application M6.2 : Moments par 2 méthodes

Déterminer le moment des forces sur les systèmes suivants par les deux méthodes présentées : calcul direct et bras de levier.

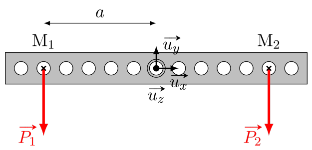


Calcul direct

$$\vec{F} = -F\overrightarrow{u_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\ell\overrightarrow{u_x} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} = \ell F \overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = \ell F \overrightarrow{u_z}$$
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{F}) = \ell F}$$

Bras de levier

$d = \ell$ et rotation sens direct selon $\overrightarrow{u_z}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{F}) = +\ell F}$



Calcul direct

$$\vec{P}_1 = -mg\vec{u_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}_1 = -a\vec{u_x}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{P}_1 = (-a) \times (-mg)\vec{u_x} \wedge \vec{u_y} = mga\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}_1) = mga} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}_2) = -mga}$$

Bras de levier

$$d_1 = d_2 = a \quad \text{et} \quad \text{sens direct pour 1, horaire pour 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}_1) = mga} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}_2) = -mga}$$

Application M6.3 : Trois forces pour un mouvement

On considère trois forces, de normes égales à F, exercées sur une porte pour l'ouvrir. Laquelle est la plus efficace ? Justifier à l'aide du bras de levier.

1) La première force créé un moment

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_1) = d_1 F$$

2) La deuxième force créé un moment

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_2) = d_2 F > d_1 F$$

3) La troisième force créé un moment

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_3) = d_3 F = d_2\cos(\theta) F < d_2 F$$

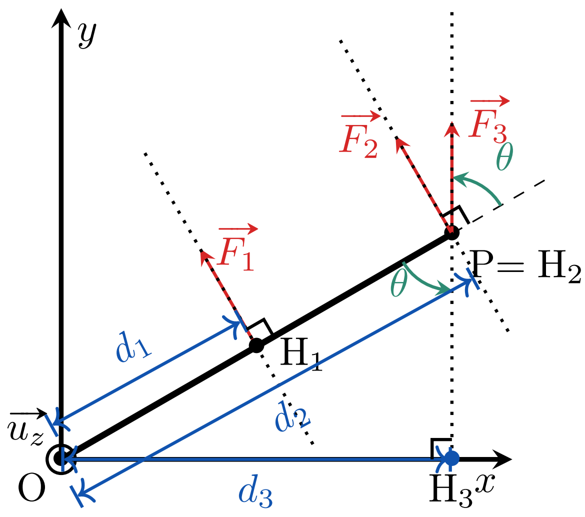


Figure M6.5 – Schéma

C'est donc $\boxed{\vec{F}_2}$ qui est la plus efficace.

II Moment cinétique

II/A Moment cinétique par rapport à un point

Définition M6.4 : Moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M},t)$

Le moment cinétique d'un point M par rapport à un point O dans le référentiel $\mathcal{R}$ est le **vecteur** :

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M},t) = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \wedge m\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)}$$

Il traduit la « quantité de rotation » d'un point matériel.

Unité

N·m·s = J·s

Interprétation M6.3 : Moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M},t)$

