MPSI3 – 28 février 2024 – Devoir surveillé 6

Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont *interdites*

Au programme

Toute la mécanique jusqu'aux particules chargées (mouvements courbes, énergie, particules chargées) ; architecture de la matière 1, 2 et 3.

Sommaire

E1 Molécules de Lewis 2

E2 Cinématique en rotation 4

P1 Cuvette paraboloïde *(CCP MP physique 1 1999)* 7

P2 Étude du *Large Hadron Collider* du CERN *(ATS 2015)* 10

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendrez soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- ◇ A : application numérique mal faite ;
- ◇ N : numéro de copie manquant ;
- ◇ P : prénom manquant ;
- ◇ E : manque d'encadrement des réponses ;
- ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;
- ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- ◇ Q : question mal ou non indiquée ;
- ◇ C : copie grand carreaux ;
- ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;
- ◇ H : homogénéité non respectée ;
- ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;
- ◇ φ : loi physique fondamentale brisée.

Attention

Il est obligatoire, sous peine d'un fort malus, de traiter une partie non négligeable de l'exercice E1.

/40 E1 Molécules de Lewis

Indication

Les deux parties sont indépendantes.

I/A Autour du phosphore

Le phosphore se situe dans la troisième ligne du tableau périodique, dans la quinzième colonne.

/3 1 Déterminer son numéro atomique. En déduire le nombre d'électrons de cœur et de valence du phosphore. Citer l'élément de la deuxième période qui est dans la même colonne que le phosphore. Donner son numéro atomique.

Réponse

$Z = 15$: 1 5 électrons de valence, 10 électrons de cœur 1. C'est l'azote 1 qui est au-dessus, avec $Z = 7$.

À l'état naturel, l'élément phosphore se trouve essentiellement sous forme de phosphates dans des roches telles que la fluoroapatite $Ca_5(PO_4)_3F$.

/5 2 Le numéro atomique du calcium est $Z = 20$. En déduire sa position dans le tableau périodique puis la famille à laquelle il appartient. Quel est l'ion le plus courant issu du calcium et pourquoi ?

Réponse

L'argon est au bout de la 3ème période et a $Z = 18$. Avec 2 électrons en plus, on a Ca sur la 4ᵉ période 1 et dans la 2ᵉ colonne 1. C'est un alcalino-terreux 1. L'ion le plus courant est Ca^{2+} 1 : il aura alors la même configuration électronique que l'argon. 1

/2 3 À quelle famille d'éléments le fluor appartient-il ? Quel est l'ion le plus courant issu du fluor et pourquoi ?

Réponse

Le fluor est un halogène 1. L'ion le plus courant est F^- 1 : il aura alors la même configuration électronique que le néon.

/3 4 Déduire des deux questions précédentes la charge de l'ion phosphate : $PO_4{}^?$.

Réponse

La fluoroapatite est neutre. Ainsi, on a

$$5q(Ca^{2+}) + 3q(PO_4{}^?) + q(F^-) \overset{1}{=} 0 \Leftrightarrow 3q(PO_4{}^?) \overset{1}{=} -9$$

Ainsi $\boxed{PO_4{}^{3-}}$ 1

/7 5 Donner la formule de Lewis de l'ion phosphate.

Réponse

◇ Nombre d'électrons :

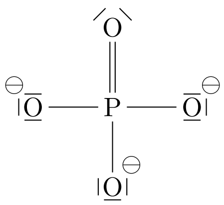
▷ P → 5 électrons de valence 1

▷ O → 6 électrons de valence : 4O → 24 électrons de valence

▷ 3 charges ⊖ → 3 électrons 1

▷ Total : 32 électrons, 16 doublets 1

◇ Structure : on place le phosphore au centre et on place les oxygènes autour, puis on place les doublets restant comme des doublets non-liants en respectant la règle de l'octet 1. Ce faisant, on trouverait une charge formelle par élément ; on fait passer un DnL en liaison double avec le phosphore hypervalent 1.



◇ Charges formelles :

▷ $C_P \overset{1}{=} V - E = 5 - 5 = 0$

▷ $C_O \overset{1}{=} 5 - 7 = -1$ pour les 3 oxygènes en liaison simple.

/3 6 Expliquer pourquoi toutes les liaisons P−O ont la même longueur dans cet ion. Préciser ensuite la géométrie de l'ion phosphate.

Réponse

Le modèle de LEWIS ne permet pas de distinguer les liaisons simples et doubles, alors qu'en réalité les doublets 1 se déplacent dans la structure pour minimiser les interactions en moyenne. Ainsi, toutes les liaisons P−O sont équivalentes. 1 On appelle ce phénomène la mésomérie.

On a une structure AX_4E_0 : molécule tétraédrique. 1

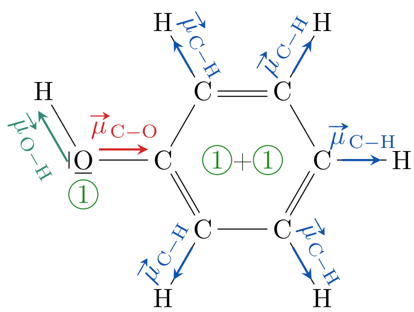
I/B Le phénol

Le phénol est une molécule découverte en 1650 et qui est maintenant utilisée pour former des plastique, en parfumerie, en médecine… Sa formule brute est C_6H_6O. Dans cette molécule, les 6 atomes de carbone forme un cycle.

/5 7 Dessiner, en justifiant, la représentation de LEWIS de cette molécule.

