Mécanique – chapitre 8

Mécanique du solide

Sommaire

Capacités exigibles

- ▢ Définition d'un solide ; translation ; rotation autour d'un axe fixe.
- ▢ Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe, moment d'inertie. fourni.
- ▢ Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des
- ▢ Définir un couple, définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
- ▢ Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen.
- ▢ Pendule pesant : établir l'équation du mouvement et une intégrale première du mouvement.
- ▢ Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
- ▢ Décrire la trajectoire d'un point quelconque d'un solide en rotation et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
- ▢ Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie masses.
- ▢ Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
- ▢ Établir, dans le cas de la rotation, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Démonstrations

Théorèmes

Preuves

Rappels

Corollaires

Implications

Interprétations

Applications

Exemples

Expériences

Outils

Points importants

Erreurs communes

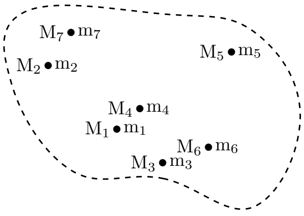
I Système de points matériels

I/A Systèmes discret et continu

Définition M8.1 : Systèmes discrets vs. continus

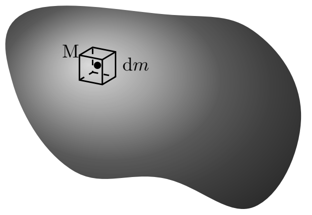
Système discret

Un ensemble de n points matériels M_i de masses m_i



Système continu

Un ensemble d'éléments de volumes $\mathrm{d}V$ de masse $\mathrm{d}m$, de position M.



Sauf cas particuliers, on considèrera des systèmes **discrets** et fermés.

Rappel M8.1 : Centre d'inertie

Le **centre d'inertie** ou **centre de gravité** G d'un ensemble de points matériels M_i de masses m_i telles que $m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$ est défini par :

$$\boxed{m_{\text{tot}}\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \sum_i m_i\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}} \Leftrightarrow \boxed{\sum_i m_i\overrightarrow{\mathrm{GM}_i} = \vec{0}}$$

Il s'agit du **barycentre** des points du système, **pondéré par leur masse**.

I/B Mouvements d'un solide indéformable

Définition M8.2 : Solide indéformable

Un solide $\mathcal{S}$ **indéformable** est un ensemble de points tels que la distance entre deux points quelconques soit constante :

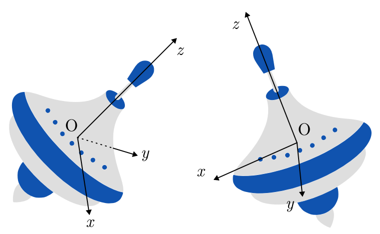
$$\forall(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2) \in (\text{solide}),\quad \boxed{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 = \text{cte}}$$

Implication M8.1 : Solide indéformable et repère

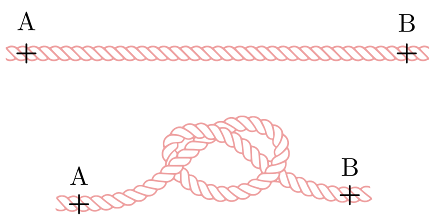
Du fait de ce caractère indéformable, on peut donc associer à un solide **un repère qui lui est propre**. Il suffit de prendre une origine quelconque dans le solide et trois axes pointant vers d'autres points du solide.

Exemple M8.1 : Solides déformables ou non

◇ Une toupie est un solide :



◇ Une corde détendue n'est pas un solide :



Un solide peut avoir un mouvement complexe. Dans le cadre du programme, on se limite à deux situations.

I/B) 1 Translation

Définition M8.3 : Mouvement de translation

Un solide $\mathcal{S}$ en mouvement est en **translation** si son **orientation est fixe** au cours du mouvement. Ainsi, de manière équivalente :

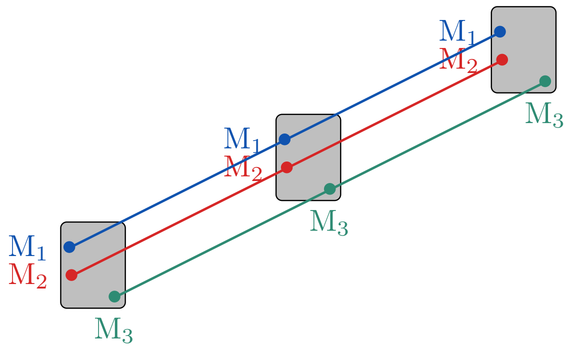
1) $\forall (\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2) \in \mathcal{S}, \quad \overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$;

2) $\forall t, \forall (\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2) \in \mathcal{S}, \quad \vec{v}(\mathrm{M}_1) = \vec{v}(\mathrm{M}_2)$.

