Mécanique – chapitre 8

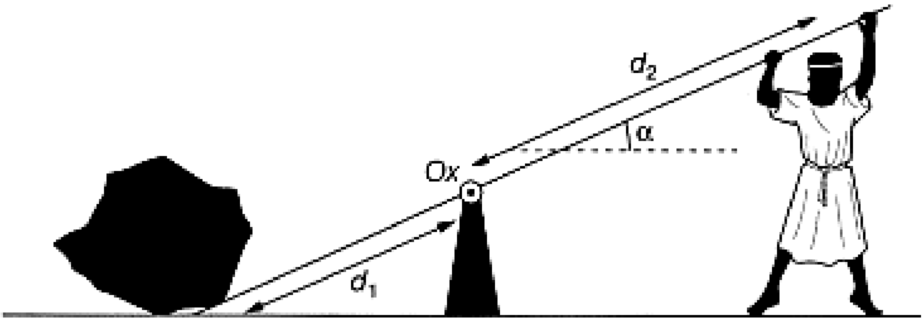
TD application : mécanique du solide

I Levier

Archimède (240 av. J.-C.) est le premier à établir la théorie physique du levier et de la balance. Il aurait dit[1] :

> « Donnez-moi un point fixe et un levier, et le soulèverai la Terre. »

Imaginons une situation plus réaliste où Archimède utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200\,\text{kg}$. Les longueurs sont $d_1 = 50\,\text{cm}$, $d_2 = 1{,}5\,\text{m}$ et $\alpha = 60°$.

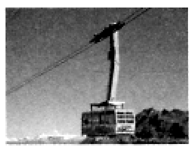


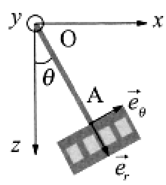
1) Archimède se suspend verticalement au levier. En utilisant les bras de levier, quelle doit être sa masse minimale pour que le rocher se soulève ?

2) Archimède décide de faire varier la direction de la force qu'il exerce sur le levier sans changer sa norme. Comment doit-il procéder pour être le plus efficace ? Quel est le gain par rapport au cas précédent ?

II Pendule pesant non amorti

Une benne de téléphérique, de masse $M = 2{,}0 \times 10^3\,\text{kg}$, est accrochée au point A situé à l'extrémité inférieure d'un bras de masse $m = 300\,\text{kg}$ relié à des câbles au point O. On note $\ell = 4{,}5\,\text{m}$ la distance entre O et G le centre de gravité de l'ensemble {benne+bras}, situé sur l'axe (OA).





On note J_{tot} le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation y, et la liaison est supposée parfaite. On effectue un test d'oscillations de la benne, le point O étant maintenant fixe.

1) En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ.

2) En déduire la période T des petites oscillations de la benne.

3) Sachant que la période des petites oscillations est $T = 4{,}1\,\text{s}$ et que le bras de longueur $L = 3{,}0\,\text{m}$ a un moment d'inertie $J' = \frac{1}{3}mL^2$ par rapport à l'axe y, calculer le moment d'inertie J de la benne par rapport à y. On rappelle que $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et on indique que dans ce cas, les moments d'inertie se somment.

1. Voir https://www.persee.fr/doc/antiq_0770-2817_1955_num4_1_3257 pour une restitution plus fidèle.

III Choc de deux chariots

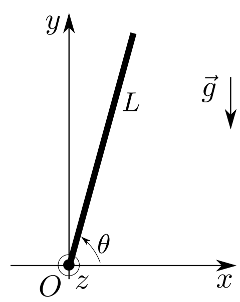
Deux masses m_1 et m_2 sont montées sur un banc horizontal à coussins d'air, de sorte qu'on peut négliger tout frottements. On les projette l'une contre l'autre avec des vitesses initiales $\overrightarrow{v}_1 = v_1\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{0}$ (m_2 initialement à l'arrêt).

1) *Dans cette partie, on suppose qu'après le choc les masses restent solidaires.*
   a – Quelle est la vitesse commune des deux masses après le choc ?
   b – Quel est le travail des actions intérieures lors du choc ? Commenter le signe du résultat.
2) *On considère dans cette partie que le choc est élastique, c'est-à-dire que l'énergie cinétique de l'ensemble des deux masses est conservée au cours du choc et qu'elles ne sont plus solidaires après.*
   a – Montrer que les vitesses v_1' et v_2' après le choc s'expriment :
   $$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{et} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$
   b – Que se passe-t-il si $m_2 \gg m_1$?
   c – À quelle condition sur m_1 et m_2 est-il possible de réaliser un « carreau », i.e. échanger lors du choc les vitesses des deux masses, comme à la pétanque ?

IV Chute d'un arbre

On étudie la chute d'une arbre : on souhaite connaître la durée que met l'arbre, une fois tranché à sa base, pour tomber au sol.

On modélise la situation par une tige homogène de hauteur $L = 10\,\text{m}$ et de masse m, reliée au sol par une liaison pivot parfaite et qui part d'un angle initial $\theta_0 = 1{,}5\,\text{rad}$ avec une vitesse initiale nulle. On donne le moment d'inertie par rapport à Oz : $J_z = \frac{1}{3}mL^2$.



1) Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle de pesanteur de l'arbre.
2) Justifier que l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement. Exprimer cette constante en utilisant les conditions initiales.
3) En déduire la relation $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\dfrac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}$
4) Retrouver ce résultat par le TMC.
5) Pour exprimer la durée T de la chute, isoler dt dans l'expression précédente puis l'intégrer entre $\theta = \theta_0$ et $\theta = 0$. Faire l'application numérique, sachant que $\displaystyle\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} \approx 5{,}44$ pour $\theta_0 = 1{,}5\,\text{rad}$.
6) *Bonus* Écrire un script `Python` permettant de calculer numériquement l'intégrale précédente. Vous utiliserez pour cela la fonction `quad` de la librairie `scipy.integrate`.