Réponse

- Décompte des électrons :
  - → [H] 1 électron de valence : 6H donc 6 électrons.
  - → [C] 4 électrons de valence : 6C donc 24 électrons.
  - → [O] 6 électrons de valence.
  - → Total : 36 électrons 1, 18 doublets 1.
- Squelette : comme on sait que la molécule est cyclique, il est plus simple de représenter le cycle dès le départ avec des liaisons simples. Ensuite, 5 H sont liés à un C, et un O−H au dernier. On a donc consommé $6 + 7 = 13$ doublets pour ce squelette, il en reste 5 qui ne peuvent être des doublets non liants sur les carbone (sinon charge formelle) : il a donc 3 liaisons doubles, et 2 non-liants sur l'oxygène. Pas de charge formelle



/4 8 Tracer, sur cette représentation de Lewis, l'allure des moments dipolaires des différentes liaisons, en respectant la taille relative des vecteurs selon la norme attendue.

Réponse

Chaque liaison C−H possède un moment dipolaire dirigé vers l'atome de H 1, la liaison O−H en possède également un dirigé vers l'atome d'hydrogène 1 et la liaison C−O en possède un dirigé vers l'atome de carbone 1.

La plus petite norme est celle de C−H. Vient ensuite C−O et enfin O−H. 1

/2 9 Quels sont les moments qui s'annulent ? En négligeant les plus petits moments dipolaires restant par rapport au plus grand, en déduire la direction et le sens du moment dipolaire de la molécule.

Réponse

Les moments dipolaires des liaisons C−H se compensent 2 à 2 1. Le moment dipolaire de la molécule est alors environ celui de la liaison O−H 1 (car celui de la liaison C−O et de la dernière liaison C−H sont beaucoup plus faibles).

/2 10 Cette molécule peut-elle faire des liaisons hydrogène ? Justifier.

Réponse

Oui, elle peut en faire car il existe un atome d'hydrogène relié à un atome très électronégatif (l'atome d'oxygène) 1 **et** un doublet non-liant porté par un atome très électronégatif (idem) 1

/2 11 Cette molécule est-elle soluble dans l'eau ?

Réponse

Oui car elle est polaire 1 (comme l'eau) et peut former des liaisons hydrogènes 1 avec les molécules d'eau.

Le tableau suivant donne quelques grandeurs caractéristiques de 3 molécules.

Molécule	M (g·mol^{-1})	μ (D)	θ_{eb} (°C)
CO_2	44	0	−56
H_2O	18	1,8	100
phénol	94	1,2	182

/2 12 Justifier les valeurs relatives des températures d'ébullition de ces 3 molécules.

Réponse

- Le dioxyde de carbone n'est pas polaire et ne peut pas faire de liaisons hydrogène. Sa température d'ébullition est donc la plus faible. (1)
- Les 2 autres molécules peuvent faire des liaisons hydrogène et sont polaires. Cependant, le phénol est beaucoup plus gros, donc **plus polarisable** (1) que l'eau. Sa température d'ébullition est alors supérieure.

/45 E2 Cinématique en rotation

Indication

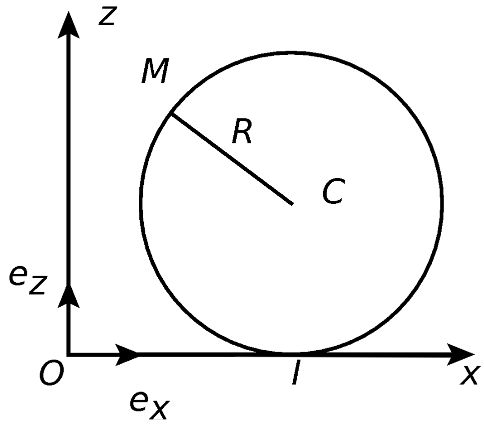
Les deux parties sont indépendantes.

II/A Cinématique d'une valve de vélo

On considère une roue de rayon R et de centre C, comportant une valve M à sa périphérie. On se place dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$, lié au sol et on utilise un repère cartésien (O,x,z), l'axe Oz étant vertical et dirigé vers le haut. On notera θ l'angle $(-\overrightarrow{e_z},\overrightarrow{\text{CM}})$ dans le sens direct. On considère le mouvement circulaire comme uniforme de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega = $ cte.

La roue roule sans glisser sur le sol de manière à ce que le point C suive une trajectoire rectiligne uniforme de vitesse $\overrightarrow{v}_{\text{C}} = v_{\text{C}}\overrightarrow{e_x}$. Le mouvement est donc dans le plan (Oxz). À $t = 0$, le point C a pour coordonnées cartésiennes $(0, R)$ et la valve est en O.

La roue roule sans glisser sur son support ; le point M, lorsqu'il est au sol, a donc une vitesse nulle dans $\mathcal{R}_T$. On considère de plus le repère d'origine C associé au référentiel $\mathcal{R}_R$ lié à la roue.



/3 1 Donner en fonction du temps les coordonnées du point C dans $\mathcal{R}_T$: $(x_{\text{C}}(t)\,;z_{\text{C}}(t))$. Exprimer ensuite en fonction des données la distance parcourue par le point C en un tour de la roue.

Réponse

On connait la vitesse du point C (constante) dans le référentiel lié au sol. Il convient alors de la primitiver, en prenant en compte les conditions initiales. On obtient alors simplement

$$\boxed{x_{\text{C}}(t) \overset{1}{=} v_{\text{C}}t} \quad \text{et} \quad \boxed{z_{\text{C}}(t) \overset{1}{=} R}$$

En un tour de roue, le centre parcourt une longueur $\boxed{2\pi R}$ (1), qui correspond au périmètre de la roue.

