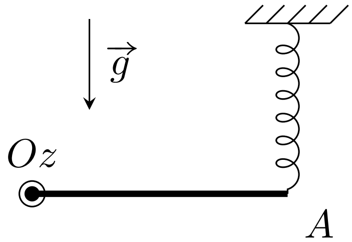
Mécanique – chapitre 8

TD entraînement : mécanique du solide

I Barre fixée à ses extrémités

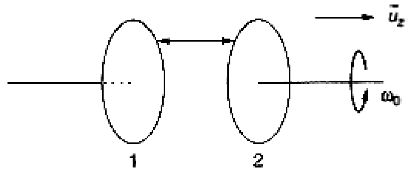
Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre homogène de masse m, de longueur $\text{OA} = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz (liaison parfaite). Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.



1) À l'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. En déduire la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k, ℓ_0, m et g.
2) La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.

II Entraînement par frottements

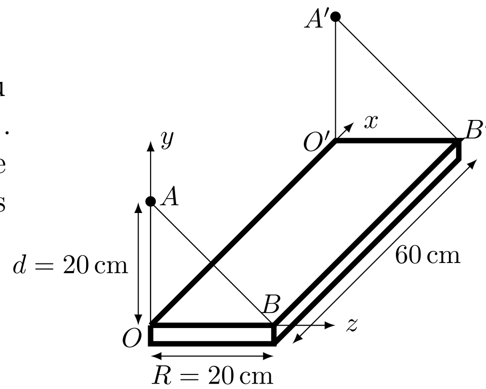
On considère le système de deux disques en rotation, de moments d'inertie J_1 et J_2 par rapport à l'axe horizontal orienté par $\overrightarrow{u_z}$. Ils sont tous les deux en liaison pivot parfaite. Le second disque a une vitesse angulaire ω_0, alors que le premier est initialement immobile. On translate lentement les disques le long de l'axe jusqu'à ce qu'ils rentrent en contact. Il n'y a plus de frottement après la mise en contact.



1) À quelle condition sur les vitesses angulaires n'y a-t-il plus de frottements ? Déterminer alors les vitesses angulaires finales de deux disques par application du TMC sur le système total.
2) Faire un bilan d'énergie pour chaque disque séparément.
3) Faire le même bilan pour le système total.
4) Commenter les résultats.

III Étagère murale

Une étagère est suspendue par quatre câbles métalliques et fixée au mur uniquement par deux pattes de fixation murale (en A et A'). La planche est en bois, de masse $m = 1{,}0\,\text{kg}$, de centre de masse G situé à la distance $R/2$ de l'axe $\Delta = $ (OO') et nous négligerons la masse des câbles.



1) Exprimer les 4 forces de tension des câbles en fonction de normes arbitraires, la force de réaction $\overrightarrow{R}_N$ du mur sur la planche lorsque l'étagère est posée et en équilibre ainsi que le poids de l'étagère. $\overrightarrow{R}_N$ est supposée normale au mur. Calculer les valeurs numériques des normes des forces à l'aide de l'équilibre.

2) On imagine que les 2 câbles fixés en B et B' se rompent en même temps. La planche n'est alors retenue que par les câbles OA et OA', et elle tourne donc autour de l'axe $\Delta = (\mathrm{OO'})$. Nous négligerons son épaisseur et admettrons que son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ vaut $J_\Delta = mR^2$. Montrer qu'alors :

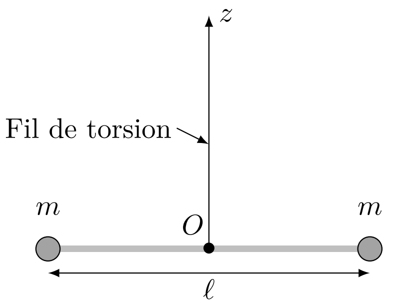
$$\dot\theta^2 = \frac{mgR}{J_\Delta}\sin(\theta)$$

En déduire la vitesse angulaire de la planche lorsqu'elle percute le mur.

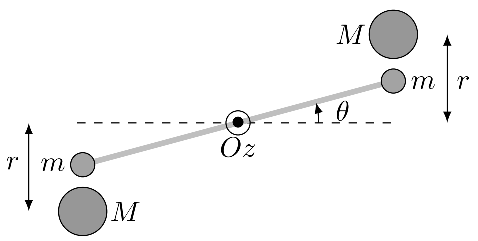
☆☆ IV Expérience de Cavendish

L'expérience réalisée par Cavendish en 1789 a permis à ce dernier d'obtenir une valeur remarquable de la constante de gravitation universelle, $\mathcal{G}$. Le dispositif est constitué de deux petites sphères, de masse $m = 0{,}72\,\mathrm{kg}$, fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable, rigide, et longueur $\ell = 180\,\mathrm{cm}$ et suspendue horizontalement, en son milieu, à un fil de torsion vertical et très fin de constante de torsion C : si la tige tourne d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre $\theta = 0$, le fil exercice ainsi le couple de rappel $\overrightarrow{\Gamma} = -C\theta\overrightarrow{u_z}$ sur la tige.

Deux boules de plomb de masse $M = 160\,\mathrm{kg}$ sont fixées, l'une derrière une petite sphère et l'autre devant l'autre petite sphère, à une distance $r = 20\,\mathrm{cm}$ définie sur le schéma ci-dessous. Les deux forces d'attraction gravitationnelle produisent un couple qui fait tourner la tige d'un angle θ par rapport à sa position au repos. Les deux petites sphères se rapprochent ainsi des boules de plomb jusqu'à ce que la torsion du fil s'équilibre avec le couple gravitationnel.



Vue de face du pendule



Vue de dessus avec les boules de plomb

1) Nous cherchons dans un premier temps à déterminer la constante de torsion C du pendule en faisant osciller celui-ci. Les boules en plomb ne sont pas encore présentes.

   a – Montrer à l'aide du TMC que l'oscillateur est harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}$.

   b – La mesure de la période T_0 des oscillations donne $T_0 = 7{,}0\,\mathrm{min}$. En déduire la valeur de C.

2) Les boules étant placées, déterminer l'expression de la déviation angulaire θ par rapport à la position d'équilibre. On tiendra compte du fait que θ est extrêmement faible pour évaluer le couple exercé par les deux boules de plomb.

3) La valeur obtenue par Cavendish à l'aide de ce dispositif et $\mathcal{G} = 6{,}75 \times 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$. En déduire la déviation angulaire et commenter.