Mécanique – chapitre 7

Mouvement à force centrale conservative

Sommaire

I Forces centrales conservatives . . . 3
I/A Force centrale . . . 3
I/B Force centrale conservative . . . 3
I/C Forces newtonienne . . . 3
II Conservation du moment cinétique . . . 5
II/A Présentation . . . 5
II/B Conséquence : mouvement plan . . . 5
II/C Conséquence : loi des aires . . . 6
III Étude des trajectoires . . . 6
III/A Énergie potentielle effective . . . 6
III/B Cas attractif . . . 7
III/C Cas répulsif . . . 9
IV Mécanique céleste . . . 9
IV/A Qu'est-ce qu'une ellipse ? . . . 9
IV/B Lois de Kepler . . . 10
IV/C Cas particulier du mouvement circulaire et généralisation . . . 10
V Satellite en orbite terrestre . . . 12
V/A Vitesses cosmiques . . . 12
V/B Satellites artificiels . . . 13

Capacités exigibles

- ☐ Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.
- ☐ Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.
- ☐ Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.
- ☐ Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique et les conséquences de cette conservation : mouvement plan, loi des aires.
- ☐ Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement.
- ☐ Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.
- ☐ Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective.
- ☐ Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.
- ☐ Établir quand le mouvement est uniforme et déterminer sa période.
- ☐ Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
- ☐ Exprimer l'énergie mécanique pour les mouvements circulaire et elliptique (en fonction du demi-grand axe).
- ☐ Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions ; déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

L'essentiel

Propriétés

- M7.1 : $\mathcal{E}_p$ force centrale 3
- M7.2 : Énergie potentielle newtonienne 4
- M7.3 : Conservation du moment cinétique 5
- M7.4 : Énergie potentielle effective . . . 6
- M7.5 : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ newtonienne et cas attractif 7
- M7.6 : Caractéristiques en P ou A . . . 9
- M7.7 : 1re vitesse cosmique 12
- M7.8 : 2nde vitesse cosmique 12
- M7.9 : Satellite géostationnaire 13

Démonstrations

- M7.1 : Énergie potentielle d'une FCC . 3
- M7.2 : $\mathcal{E}_{p,\text{grav}}$ et $\mathcal{E}_{p,\text{elec}}$ 4
- M7.3 : Conservation du moment cinétique 5
- M7.4 : Mouvement plan 5
- M7.5 : Loi des aires 6
- M7.6 : Énergie potentielle effective . . . 7
- M7.7 : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ attractive 7
- M7.8 : Démonstration vitesse circulaire 11
- M7.9 : T_{cercle} 11
- M7.10 : $\mathcal{E}_{m,c}$ 11
- M7.11 : Première vitesse cosmique . . . 12
- M7.12 : Seconde vitesse cosmique . . . 12
- M7.13 : Satellite géostationnaire 14

Définitions

- M7.1 : Force centrale 3
- M7.2 : Force newtonienne 3
- M7.3 : Ellipse 9
- M7.4 : 1re vitesse cosmique 12
- M7.5 : 2nde vitesse cosmique 12
- M7.6 : Satellite géostationnaire 13
- M7.7 : Satellite de positionnement . . . 14
- M7.8 : Satellites circumpolaires 15

Lois

- M7.1 : de Kepler 10

Corollaires

- M7.1 : Mouvement plan 5
- M7.2 : Constante et loi des aires 6

Applications

- M7.1 : Troisième loi de Kepler 10

Points importants

- M7.1 : Trajectoires cas attractif 7
- M7.2 : Trajectoires cas répulsif 9
- M7.3 : Vitesse des orbites circulaires . . 10
- M7.4 : Période circulaire 11
- M7.5 : $\mathcal{E}_m$ circulaire 11

Erreurs communes

- M7.1 : Constantes dans les $\mathcal{E}_p$ 3
- M7.2 : Vitesse des orbites elliptiques . . 11
- M7.3 : Jours solaire et sidéral 13

I Introduction

I/A Force centrale

♥ Définition M7.1 : Force centrale

Une force $\vec{F}$ est dite **centrale** s'il existe un point O fixe (dans $\mathcal{R}$) tel que $\vec{F}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ pour tout point M ; O est alors appelé **centre de force**. Autrement dit,

$$\vec{F} \quad \text{centrale} \quad \Leftrightarrow \boxed{\vec{F} \parallel \overrightarrow{\mathrm{OM}}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{F} = F(\mathrm{M},t)\vec{u_r}}$$

I/B Force centrale conservative

♥ Propriété M7.1 : $\mathcal{E}_p$ force centrale

L'énergie potentielle d'une force centrale conservative ne dépend que de r et t :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{centrale}}(r,\cancel{\theta},\cancel{z},t)}$$

♥ Démonstration M7.1 : Énergie potentielle d'une FCC

Plaçons-nous dans le plan contenant $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans un repère polaire centré en O, avec $\vec{F} = F(\mathrm{M},t)\,\vec{u_r}$. On a alors deux méthodes :

Utilisation du travail

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -\delta\mathcal{W}(\vec{F}) = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}\mathcal{E}_p = -F\,\underbrace{\vec{u_r}}_{=1}\cdot(\mathrm{d}r\,\vec{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\underbrace{\vec{u_\theta}}_{=0} + \mathrm{d}z\,\underbrace{\vec{u_z}}_{=0})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r} = -F(\mathrm{M},t)}$$

Utilisation du gradient

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F(\mathrm{M},t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial\mathcal{E}_p}{\partial r} \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\mathcal{E}_p}{\partial\theta} \\ -\dfrac{\partial\mathcal{E}_p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\mathcal{E}_p}{\partial z} = 0 = \frac{\partial\mathcal{E}_p}{\partial\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\mathcal{E}_p}{\partial r} = -F(\mathrm{M},t)$$

Ainsi, $\mathcal{E}_p$ ne dépend ni de θ ni de z, donc dépend uniquement des variables r et t. ■

♥ Attention M7.1 : Constantes dans les $\mathcal{E}_p$

Les énergies potentielles sont toujours définies à une constante près, qu'il convient de déterminer !