/8 2 À l'aide d'un schéma indiquant les points C, I et M ainsi que le sens de l'angle orienté θ, exprimer la vitesse $\overrightarrow{v_{\text{M}/\mathcal{R}_T}}$ du point M en fonction de $\overrightarrow{v_{\text{C}/\mathcal{R}_T}}$, R, Ω et un vecteur de la base polaire. Vous porterez une attention particulière à l'orientation de la base. Démontrer ensuite que $v_{\text{C}} = -R\omega$.

Réponse

On définit la base polaire $(C,\vec{e_r},\vec{e_\theta})$. Le plan est alors orienté dans le sens trigonométrique. ① On constate alors le point M aura un mouvement de rotation dans le sens horaire, donc $\omega = \dot{\theta} < 0$. ①

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_{\mathrm{M}/\mathcal{R}_T}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_T} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_T}$$

Or $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_T} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} \overset{①}{=} R\omega\vec{e_\theta} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_{\mathrm{M}/\mathcal{R}_T}} \overset{①}{=} \overrightarrow{v_{\mathrm{C}/\mathcal{R}_T}} + R\omega\vec{e_\theta}$

Or, $\overrightarrow{v_{\mathrm{I}/\mathcal{R}_T}} \overset{①}{=} \vec{0}$ et $\mathrm{M} = \mathrm{I} \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{e_\theta} = \vec{e_x}$

Ainsi $0 = v_{\mathrm{C}} + R\omega \Rightarrow \boxed{v_{\mathrm{C}} \overset{①}{=} -R\omega}$

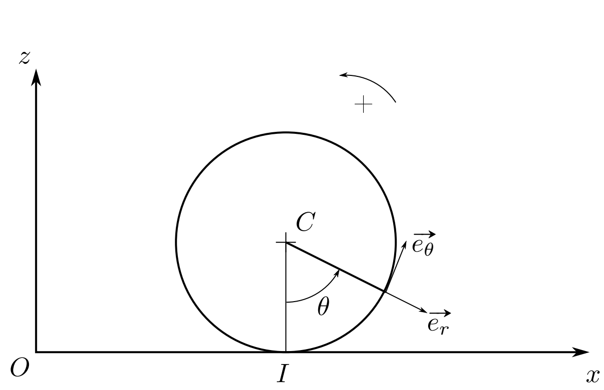


Figure C6.1 – ①+①

/2 [3] Exprimer les vecteurs unitaires de la base polaire dans la base cartésienne en fonction de $\theta(t)$. Exprimer alors les vecteurs position, vitesse et accélération de M, point de la valve dans le référentiel $\mathcal{R}_R$ lié à la roue.

Réponse

Pour projeter, on s'appuie sur la figure précédente faite dans le cas où $\theta \in]0,\pi/2[$ et on a

$$\boxed{\vec{e_r} = \sin(\theta)\vec{e_x} - \cos(\theta)\vec{e_z}} \quad \overset{①}{\text{et}} \quad \boxed{\vec{e_\theta} = \cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_z}}$$

Ainsi ① $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{CM}}_{\mathcal{R}_R}(t) = R\vec{e_r}}$; $\boxed{\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}_R}(t) = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}}$; $\boxed{\vec{a}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}_R}(t) = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r}}$

On étudie le mouvement du point M dans le référentiel R_T terrestre.

/7 [4] Exprimer à tout instant les vecteurs position, vitesse et accélération de M, point de la valve dans le référentiel terrestre, dans la base cartésienne. Commenter le résultat obtenu sur l'accélération.

Réponse

On utilise la relation de Chasles $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \overset{①}{=} \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}_{\mathcal{R}_T}(t) \overset{①}{=} v_{\mathrm{C}}t\,\vec{e_x} + R\vec{e_z} + \overrightarrow{\mathrm{CM}}(t) \quad ; \quad \vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}_T}(t) = \vec{v}_{\mathrm{C}}(t) + \vec{v}_{\mathcal{R}_R}(t) \quad ; \quad \vec{a}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}_T}(t) = \vec{a}_{\mathcal{R}_R}(t)$$

Plus précisément :

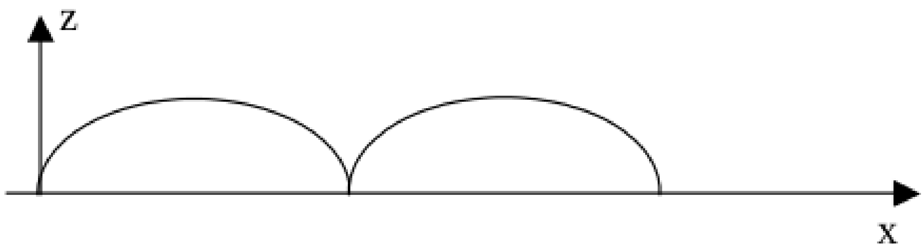
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \overset{①}{=} [-R\omega t + R\sin(\omega t)]\,\vec{e_x} + [R - R\cos(\omega t)]\,\vec{e_z}$$

$$\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}_T}(t) \overset{①}{=} [-R\omega + R\omega\cos(\omega t)]\,\vec{e_x} + [R\omega\sin(\omega t)]\,\vec{e_z}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}_T}(t) \overset{①}{=} \left[-R\omega^2\sin(\omega t)\right]\vec{e_x} + \left[R\omega^2\cos(\omega t)\right]\vec{e_z} \overset{①}{=} -R\omega^2(t)\vec{e_r}$$

On obtient alors le même vecteur pour l'accélération de M dans les deux référentiels. Ce résultat était attendu car ils sont en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. ①

La trajectoire du point M, $z = f(x)$, est une cycloïde représentée ci dessous pour $\omega < 0$ (rotation dans le sens horaire) :



/5 [5] Préciser les coordonnées des points de vitesse nulle.