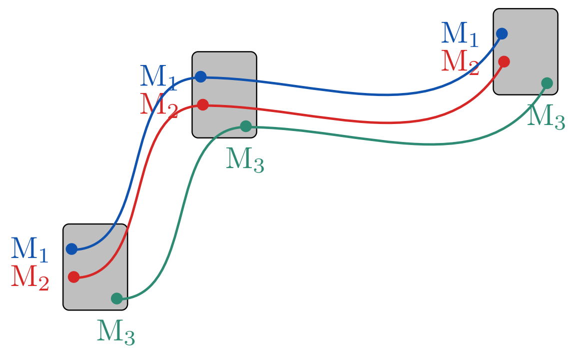
Alors, la connaissance du mouvement **d'un point** du solide en translation permet de connaître le mouvement de **tout point** du solide ; on prendra habituellement le **centre d'inertie**.

Exemple M8.2 : Mouvements de translation

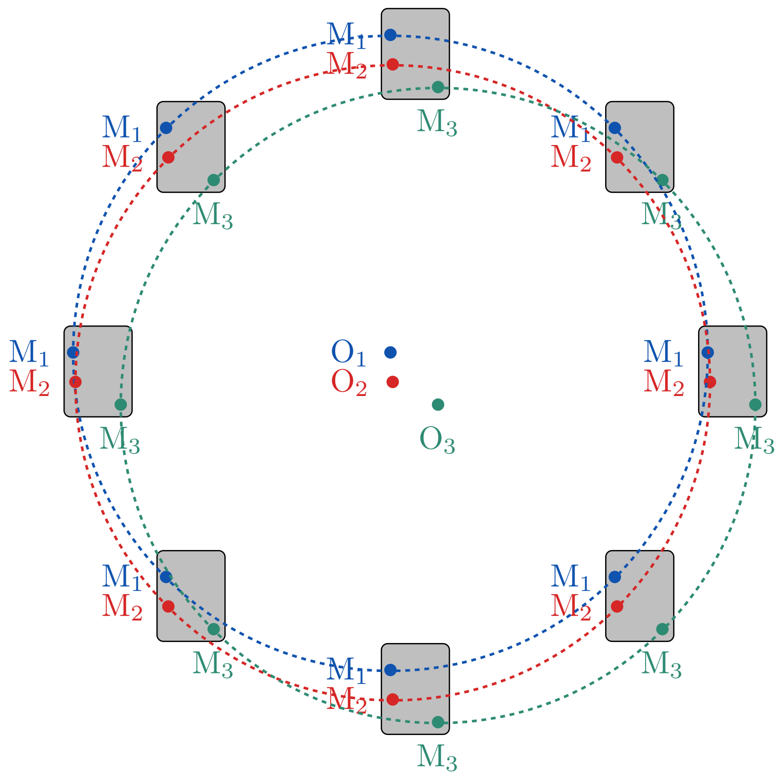
1) **Translation rectiligne** : chaque point décrit une droite.



2) **Translation quelconque** :



3) **Translation circulaire** : chaque point décrit un arc de cercle.



I/B) 2 Rotation

Définition M8.4 : Rotation, vecteur rotation

Un solide est dit en **mouvement de rotation** autour d'un **axe fixe** Δ si la **distance** de tout point du solide à tout **point de l'axe** est constante :

$$\forall \mathrm{M}_i \in \mathcal{S}, \exists \mathrm{H}_i \in \Delta \ : \left\| \overrightarrow{\mathrm{H}_i\mathrm{M}_i} \right\| = \mathrm{cte}$$

Alors, tous les points ont un **mouvement circulaire** autour de cet axe, avec la **même vitesse angulaire**. On introduit pour cela le **vecteur rotation** $\vec{\omega}$ [1] en $\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ tel que

$$\boxed{\vec{\omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}(t) = \omega(t)\overrightarrow{u_\Delta}}$$

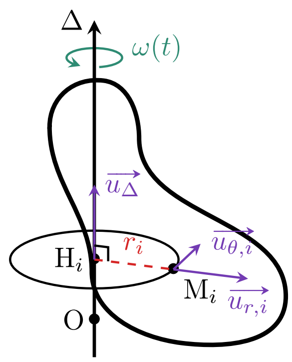


Figure M8.1 – Solide en rotation.

Propriété M8.1 : $\vec{v}_{\mathrm{M}}$ pour $\mathcal{S}_{rot}$

En plaçant un point O sur l'axe de rotation Δ, la vitesse d'un point M_i du solide est

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{M}_i/\mathcal{R}}(t) = \vec{\omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}_i}(t)}$$

Démonstration M8.1 : $\vec{v}_{\mathrm{M}}$ pour $\mathcal{S}_{rot}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}(t) = r_i\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_\Delta}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_{\mathcal{S}}(t) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}_i}(t) = \omega(t)\overrightarrow{u_\Delta} \wedge (r_i\overrightarrow{u_r} + \cancel{z\overrightarrow{u_\Delta}})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{\omega}_{\mathcal{S}}(t) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}_i}(t) = r_{\mathrm{M}}\omega(t)\overrightarrow{u_\theta}} = \vec{v}_{\mathrm{M}_i/\mathcal{R}}(t)$$

■

Remarque M8.1 : Vitesse des points d'un solide en rotation

◇ On retrouve que la vitesse est nulle sur un point de l'axe, puisqu'alors $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \parallel \Delta$ donc le produit vectoriel est nul ;

◇ On retrouve que le déplacement des points se fait perpendiculairement à l'axe de rotation (par construction-même du produit vectoriel) ;

◇ Plus on s'éloigne de l'axe, plus la vitesse des points est élevée.