I/C Forces newtonienne

♥ Définition M7.2 : Force newtonienne

Une force **newtonienne** est une **force centrale conservative** de la forme

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{k}{r^2(t)}\,\vec{u_r}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{force attractive} \\ k < 0 \Rightarrow \text{force répulsive} \end{cases}$$

Force gravitationnelle

$$\vec{F}_g = -\mathcal{G}\frac{m_O m}{r^2(t)}\vec{u_r} \quad \Rightarrow \quad k = \mathcal{G}m_O m$$

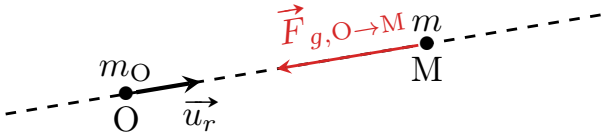


Figure M7.1 – $\vec{F_g}$

Force coulombienne

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_O}{r^2(t)}\vec{u_r} \quad \Rightarrow \quad k = -q_O q/4\pi\varepsilon_0$$

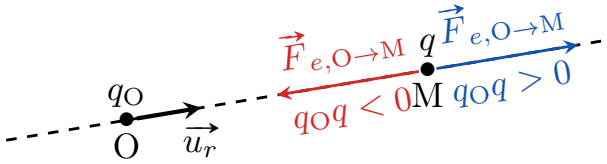


Figure M7.2 – $\vec{F_e}$

♥ Propriété M7.2 : Énergie potentielle newtonienne

L'énergie potentielle d'une force newtonienne s'écrit

$$\mathcal{E}_{p,\text{newt}}(r,t) = -\frac{k}{r(t)} + K$$

En fixant par convention $\mathcal{E}_p(+\infty) = 0$, on obtient :

Interaction gravitationnelle

$$\mathcal{E}_{p,\text{g}}(r,t) = -\mathcal{G}\frac{m_O m}{r(t)}$$

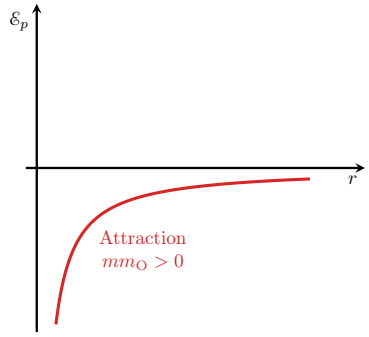


Figure M7.3 – $\mathcal{E}_{p,\text{g}}(r,t)$

Interaction électrostatique

$$\mathcal{E}_{p,\text{e}}(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_O}{r(t)}$$

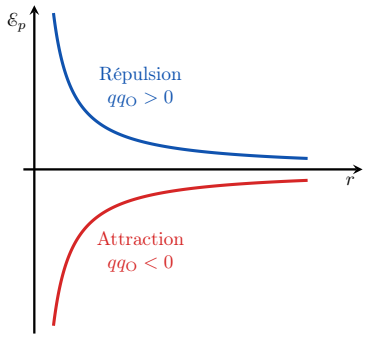


Figure M7.4 – $\mathcal{E}_{p,\text{e}}(r,t)$

♥ Démonstration M7.2 : $\mathcal{E}_{p,\text{grav}}$ et $\mathcal{E}_{p,\text{elec}}$

Interaction gravitationnelle

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{p,\text{g}}}{\partial r} = \mathcal{G}\frac{m_O m}{r^2(t)}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,\text{g}}(r,t) = -\mathcal{G}\frac{m_O m}{r(t)} + K$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,\text{g}}(r,t) = -\mathcal{G}\frac{m_O m}{r(t)}}$$

Interaction électrostatique

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{p,\text{e}}}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_O}{r^2(t)}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,\text{e}}(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_O}{r(t)} + K$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,\text{e}}(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_O}{r(t)}}$$

II Conservation du moment cinétique

II/A Présentation

♥ Propriété M7.3 : Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un système soumis uniquement à $\vec{F}$ centrale conservative se conserve :

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_O(M,t) = \overrightarrow{cte} \Leftrightarrow \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{0}}$$

♥ Démonstration M7.3 : Conservation du moment cinétique

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}(t) \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Or $$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} \overset{TMC}{=} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$ ■

II/B Conséquence : mouvement plan

♥ Corollaire M7.1 : Mouvement plan

La conservation du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O fixe dans $\mathcal{R}$ implique que le mouvement **se fait dans le plan défini par** $\overrightarrow{OM}(0)$ et $\vec{v}(0)$.