Réponse

D'après l'équation précédente, la vitesse est nulle quand

$$\sin(\omega t) = 0 \overset{①}{=} \cos(\omega t) - 1$$

Ces deux équations sont compatibles et on en déduit que

$$\exists n \in \mathbb{N} \ : \omega t \overset{1}{=} -2n\pi \Rightarrow t_n \overset{1}{=} -2n\pi/\omega$$

le « $-$ » venant du fait que $t > 0$ et $\omega < 0$. On en déduit alors

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}_n \overset{1}{=} 2nR\pi\overrightarrow{e_x}$$

À chaque tour, on retrouve le fait que le point M (et le point C) se déplacent horizontalement de $2\pi R$. 1

II/B Cinématique sur un manège

Un manège $\mathscr{D}$ de centre O tourne dans le plan (Oxy) à vitesse angulaire constante ω_0 autour de l'axe (Oz). Un enfant assimilé à un point matériel M part de O à l'instant $t = 0$ et se déplace à vitesse constante v_0 le long d'un rayon du manège.

Dans le référentiel terrestre, on a donc $\dot{r}(t) = v_0$ et $\dot{\theta} = \omega_0$. On pourra considérer qu'à $t = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_x}$ sont confondus.

/3 6 Quel est le mouvement de M dans le référentiel terrestre ?

Réponse

La distance $r(t) = \mathrm{OM}(t)$ augmente linéairement au cours du temps 1, tandis que le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ tourne 1 autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire constante : le mouvement est une spirale de centre O. 1

/4 7 Déterminer les équations horaires $r(t)$ et $\theta(t)$ du mouvement dans la base polaire.

Réponse

$$\dot{r}(t) = v_0 \Rightarrow r(t) \overset{1}{=} v_0 t + C$$

Or $r(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$

Ainsi $\boxed{r(t) \overset{1}{=} v_0 t}$

$$\dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \theta(t) \overset{1}{=} \omega_0 t + C$$

Or $\theta(0) = 0$ car $\overrightarrow{u_r}(0) = \overrightarrow{u_x}$ donc $C = 0$

Ainsi $\boxed{\theta(t) \overset{1}{=} \omega_0 t}$

/3 8 Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\vec{v}(M)$ et $\vec{a}(M)$ dans la base polaire en fonction de v_0, ω_0 et t.

Réponse

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = r(t)\overrightarrow{u_r} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} \overset{1}{=} v_0 t\overrightarrow{u_r}}$$

On dérive : $$\vec{v} = v_0\overrightarrow{u_r} + v_0 t\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} \overset{1}{=} v_0\overrightarrow{u_r} + v_0\omega_0 t\overrightarrow{u_\theta}}$$

On dérive à nouveau : $$\vec{a} = v_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + v_0\omega_0\overrightarrow{u_\theta} + v_0\omega_0 t(-\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}) \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} \overset{1}{=} 2v_0\omega_0\overrightarrow{u_\theta} - v_0\omega_0^2 t\overrightarrow{u_r}}$$

/2 9 Calculer $v = \|\vec{v}\|$. Le mouvement est-il uniforme, accéléré ou décéléré ?

Réponse

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_0^2 + v_0^2\omega_0^2 t^2} \overset{1}{=} v_0\sqrt{1 + \omega_0^2 t^2}}$$

La vitesse est une fonction croissante du temps, le mouvement est donc accéléré. 1

/3 10 Quelle est la durée T d'un tour du manège ? Montrer alors que r augmente d'une distance d à chaque tour du manège et exprimer d.

Réponse

Le disque tourne à vitesse constante ω_0. Il effectue donc un tour en $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 1. On a alors

$$r(t) = v_0 t \quad \text{et} \quad r(t+T) = v_0(t+T) = v_0(t + \frac{2\pi}{\omega_0}) \overset{1}{=} r(t) + \frac{2\pi v_0}{\omega_0}$$

$$\Leftrightarrow r(t+T) = r(t) + d \quad \text{avec} \quad \boxed{d \overset{1}{=} \frac{2\pi v_0}{\omega_0}}$$

/5 11 Tracer l'allure de la trajectoire décrite par M et y faisant apparaître la distance d. Placer en un point M arbitraire les vecteurs $\overrightarrow{a}(M)$ et $\overrightarrow{v}(M)$ calculés précédemment, ainsi que les vecteurs de la base polaire $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$. Commenter les directions de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$.