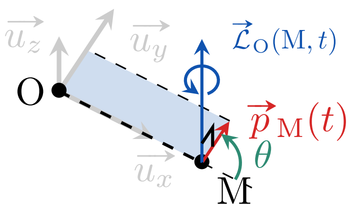
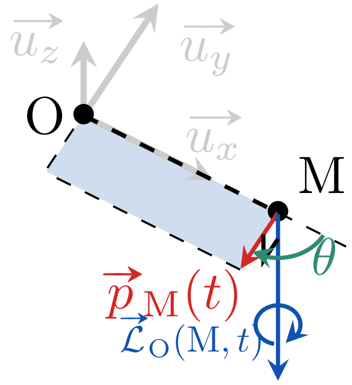
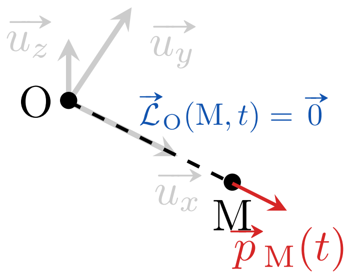
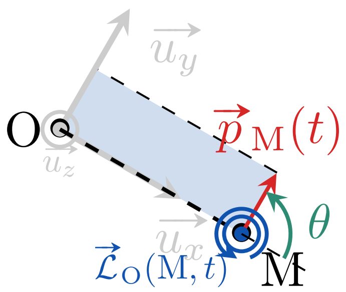
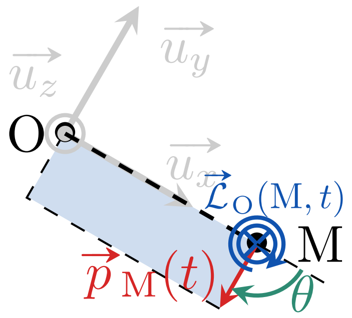
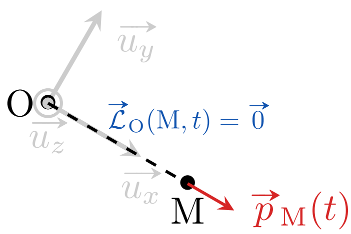
◇ Considérons un repère polaire autour de l'axe (Oz). On a alors

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = r(r)\overrightarrow{u_r} \\ \vec{v}(t) = \dot{r}(t)\overrightarrow{u_r} + r(t)\omega(t)\overrightarrow{u_\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M},t) &= (r(t)\overrightarrow{u_r}) \wedge m(\dot{r}(t)\overrightarrow{u_r} + r(t)\omega(t)\overrightarrow{u_\theta}) \\ &= mr^2(t)\omega(t)\overrightarrow{u_z} \end{aligned}$$

Ainsi, **le moment cinétique ne conserve une information que sur la rotation du système**. Si celui-ci est nul tout le temps, soit il n'y a pas de mouvement, soit le vecteur vitesse et le vecteur position sont colinéaires et le mouvement est rectiligne.

◇ La **direction** de $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}$ indique la manière dont M tourne autour de O. Pour $\overrightarrow{u_z}$ ascendant,

- ▷ Si $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M},t) \parallel +\overrightarrow{u_z}$, M tourne dans le **sens direct**
- ▷ Si $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M},t) \parallel -\overrightarrow{u_z}$, M tourne dans le **sens horaire**
- ▷ Si $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \vec{0}$, M ne tourne pas M par rapport à O.

	Direct	**Horaire**	**Nul**
3D			
2D			

II/B Moment cinétique par rapport à un axe orienté

Définition M6.5 : Moment cinétique axial $\mathcal{L}_\Delta(\mathrm{M},t)$

Le moment cinétique d'un point M par rapport à un axe orienté Δ dans $\mathcal{R}$ est le **scalaire** :

$$\boxed{\mathcal{L}_\Delta(\mathrm{M}) = \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = (\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

avec O un point de l'axe. $\mathcal{L}_\Delta$ est le projeté du moment $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}$ sur Δ.

Interprétation M6.4 : Signe de $\mathcal{L}_\Delta(\mathrm{M},t)$

Cette fois-ci aussi, c'est le **signe** de $\mathcal{L}_\Delta$ qui indique le sens de rotation de M autour de l'axe.

Attention M6.3 : Moment vecteur et moment scalaire

$\mathcal{L}_\Delta$ est un scalaire, alors que $\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O}$ est un vecteur !

Propriété M6.2 : $\mathcal{L}_\Delta$ et point O

$\mathcal{L}_\Delta$ est indépendant du point O de l'axe Δ.