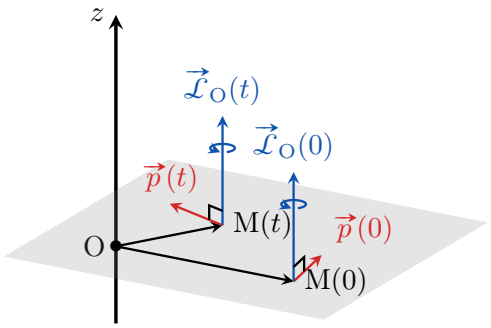


Figure M7.5 – Mouvement plan

♥ Démonstration M7.4 : Mouvement plan

Soit $\vec{u_z}$ la direction initale du moment cinétique, c'est-à-dire

$$\vec{\mathcal{L}}(0) = \overrightarrow{OM}(0) \wedge m\vec{v}(0) = \mathcal{L}_0\vec{u_z}$$

$\vec{u_z}$ définit donc une direction perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}(0)$ et $\vec{v}(0)$. Or, comme $\vec{\mathcal{L}}$ se conserve, on a

$$\vec{\mathcal{L}}(t) = \vec{\mathcal{L}}(0) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(t) \wedge m\vec{v}(t) = \mathcal{L}_0\vec{u_z}$$

donc $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ **restent orthogonaux** à $\vec{u_z}$. Autrement dit, **le mouvement reste dans le plan $\perp$ à $\vec{u_z}$ passant par O**. ■

Remarque M7.1 : Nullité du moment cinétique

Si $\overrightarrow{OM}(0)$ et $\vec{v}(0)$ sont colinéaires, alors $\vec{\mathcal{L}}(0)$ est nul, et reste donc nul à tout instant : $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ restent colinéaires, et le mouvement est alors simplement rectiligne.

II/C Conséquence : loi des aires

♥ Corollaire M7.2 : Constante et loi des aires

L'aire balayée $\mathrm{d}\mathcal{A}$ par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en un temps $\mathrm{d}t$ est constante, telle que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{2}}$$

avec $\boxed{C = mr^2(t)\left|\dot{\theta}(t)\right| = \frac{\left\|\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}\right\|}{m}}$

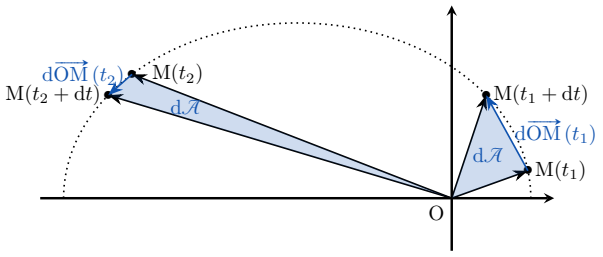


Figure M7.6 – Loi des aires.

♥ Démonstration M7.5 : Loi des aires

La norme du moment cinétique quantifie l'aire balayée $\mathrm{d}\mathcal{A}$ pendant un temps $\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\| \\
\Leftrightarrow \mathrm{d}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{v}\,\mathrm{d}t\right\| \qquad \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{v}\,\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \mathrm{d}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\underbrace{\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{v}\right\|}_{=\left\|\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}\right\|}\frac{\mathrm{d}t}{m} \qquad \times\tfrac{m}{m} \\
\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\left\|\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}\right\|}{2m} = \frac{C}{2}} & \qquad \div\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

■

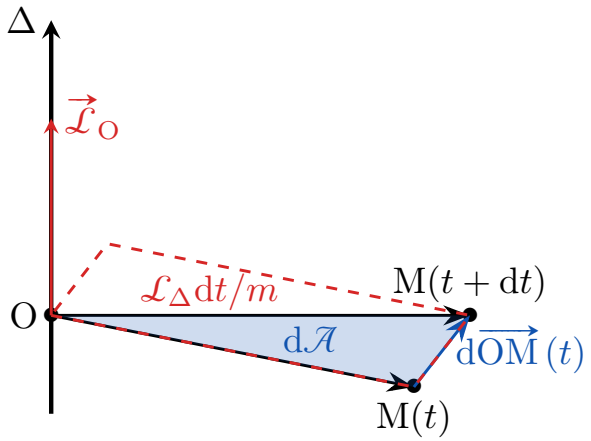


Figure M7.7 – Aire balayée.

De plus, le mouvement étant plan, on peut se placer en coordonnées polaires et calculer $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = r(r)\vec{u_r} \\ \vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{u_r} + r(t)\omega(t)\vec{u_\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M},t) &= (r(t)\vec{u_r}) \wedge m(\dot{r}(t)\vec{u_r} + r(t)\omega(t)\vec{u_\theta}) \\ &= mr^2(t)\omega(t)\vec{u_z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\|\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}\right\| = mr^2(t)\left|\dot{\theta}(t)\right| \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{\left\|\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}\right\|}{m} = r^2(t)\left|\dot{\theta}(t)\right|}$$

III Étude des trajectoires

III/A Énergie potentielle effective

♥ Propriété M7.4 : Énergie potentielle effective

L'énergie mécanique d'un point matériel M soumis à une force centrale conservative est constante, et peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{E}_m(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t) + \mathcal{E}_{p,\mathrm{eff}}(r,t) = \mathrm{cte} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\mathcal{E}_{p,\mathrm{eff}}(r,t) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2(t)} + \mathcal{E}_p(r,t)}$$

♥ Démonstration M7.6 : Énergie potentielle effective

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} \overset{\text{TPM}}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_m(\mathrm{M}) = \text{cte} = \mathcal{E}_c(\mathrm{M},t) + \mathcal{E}_p(r,t)$$
Or $$v^2(t) = \dot{r}^2(t) + (r(t)\dot{\theta}(t))^2$$
$$\Rightarrow \mathcal{E}_c(\mathrm{M},t) = \frac{1}{2}m\dot{r}(t)^2 + \frac{1}{2}mr^2(t)\dot{\theta}^2(t)$$

Or $C = r^2(t)\left|\dot{\theta}(t)\right| \Leftrightarrow \boxed{\left|\dot{\theta}(t)\right| = C/r^2(t)}$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}mr^2(t)\dot{\theta}^2(t) = \frac{1}{2}m\cancel{r^2(t)}\frac{C^2}{\cancel{r^4}(t)}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t) + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2(t)} + \mathcal{E}_p(r,t)}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r,t)}}$$
■

Interprétation M7.1 : Énergie potentielle effective

L'énergie potentielle effective permet de se ramener à l'étude d'une seule dimension, ici r la distance au centre de force, plutôt que d'utiliser à la fois r et θ, en considérant $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ comme l'énergie potentielle du système et $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ son énergie cinétique.