Réponse

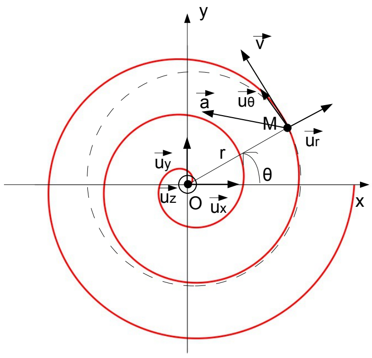


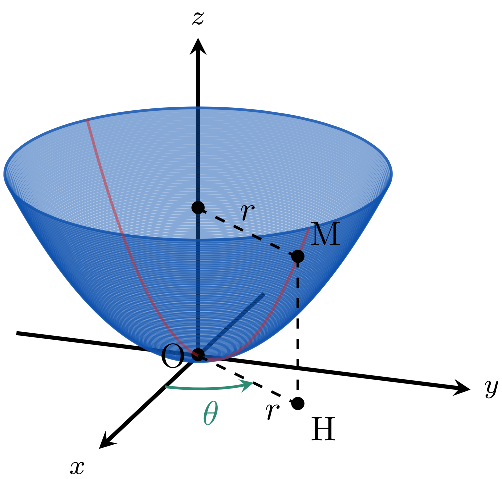
Figure C6.2 – 1+1+1

$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} > 0$, le mouvement est accéléré 1. C'est bien ce qu'on avait vu en calculant v. 1

/52 P1 Cuvette paraboloïde *(CCP MP physique 1 1999)*

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M, de masse m, sous l'action du champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$, à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre $\mathscr{R}$ supposé galiléen lié au repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. La surface extérieure de cette cavité est un paraboloïde de révolution P, d'axe vertical ascendant Oz, dont l'équation en coordonnées cylindriques (r, θ, z) est $r^2 - bz = 0$ avec $b > 0$.

Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M glisse sans frottement sur P. Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M, la base de projection étant $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. On suppose la liaison unilatérale, c'est-à-dire que les coordonnées r et z de M satisfont à l'égalité $z = r^2/b$.



/6 1 Établir le système puis exprimer la position, la vitesse $\overrightarrow{v}$ et l'accélération du point M par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ dans la base cylindrique. Prouver que la composante a_θ de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{e_\theta}$ vérifie

$$a_\theta = \frac{1}{r(t)}\frac{\mathrm{d}(r^2(t)\dot{\theta}(t))}{\mathrm{d}t}$$

Réponse

On étudie le système {M} de masse m dans $\mathscr{R}$ lié à la cavité, supposé galiléen. 1

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \overset{1}{=} \overrightarrow{\mathrm{OH}}(t) + \overrightarrow{\mathrm{HM}}(t) = r(t)\overrightarrow{e_r} + z(t)\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{v}(t) \overset{1}{=} \dot{r}(t)\overrightarrow{e_r} + r(t)\dot{\theta}(t)\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}(t)\overrightarrow{e_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a}(t) \overset{1}{=} (\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t))\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t))\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}(t)\overrightarrow{e_z}}$$

Or, $$\frac{1}{r(t)}\frac{\mathrm{d}(r^2(t)\dot{\theta}(t))}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} \frac{1}{r(t)}(2r(t)\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r^2(t)\ddot{\theta}(t)) \overset{1}{=} 2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t) = a_\theta$$ ■

/5 2 La réaction exercée par P sur le point M est contenue dans le plan $(O,\vec{e_r},\vec{e_z})$. Prouver alors qu'au cours du mouvement, $r^2(t)\dot{\theta}(t)$ est constant. Cette constante du mouvement sera dorénavant notée C.

Réponse

◇ Bilan des forces :

Poids : $$\vec{P} \overset{1}{=} -mg\vec{e_z}$$

Réaction : $$\vec{R} \overset{1}{=} R_r\vec{e_r} + R_z\vec{e_z}$$

◇ PFD :

$$m\vec{a} \overset{1}{=} \vec{R} + \vec{P} \Leftrightarrow m\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_r \\ 0 \\ R_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Sur $\vec{e_\theta}$: $$a_\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r(t)}\frac{\mathrm{d}(r^2(t)\dot{\theta}(t))}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r^2(t)\dot{\theta}(t) \overset{1}{=} C}$$

◇

/5 3 Quelle est, en fonction des variables (r,θ,z) et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ de la particule M dans $\mathcal{R}$? La réécrire en fonction de r, $\dot{r}$, la constante du mouvement C et le paramètre du paraboloïde b.

Réponse

$$\mathcal{E}_c(\mathrm{M},t) \overset{1}{=} \frac{1}{2}mv^2(t) \overset{1}{=} \frac{1}{2}m\left(\dot{r}(t)^2 + r^2(t)\dot{\theta}^2(t) + \dot{z}^2(t)\right) \overset{1}{=} \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2(t) + \frac{C^2}{r^2(t)} + \dot{z}^2(t)\right)$$

Or, $$z(t) = \frac{r(t)}{b} \Rightarrow \dot{z}(t) \overset{1}{=} \frac{2\dot{r}(t)r(t)}{b}$$

d'où $$\boxed{\mathcal{E}_c(r,t) \overset{1}{=} \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2(t) + \frac{C^2}{r^2(t)} + \frac{4\dot{r}^2(t)r^2(t)}{b^2}\right)}$$

◇

/7 4 Rappeler en toutes lettres la définition d'une force conservative. Montrer que l'énergie potentielle de pesanteur de la particule M s'exprime $\mathcal{E}_p(z,t) = mgz(t) + \text{cte}$. L'exprimer ensuite en fonction de $r(t)$. L'origine O du repère sera prise comme origine de l'énergie potentielle.