Démonstration M6.2 : $\mathcal{L}_\Delta$ et point O

$$\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}'/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \left[(\overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}) \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}\right] \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \overbrace{(\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{O'O}}}_{\parallel \overrightarrow{u_\Delta}} \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}^{=0} + \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

III Théorème du moment cinétique

III/A Par rapport à un point *fixe*

Théorème M6.1 : du moment cinétique par rapport à un point *fixe*

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces extérieures $\vec{F}_i$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen et O un point **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_\mathrm{O}(\vec{F}_i)}$$

Preuve M6.1 : TMC vectoriel

Il suffit ici d'appliquer $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge$ ou de partir du résultat.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{p}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \overbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}}_{\parallel \vec{v}} \wedge \underbrace{\vec{p}}_{\parallel \vec{v}}}^{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}_{=\sum_i \vec{F}_i}$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_\mathrm{O}(\vec{F}_i)} \quad \blacksquare$$

III/B Par rapport à un axe <u>orienté</u> *fixe*

Théorème M6.2 : du moment cinétique par rapport à un axe <u>orienté</u> *fixe*

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces extérieures $\vec{F}_i$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen et Δ un axe orienté **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\Delta(\mathrm{M},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)}$$

Preuve M6.2 : TMC scalaire

On projette simplement le TMC version vectorielle sur $\overrightarrow{u_\Delta}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\Delta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\Delta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} + 0 = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{F}_i) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \\
\Leftrightarrow & \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F}_i)}
\end{aligned}$$

■

III/C Application du pendule simple

Application M6.4 : Pendule simple par TMC

1 **Système** : {masse M} dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen

2 **Schéma.**

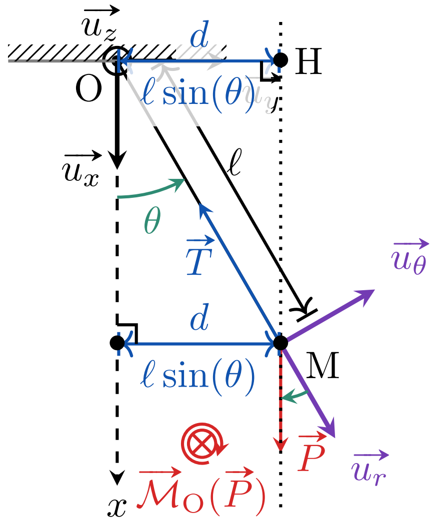


Figure M6.6 – Schéma.

3 **Modélisation.**

◇ **Repère** : $(\mathrm{O},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z})$.

◇ **Repérage** :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= \underbrace{\ell}_{=\text{cte}}\overrightarrow{u_r} \\
\overrightarrow{v}(t) &= \ell\dot{\theta}(t)\overrightarrow{u_\theta} \\
\overrightarrow{a}(t) &= -\ell\dot{\theta}^2(t)\overrightarrow{u_r} + \ell\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{u_\theta}
\end{aligned}$$

◇ **Conditions initiales** : $\theta(0) = \theta_0 \quad$ et $\quad \dot{\theta}(0) = 0$

4 **Bilan des forces.**

Poids $\quad \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg\left(\cos(\theta(t))\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta(t))\overrightarrow{u_\theta}\right)$

Tension $\quad \overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_r}$

5 **Calcul des moments.**

$$\begin{cases}
\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{P}) = (\ell\overrightarrow{u_r}) \wedge mg(\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}) = -mg\ell\sin(\theta(t))\overrightarrow{u_z} \\
\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{T}) = (\ell\overrightarrow{u_r}) \wedge (-T\overrightarrow{u_r}) = \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M}) = (\ell\overrightarrow{u_r}) \wedge (m\ell\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) = m\ell^2\dot{\theta}(t)\overrightarrow{u_z}
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_z(\overrightarrow{P}) = -mg\ell\sin(\theta(t))} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{M}_z(\overrightarrow{T}) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{L}_z(\mathrm{M}) = m\ell^2\dot{\theta}(t)}$$

6 **TMC** :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \mathcal{M}_i \\
\Leftrightarrow m\ell^2\ddot{\theta}(t) &= -mg\ell\sin(\theta(t)) + 0 \\
\Leftrightarrow & \boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = 0}
\end{aligned}$$

■