III/B Cas attractif

♥ Propriété M7.5 : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ newtonienne et cas attractif

Si $\vec{F}$ newtonienne, $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r,t) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2(t)} - \frac{k}{r(t)}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r,t) \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty \\ \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r,t) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

De plus, pour $k > 0$, $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ présente un minimum en $r_{\min}$ tel que :

$$\boxed{r_{\min} = \frac{mC^2}{k}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_{\min}) = -\frac{k^2}{2mC^2} = -\mathcal{E}_0}$$

♥ Démonstration M7.7 : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ attractive

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r}\right)_{r_{\min}} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m\left(-2\frac{C^2}{r_{\min}^3}\right) + \frac{k}{r_{\min}^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow -mC^2 + kr_{\min} = 0$$
$$\Leftrightarrow r_{\min} = \frac{mC^2}{k}$$
Ainsi $$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_{\min}) = -\frac{k^2}{2mC^2} = -\mathcal{E}_0$$

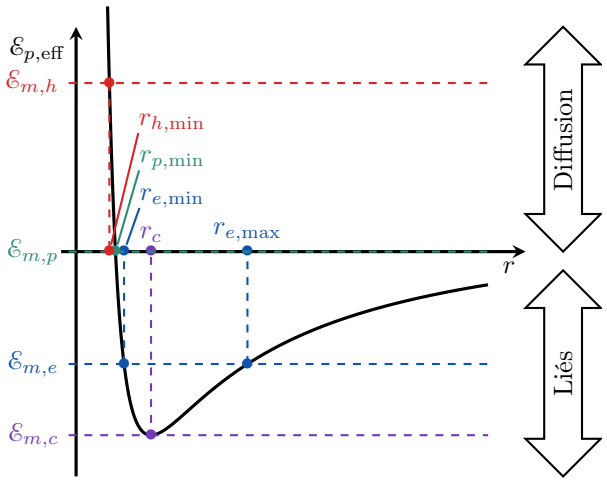


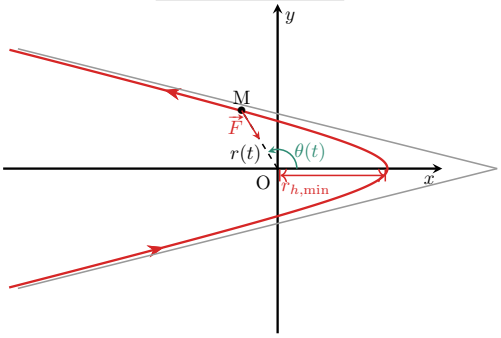
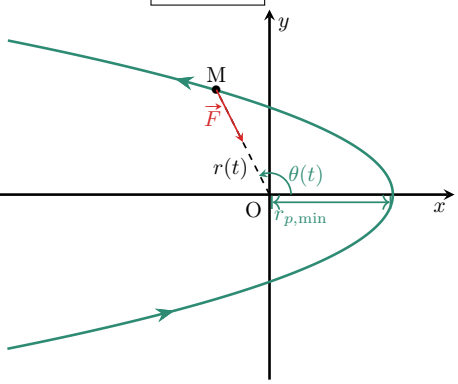
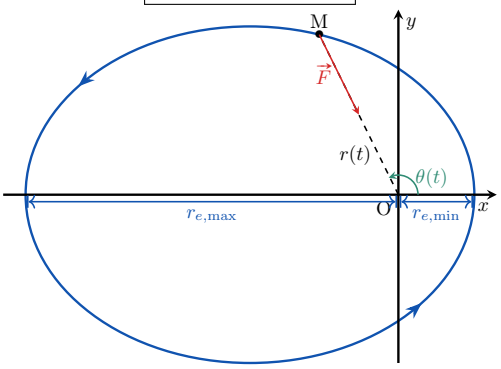
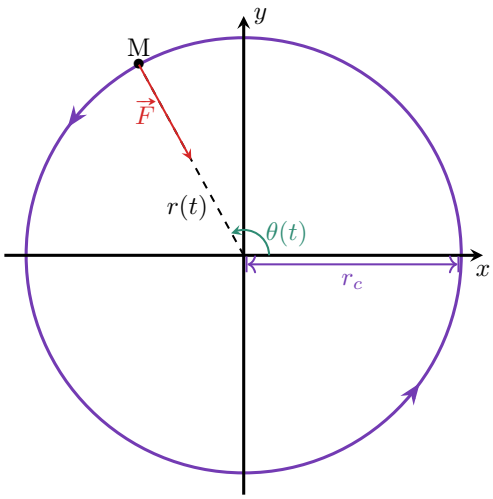
Figure M7.8 – $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ cas attractifs.