Réponse

Le poids étant une force conservative, son travail ne dépend pas du chemin suivi (1). Ainsi :

$$\delta\mathcal{W}(\vec{P}) \overset{1}{=} -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p$$

Or $$\delta\mathcal{W}(\vec{P}) \overset{1}{=} \vec{P}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \overset{1}{=} -mg\,\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_p(z,t) \overset{1}{=} mgz(t) + \text{cte}}$$

Ainsi, $$\boxed{\mathcal{E}_p(r,t) \overset{1}{=} mg\frac{r^2(t)}{b}}$$

avec cte = 0 car l'origine est prise en $z = 0$ (1).

◇

/3 5 Que peut-on dire de l'énergie mécanique de la particule M ?

Réponse

Le système est soumis dans le référentiel galiléen au poids qui est une force conservative et à la réaction $\vec{R}$ qui est une force non-conservative (1) mais qui ne travaille pas en l'absence de frottement (1). Donc l'énergie mécanique est conservée. (1)

◇

/3 6 Déduire de ce qui précède que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t)G(r,t) + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r,t)$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r,t)$ est une énergie potentielle dite « effective ». Expliciter $G(r,t)$ et $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r,t)$.

Réponse

$$\mathcal{E}_m \overset{1}{=} \mathcal{E}_p(r,t) + \mathcal{E}_c(r,t) = mg\frac{r^2(t)}{b} + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2(t) + \frac{C^2}{r^2(t)} + \frac{4\dot{r}^2(t)r^2(t)}{b^2}\right)$$

Ainsi $$\boxed{G(r,t) \overset{1}{=} 1 + \frac{4r^2(t)}{b^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r,t) \overset{1}{=} \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2(t)} + mg\frac{r^2(t)}{b}}$$

◇

/9 [7] Représenter avec soin le graphe $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$. Montrer que $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ passe par un minimum pour une valeur r_m de r que l'on exprimera en fonction de C, m, b et g, intensité du champ de pesanteur. Quelle est la dimension du paramètre b et de la constante du mouvement C ? Prouver que l'expression précédente de r_m est homogène.

Réponse

$$\lim_{r\to0}\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \lim_{r\to0}\frac{mC^2}{2r^2} \overset{1}{=} \infty \quad \text{et} \quad \lim_{r\to\infty}\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \lim_{r\to\infty}\frac{mgr^2}{b} \overset{1}{=} \infty$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r}\right)_{r_m} \overset{1}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mC^2\frac{-2}{r_m^3} + 2\frac{mg}{b}r_m \overset{1}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2gr_m^4}{b} = C^2 \qquad \div m \text{ et } \times r_m^3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r_m \overset{1}{=} \left(\frac{bC^2}{2g}\right)^{1/4}} \qquad \text{Isole et } (\cdot)^{1/4}$$

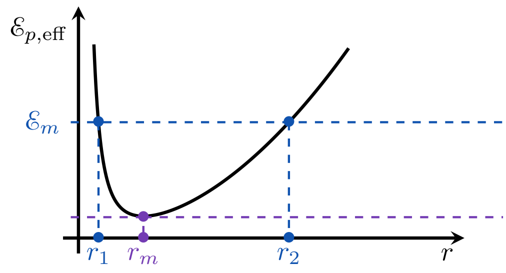


FIGURE C6.3 – 1+1

$$[b] = L \overset{1}{\quad\text{et}\quad} [C] = L^2\cdot T^{-1} \quad\Rightarrow\quad [r_m] = \left(\frac{L^4\cdot T^{-2}\cdot L}{L\cdot T^{-2}}\right)^{1/4} \overset{1}{=} L$$

◇

/3 [8] Discuter, à l'aide du graphe $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$, la nature du mouvement de M. En déduire que la trajectoire de M sur P est nécessairement tracée sur une région de P limitée par deux cercles. On se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

Réponse

D'après l'expression de l'énergie mécanique, $\boxed{\mathcal{E}_m \overset{1}{\geq} \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)}$

car le terme cinétique est toujours positif ou nul. Ainsi, étant donné la forme de l'énergie potentielle effective, la **trajectoire est bornée** 1, et pour une énergie mécanique fixée, $r(t)$ oscille donc entre deux rayons r_1 et r_2 déterminés par l'égalité :

$$\boxed{\mathcal{E}_m \overset{1}{=} \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)}$$

◇

/2 [9] À quelle condition sur C la trajectoire de M sur P est-elle une parabole ?

Réponse

Une parabole implique que le mouvement est plan, donc que $\theta = \text{cte}$ 1, soit $C = 0$. 1

◇

/9 [10] Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnée r de la valeur r_m pour laquelle $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ est minimale. Montrer que $\rho(t) = r(t) - r_m$ oscille avec une période T dont on donnera l'expression en fonction de b, g et r_m.

Réponse

DL de l'énergie potentielle effective autour de r_m :

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(\rho,t) \overset{1}{=} \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_m) + \rho(t)\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}t}\right)_{r_m}}_{=0\ 1} + \frac{\rho^2(t)}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_m} \quad \text{avec} \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_m} \overset{1}{=} \frac{8mg}{b}$$

On développe l'expression de $G(r)$ autour de r_m (l'ordre zéro suffit) :

$$G(r,t) \overset{1}{=} G(r_m,t) = 1 + 4\frac{r_m^2}{b^2}$$

De plus, on a $\ddot{\rho}(t) = \ddot{r}(t)$. L'énergie mécanique s'exprime alors autour de r_m :

$$\mathcal{E}_m \overset{1}{=} \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2(t)\left(1 + 4\frac{r_m^2}{b^2}\right) + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_m) + \frac{8mg}{b}\frac{\rho^2}{2}$$

L'énergie mécanique est conservée, donc sa dérivée par rapport à t est nulle (1). On trouve alors l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\boxed{\ddot{\rho} + \omega^2 \rho \overset{(1)}{=} 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega^2 \overset{(1)}{=} \frac{8g}{b} \frac{1}{1 + 4r_m^2/b^2}}$$

On en déduit la période T des oscillations :

$$\boxed{T \overset{(1)}{=} \pi \sqrt{\frac{b}{2g}\left(1 + 4\frac{r_m^2}{b^2}\right)}}$$

/43 P2 Étude du *Large Hadron Collider* du CERN *(ATS 2015)*

Le Grand Collisionneur de Hadrons (*Large Hadron Collider* ; LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de 27 kilomètres de circonférence et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.

masse du proton	$m_p = 1{,}6 \times 10^{-27}$ kg
masse de l'électron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
charge électrique élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C
célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m·s^{-1}
constante de Planck	$h_p = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s

FIGURE C6.4 – Site du CERN, dans les environs de Genève.
Le grand cercle représente la position du tunnel du LHC.

Dans cette partie, nous étudions la trajectoire des protons dans le LHC. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite.

Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

II/A Particule dans un champ électrique constant et uniforme

/3 **1** Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$? Montrer que l'on peut alors négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100\,\text{kV·m}^{-1}$. On prendra $g = 10\,\text{N·kg}^{-1}$.

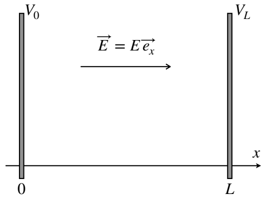
Réponse

Le proton subit la force $\boxed{\vec{F} = q\vec{E} = e\vec{E}}$ (1). On a alors :

- $P = m_p g \approx 10^{-26}$ N (1)
- $F = eE \approx 10^{-14}$ N (1)

On voit donc que $P \ll F$, on peut donc négliger le poids devant cette force.

/4 $\boxed{2}$ La zone de l'espace où règne le champ $\vec{E}$ a une longueur L. En considérant que le potentiel V_0 du plan $x = 0$ est nul, exprimer le potentiel V_L du plan $x = L$.



Réponse

$$\vec{E} \overset{1}{=} -\overrightarrow{\text{grad}}\,V \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \overset{1}{=} -E \Leftrightarrow \int_{V_0}^{V_L} \mathrm{d}V \overset{1}{=} \int_{x=0}^{x=L} -E\mathrm{d}x \Leftrightarrow \boxed{V_L \overset{1}{=} -EL}$$

/4 $\boxed{3}$ En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de E puis de V_L.

Réponse

Le système est conservatif 1, puisque la force de Lorentz est conservative et est la seule force appliquée au système. On applique donc le théorème de l'énergie mécanique entre le point d'entrée et le point de sortie :

$$\Delta\mathcal{E}_m \overset{1}{=} 0 \Leftrightarrow \Delta\mathcal{E}_c = -\Delta\mathcal{E}_p \Leftrightarrow \mathcal{E}_{c_f} - \mathcal{E}_{c_0} \overset{1}{=} -e(\underbrace{V_L}_{=-EL} - \underbrace{V_0}_{=0}) \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{c_f} \overset{1}{=} eEL}$$

II/B Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN. Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale $|U_C|$ toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont au préalable accélérés par une tension U_0 afin d'atteindre une vitesse v_0 et sont alors injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_z}$ parallèle à l'axe de l'accélérateur.

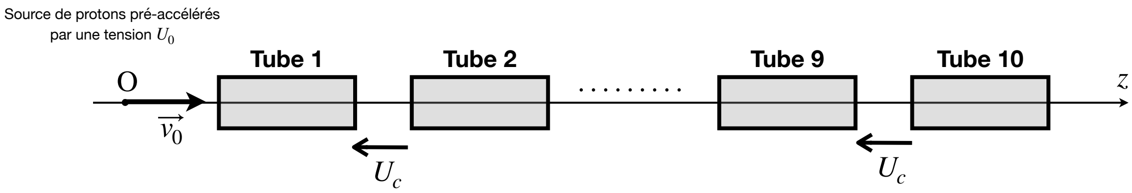


Figure C6.5 – Schéma du Linac 2.

/4 $\boxed{4}$ Quel doit être le signe de U_c pour que les protons soient effectivement accélérés ? Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?

Réponse

Afin que les protons soient accélérés, il faut que le champ électrique soit orienté selon $+\vec{e_z}$ car $\vec{F} = e\vec{E}$ 1. Or comme le champ électrique descend les potentiels 1, il faut que $U_c > 0$ 1.

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a comme dans la question précédente $\Delta\mathcal{E}_c = eU_c$. 1

/3 $\boxed{5}$ Exprimer leur énergie cinétique à la sortie du n-ième tube en fonction de U_C et U_0. En déduire la vitesse v_n des protons à la sortie du n-ième tube.

Réponse

L'énergie cinétique iniale est $\mathcal{E}_c = eU_0$ 1. À la sortie du n-ième tube, on a traversé $n-1$ zones accélératrices (entre les tubes) donc gagné $(n-1)\Delta\mathcal{E}_c$, d'où l'énergie cinétique finale :

$$\boxed{\mathcal{E}_{c,n} \overset{1}{=} eU_0 + e(n-1)U_c} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_p v_n^2 = eU_0 + e(n-1)U_c \Leftrightarrow \boxed{v_n \overset{1}{=} \sqrt{\frac{2}{m_p}[eU_0 + e(n-1)U_c]}}$$

/2 6 On obtient alors $v_{10} = 6 \times 10^7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes ?