♥ Important M7.1 : Trajectoires cas attractif

Comme $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$, on a forcément $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}} < \mathcal{E}_m}$. Ainsi, selon la valeur de $\mathcal{E}_m$ par rapport à $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$, le système aura différentes trajectoires, toutes ayant O comme foyer ou centre :

◇ $\mathcal{E}_m \geq 0$: la trajectoire n'est **pas bornée**, on aura donc un état de **diffusion** avec une valeur minimale et deux trajectoires possibles, hyperbolique et parabolique ;

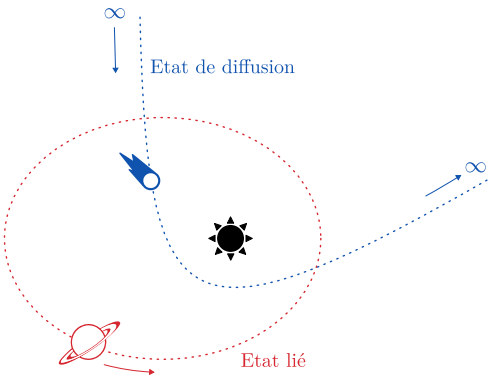
◇ $\mathcal{E}_m < 0$: la trajectoire **est bornée**, on aura donc un état **lié** avec deux valeurs extrêmes différentes pour la trajectoire elliptique ou une seule, $r_{\min}$, pour la trajectoire circulaire.

État	$\mathcal{E}_m$	Trajectoires	
Diffusion	$\mathcal{E}_m \geq 0$	$0 < \mathcal{E}_m < \infty$  Hyperbolique	$\mathcal{E}_m = 0$  Parabolique
Lié	$\mathcal{E}_m < 0$	$-\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_m < 0$  Elliptique	$\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_0$  Circulaire

Exemple M7.1 : État lié, état de diffusion

◇ Les planètes du système solaire restent confinées près du Soleil, ce sont donc des états liés.

◇ Un état de diffusion correspond par exemple au cas d'un comète arrivant vers le Soleil, atteignant une distance minimale avant de retourner à l'infini.



III/C Cas répulsif

Important M7.2 : Trajectoires cas répulsif

Dans le cas d'une forcé répulsive, l'énergie potentielle effective **n'a pas de minimum** ; la trajectoire est alors **toujours hyperbolique**.

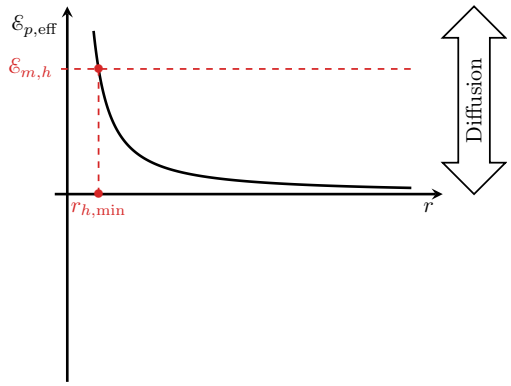


Figure M7.9 – $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ cas répulsifs.

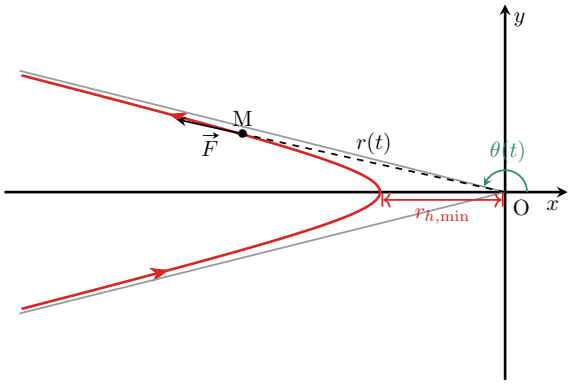


Figure M7.10 – Trajectoire cas répulsifs.

IV Mécanique céleste

IV/A Qu'est-ce qu'une ellipse ?

Définition M7.3 : Ellipse

Une ellipse se définit comme l'ensemble des points M tels que

$$\boxed{\text{OM} + \text{O}'\text{M} = 2a}$$

avec O et O' les **foyers** de l'ellipse, et son a demi-grand axe.

Le point le plus proche s'appelle le **péricentre**[1] P, et le plus éloigné s'appelle l'**apocentre**[2], A.

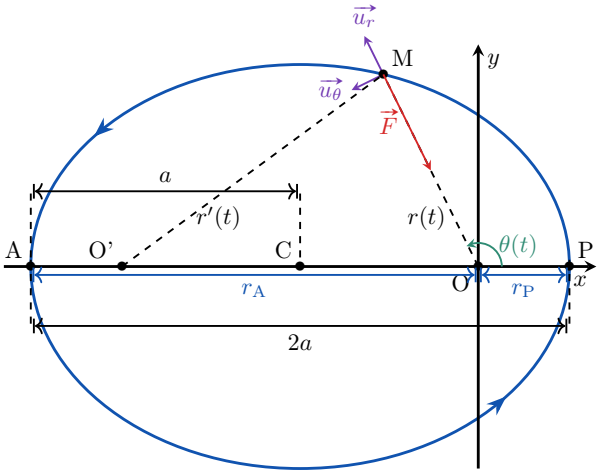


Figure M7.11 – Ellipse et paramètres

Propriété M7.6 : Caractéristiques en P ou A

◇ Les rayons r_P et r_A sont reliés à a tels que $\boxed{r_P + r_A = 2a}$

◇ P et A sont à des extremum du rayon, soit $\dot{r}_{P|A} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{v}_{P|A} = r_{P|A}\dot{\theta}\vec{u_\theta}}$

1. Périgée pour la Terre, périhélie pour le Soleil
2. Apogée pour la Terre, aphélie pour le Soleil

IV/B Lois de Kepler

Les lois de Kepler ont été établies par Johannes Kepler au début du XVII^{e} siècle (publiées en 1609 et 1619) à partir de relevés expérimentaux effectués par Tycho Brahe à la fin du XVI^{e} siècle.

Loi M7.1 : de Kepler

1) **Loi des orbites** : les planètes ont des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers ;

2) **Loi des aires** : pendant une durée donnée Δt, l'aire $\Delta\mathcal{A}$ balayée par une planète est constante.

3) **Loi des périodes** : La période de révolution d'une planète autour du Soleil est reliée au demi-grand axe de son ellipse par :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}}^{3}$$

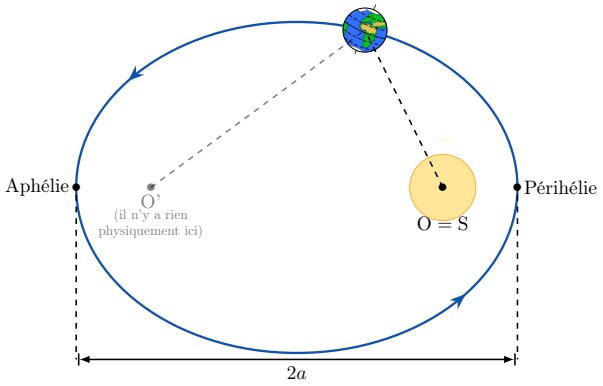


Figure M7.12 – 1re loi de Kepler

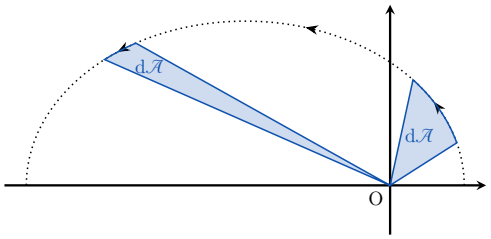


Figure M7.13 – 2e loi de Kepler

Application M7.1 : Troisième loi de Kepler

Calculer la période de révolution de Mars autour du Soleil. On donne $a_{\text{Terre}} = 150 \times 10^6$ km et $a_{\text{Mars}} = 228 \times 10^6$ km.

$$\frac{{T_\text{M}}^2}{{a_\text{M}}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\text{S}} = \frac{{T_\text{T}}^2}{{a_\text{T}}^3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_\text{M} = T_\text{T}\sqrt{\frac{{a_\text{M}}^3}{{a_\text{T}}^3}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_\text{T} = 1\,\text{an} \\ a_\text{T} = 150 \times 10^6\,\text{km} \\ a_\text{M} = 228 \times 10^6\,\text{km} \end{cases}$$

A.N. : $\boxed{T_\text{M} = 1\,\text{an}\,319\,\text{jours}}$

IV/C Cas particulier du mouvement circulaire et généralisation

IV/C) 1 Vitesse uniforme

Important M7.3 : Vitesse des orbites circulaires

Le mouvement <u>circulaire</u> d'un astre autour d'un autre est nécessairement uniforme, et on a

$$\boxed{v_\text{cercle} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}}}$$

3. Plus précisément, $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\text{S}}$

♥ Démonstration M7.8 : Démonstration vitesse circulaire

1 **Système** : {planète} point matériel M de masse m

2 **Référentiel** : héliocentrique, supposé galiléen.

3 **Repère** : cylindrinque $(O,\vec{u_r},\vec{u_\theta},\vec{u_z})$ avec O centre du Soleil, R le rayon supposé constant ($\dot{R}=0$).

4 **Repérage** :

$$\overrightarrow{OM}(t)=R\vec{u_r} \quad \vec{v}(t)=R\dot{\theta}(t)\vec{u_\theta} \quad \vec{a}(t)=-R\dot{\theta}^2(t)\vec{u_r}+R\ddot{\theta}(t)\vec{u_\theta}$$

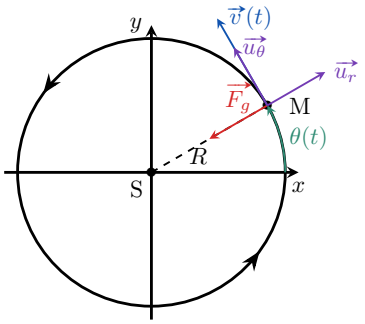


FIGURE M7.14

5 **Bilan des forces** : $\vec{F}_g=-\mathcal{G}\dfrac{mM_S}{R^2}\vec{u_r}$

6 **PFD** :

$$m\vec{a}(t)=\vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2(t)=-\mathcal{G}\dfrac{mM_S}{R^2}\vec{u_r} & \text{(M7.1)} \\ mR\ddot{\theta}(t)=0 & \text{(M7.2)} \end{cases}$$

7 **Vitesse du mouvement circulaire** : l'équation (7.2) donne $\ddot{\theta}=0 \Rightarrow \dot{\theta}=$ cte, et (7.1) donne

$$\boxed{|\dot{\theta}|=\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R^3}}} \Leftrightarrow \boxed{v=R|\dot{\theta}|=\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}}} \quad \blacksquare \qquad \text{(M7.3)}$$

♥ Attention M7.2 : Vitesse des orbites elliptiques

Le mouvement elliptique n'est pas uniforme !