Réponse

$v \approx c/5$ (1) $< c/3$ donc ces protons ne sont pas relativistes. (1)

II/C Du linac 2 au synchroton à protons (PS)

Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le synchrotron à proton (PS) a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

Le synchrotron à proton est constitué de plusieurs éléments permettant d'une part, d'accélérer les protons (comme étudié dans la partie précédente) et d'autre part de les dévier (comme étudié dans cette partie). Ces éléments sont ensuite synchronisés afin de permettre aux protons de suivre une trajectoire circulaire tout en étant globalement accélérés.

On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\overrightarrow{B}_0 = B_0\overrightarrow{e_z}$. À $t = 0$ sa vitesse $\overrightarrow{v}_{\mathrm{Af}}$ est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la Figure C6.6.

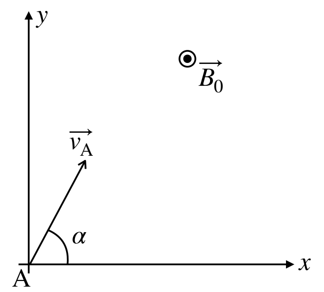


Figure C6.6

/5 7 Donner le nom et l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique $\overrightarrow{B}_0$. On considère que le proton n'est soumis qu'à cette force. Reproduire alors la Figure C6.6 sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en A. Exprimer la force subie à l'instant initial dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Réponse

Il s'agit de la force magnétique de Lorentz : (1)

$$\boxed{\overrightarrow{F} \overset{(1)}{=} q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}_0 = e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}_0}$$

Or,

$$\overrightarrow{v}_{\mathrm{A}} \overset{(1)}{=} v_{\mathrm{A}}\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x} + v_{\mathrm{A}}\sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{F} \overset{(1)}{=} ev_{\mathrm{A}}B_0(\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} - \cos(\alpha)\overrightarrow{e_y})}$$

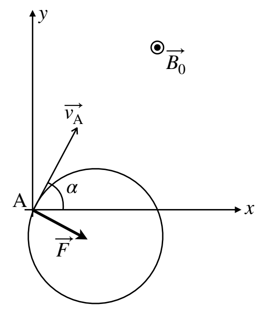


Figure C6.7 – (1)

/4 8 Montrer que la puissance associée à cette force est nul. En déduire que le mouvement du proton est uniforme.

Réponse

La puissance de cette force est nulle car $\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$ (1) avec $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{v}$ (1) d'après l'expression du produit vectoriel.

Ainsi, d'après le théorème de la puissance cinétique, $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}$ (1) $= 0 \Rightarrow \mathcal{E}_c = \mathrm{cste} \Rightarrow \boxed{v = \mathrm{cte}}$ (1)

/5 9 Établir les équations différentielles portant sur v_x, v_y et v_z les composantes du vecteur vitesse dans le repère cartésien. Identifier les équations couplées. On pourra introduire ω_c la pulsation cyclotron, à exprimer en fonction de e, B_0, et m_p.

Réponse

On applique le PFD avec $\overrightarrow{v} = v_x\overrightarrow{e_x} + v_y\overrightarrow{e_y} + v_z\overrightarrow{e_z}$:

$$\overrightarrow{F} \overset{(1)}{=} e(v_yB_0\overrightarrow{e_x} - v_xB_0\overrightarrow{e_y}) \overset{(1)}{=} m_p\overrightarrow{a} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \omega_c v_y \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\omega_c v_x \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

en posant $\omega_c = \frac{eB_0}{m_p}$ (1). Les équations selon $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ sont bien couplées. (1)

/3 10 Montrer alors que v_x et v_y sont solutions d'une même équation différentielle classique. On ne cherchera pas à résoudre l'équation différentielle.

Réponse

À partir des équations couplées, en dérivant l'une par rapport au temps (1) et en la combinant avec la seconde, on obtient les équation suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_c^2 v_x = 0 \qquad \overset{(1)}{\text{et}} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_c^2 v_y = 0$$

Les équations portant sur v_x et v_y sont des équation différentielles d'oscillateur harmonique (1), de pulsation propre ω_c.

◇

/2 11 On admet que la trajectoire du proton est un cercle. Représenter ce cercle sur votre figure et indiquer dans quel sens il est parcouru.

Réponse

Il a déjà été représenté sur la figure précédente, il est parcouru dans le sens horaire.

◇

/4 12 Exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de m_p, B_0, e et v_A.

Réponse

On se place dans la base polaire de centre le centre C (1) le centre du cercle décrit par le proton.

On a alors $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = R\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$ (1).

Par ailleurs, $\overrightarrow{F} = e\overrightarrow{v} \wedge B_0\overrightarrow{e_z} = -ev_\mathrm{A}B_0\overrightarrow{e_\theta} \wedge \overrightarrow{e_z} = -ev_\mathrm{A}B_0\overrightarrow{e_r}$ (1). On applique alors le PDF, qui donne en projection sur $\overrightarrow{e_r}$:

$$m_p\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F} \quad \text{sur } \overrightarrow{e_r} : \quad -m_pR\dot{\theta}^2 \overset{(1)}{=} -m_p\frac{v_\mathrm{A}^2}{R} = -ev_\mathrm{A}B_0 \Leftrightarrow \boxed{R \overset{(1)}{=} \frac{v_\mathrm{A}m_p}{eB_0}}$$

◇