IV/C) 2 Période

Important M7.4 : Période circulaire

La période de révolution du mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre vérifie

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}}$$

Pour l'ellipse, on **remplace** R **par** a.

♥ Démonstration M7.9 : T_{cercle}

En effet, avec (7.3),

$$\left.\begin{aligned} |\dot{\theta}| &= \frac{2\pi}{T} \\ \Leftrightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} &= \frac{\mathcal{G}M_S}{R^3} \end{aligned}\right) |\dot{\theta}|=\sqrt{\tfrac{\mathcal{G}M_S}{R^3}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}} \quad \blacksquare$$

IV/C) 3 Énergie mécanique

Important M7.5 : $\mathcal{E}_m$ circulaire

L'énergie mécanique du mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre vérifie

$$\boxed{\mathcal{E}_{m,\text{cercle}}=-\mathcal{G}\frac{mM_S}{2R}}$$

Pour l'ellipse, on **remplace** R **par** a.

♥ Démonstration M7.10 : $\mathcal{E}_{m,c}$

Enfin, avec (7.3) et l'énergie mécanique :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2-\mathcal{G}\frac{mM_S}{R} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}M_S}{R}-\mathcal{G}\frac{mM_S}{R} \end{aligned}\right) R\dot{\theta}=\sqrt{\tfrac{\mathcal{G}M_S}{R}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m=-\mathcal{G}\frac{mM_S}{2R}} \quad \blacksquare$$

V Satellite en orbite terrestre

V/A Vitesses cosmiques

V/A) 1 Première vitesse cosmique

Définition M7.4 : 1re vitesse cosmique

La première vitesse cosmique, ou *vitesse de satellisation minimale*, est la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite **circulaire** à sa surface

Propriété M7.7 : 1re vitesse cosmique

Sur Terre, on trouve

$$\boxed{v_{\text{sat}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}} \approx 8\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$$

♥ Démonstration M7.11 : Première vitesse cosmique

Pour satelliser un corps, il faut faire varier son **énergie mécanique** d'un état partant **du sol** jusqu'**en orbite**. La plus petite énergie mécanique pour cela est celle que l'on vient de déterminer dans l'étude de la trajectoire circulaire. Ainsi, à partir de l'énergie mécanique d'un objet lancé au niveau du sol, on a

$$\mathcal{E}_{m,\text{sol}} = \frac{1}{2}m{v_{\text{sat}}}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,\text{cercle}} = -\mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{2R_{\text{T}}}$$

Or système conservatif $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}m{v_{\text{sat}}}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} = -\mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{2R_{\text{T}}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_{\text{sat}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}}}$$

■

Pour des altitudes plus élevées, il faut davantage de vitesse.

V/A) 2 Seconde vitesse cosmique

Définition M7.5 : 2nde vitesse cosmique

La seconde vitesse cosmique, ou *vitesse de libération* et notée v_{lib}, correspond à la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir **l'éloigner définitivement** de la Terre.

Propriété M7.8 : 2nde vitesse cosmique

Pour la Terre, on trouve

$$\boxed{v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}} = \sqrt{2}v_{\text{sat}} = 11\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$$

♥ Démonstration M7.12 : Seconde vitesse cosmique

Pour éloigner définitivement un objet de la Terre, il faut un **état de diffusion**, donc que sa trajectoire soit **au minimum parabolique** :

$$\mathcal{E}_{m,_{(\text{s})}} = \frac{1}{2}m{v_{\text{lib}}}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,\text{par}} = 0$$

Or système conservatif $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}m{v_{\text{lib}}}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} = 0$

$$\Leftrightarrow v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}}$$

■

Exemple M7.2 : Trajectoires depuis la Terre

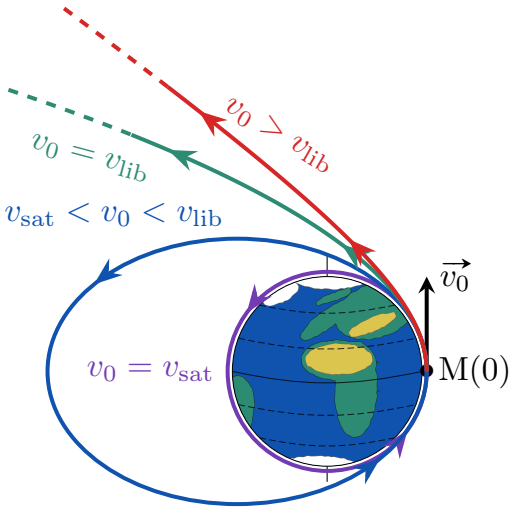


Figure M7.15 – Le code couleur correspond à celui de la Section III/B– Cas attractif.

La réalité est évidemment plus complexe que ça, étant donné les frottements, la non-galiléanité des référentiels, la prise en compte de la masse de carburant nécessaire, etc...

V/B Satellites artificiels

V/B) 1 Satellite géostationnaire

Définition M7.6 : Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui **reste constamment au-dessus d'un même point** de la surface terrestre ; il apparaît donc immobile pour um observataire terrestre.

Mission typique : obtenir des images fixes de la Terre avec une vue éloignée (à des fins météorologiques par exemple).

♥ Propriété M7.9 : Satellite géostationnaire

1) Le plan de son orbite est le **plan de l'équateur** ;
2) Sa **vitesse angulaire est constante,** et vaut $\underline{\omega_{sat} = \omega_T = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\text{rad·s}^{-1}}$
3) Son **rayon est constant**, et on trouve

$$\underline{R_{sat} \approx 42 \times 10^6\,\text{m}} \Leftrightarrow \underline{h_{sat} \approx 36 \times 10^3\,\text{km}}$$

♥ Attention M7.3 : Jours solaire et sidéral

Il existe deux durées qui peuvent s'appeler « jour » :

◇ le **jour sidéral**, que l'on croît à tort être celui qu'on emploie au quotidien, et qui correspond à la durée nécessaire pour que la Terre effectue une **rotation complète sur elle-même** :

$$\underline{T_{\text{sidéral}} = 23\,\text{h}\,56\,\text{min}\,4\,\text{s}}$$

◇ le **jour solaire** est l'intervalle de temps séparant deux **passages du Soleil au zénith** d'un point donné de la Terre, i.e. le temps qui sépare deux « midis » sur Terre ; on a

$$\underline{T_{\text{solaire}} = 24\,\text{h}}$$

Ces deux notions diffèrent légèrement à cause de la révolution de la Terre autour du Soleil.

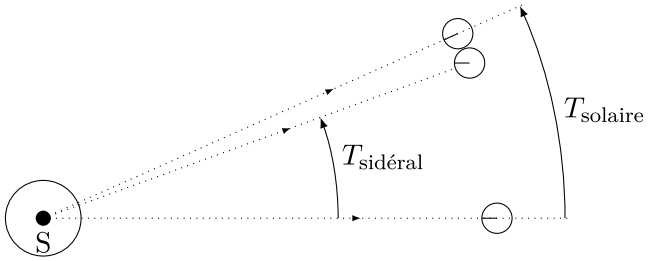
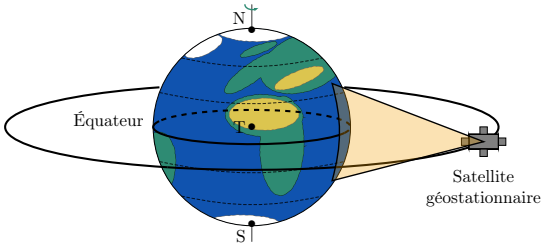


Figure M7.16

♥ Démonstration M7.13 : Satellite géostationnaire

1) En effet, la force étant centrale et conservative, le mouvement est un plan passant par T le centre de la Terre. Or, la Terre étant en rotation autour de l'axe de ses pôles, le seul plan contenant le centre de la Terre et permettant de rester **immobile par rapport à sa surface** est celui contenant l'équateur.



2) Pour la même raison, il doit avoir la même vitesse angulaire que la Terre :

$$\boxed{\omega_{\text{sat}} = \dot{\theta} = \omega_{\text{T}} = \frac{2\pi}{T_{\text{sidéral}}}} \Rightarrow \underline{\omega_{\text{sat}} = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

3) De plus, $C = r^2(t)\dot{\theta}(t)$, mais $\dot{\theta}(t) = \text{cte} = \omega_{\text{sat}}$, donc $r(t) = \text{cte} = R$. Avec la 3e loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_{\text{T}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \left(\frac{\mathcal{G}M_{\text{T}}T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2} \\ M_{\text{T}} = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg} \\ T \approx 8{,}6 \times 10^{4}\,\text{s} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{R \approx 42 \times 10^{6}\,\text{m}}$ soit $\underline{h = R - R_{\text{T}} \approx 36 \times 10^{3}\,\text{km}}$

V/B) 2 Satellite de positionnement

Définition M7.7 : Satellite de positionnement

Les satellites de positionnement fonctionnent par flotte de 20 à 30. Ils sont répartis dans quelques plans orbitaux (3 ou 6), de sorte qu'un point de la surface terrestre puisse toujours en voir au moins 3 dans le ciel.

◇ **Orbites** : $h \approx 20\,000\,\text{km}$

◇ **Mission** : GPS

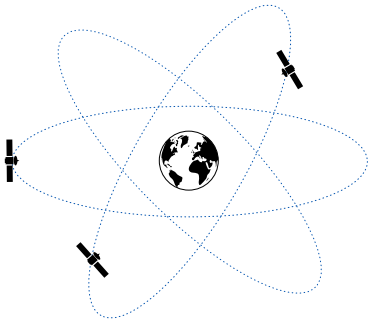


Figure M7.17 – Satellites de positionnement.

V/B) 3 Satellite circumpolaires

Définition M7.8 : Satellites circumpolaires

Ces satellites oscillent entre les pôles Nord et Sud, et ont une période d'environ 1h à 2h afin de balayer de nombreuses zones de la surface terrestre en un jour.

◇ **Orbites** : perpendiculaires au plan équatorial, ces orbites sont basses (environ 700 km de haut).

◇ **Mission** : cartographier la surface terrestre de plus proche que ne pourrait le faire un satellite géostationnaire.

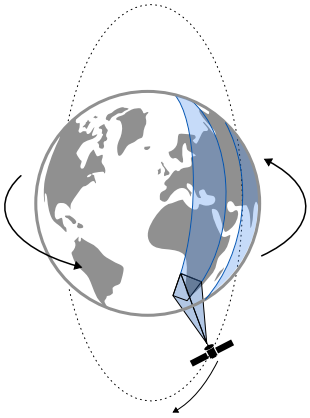


Figure M7.18 – Satellites circumpolaires

Remarque M7.2 : Sites internets

◇ **Géostationnaires** : https://www.ssec.wisc.edu/data/geo/

◇ **Circumpolaires** :

▷ https://earthnow.usgs.gov/observer/

▷ https://worldview.earthdata.nasa.gov

◇ **Planétarium** : https://stellarium-web.org/