Exemple M8.3 : Mouvements de rotation

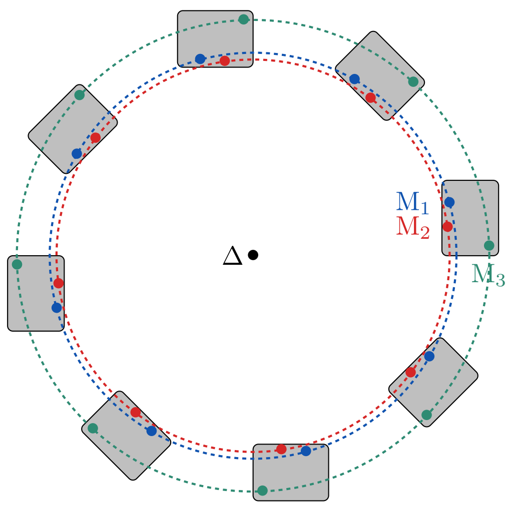


Figure M8.2 – Rotation autour de l'axe Δ

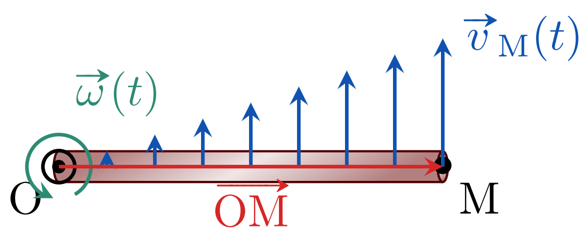
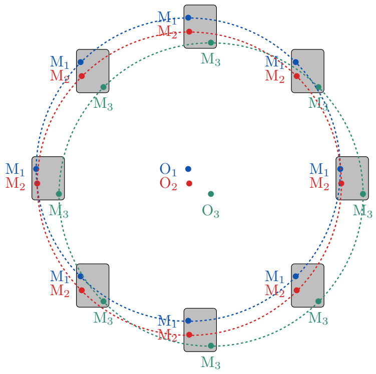
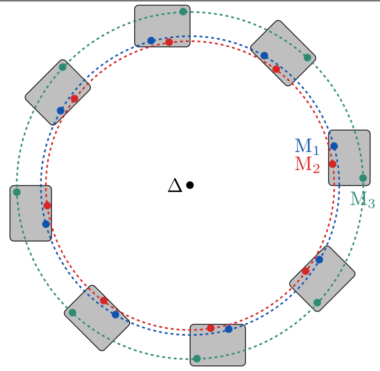


Figure M8.3 – Vitesse avec le rayon.

1. parfois noté $\vec{\Omega}$

Attention M8.1 : Translation circulaire vs. rotation

	Translation circulaire	Rotation autour d'un axe fixe
Définition	Tous les points suivent une trajectoire circulaire de même rayon mais de centre différent	Tous les points suivent une trajectoire circulaire de même centre mais de rayon différent.
Schéma		
Photo		

I/B) 3 Combinaison des mouvements

Propriété M8.2 : Vitesse des points d'un solide (HP)

Lors d'un mouvement plus complexe combinant translation et rotation, la vitesse d'un point M du solide est donnée par :

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t) = \vec{v}_{\mathrm{O}}(t) + \vec{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}$$

II Rappel : TRC

II/A Quantité de mouvement d'un ensemble de points

Définition M8.5 : $\vec{p}$ d'un ensemble de points

Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble $\mathcal{S}$ de points matériels M_i de masses m_i est défini par :

$$\boxed{\vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}(t) = \sum_i \vec{p}_{\mathrm{M}_i/\mathcal{R}}(t) = \sum_i m_i \vec{v}_{\mathrm{M}_i/\mathcal{R}}(t)}$$

Propriété M8.3 : $\overrightarrow{p}_{\mathcal{S}}$ et centre d'inertie

La quantité de mouvement d'un ensemble de points est la quantité de mouvement d'un point matériel placé en G et de masse m_{tot} :

$$\boxed{\overrightarrow{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}(t) = m_{\text{tot}}\overrightarrow{v}_{\mathrm{G}/\mathcal{R}}(t)}$$

Tout se passe comme si la masse était concentrée en G.

II/B Forces intérieures et extérieures

Définition M8.6 : Forces intérieures et extérieures

Les forces s'appliquant aux points M_i de $\mathcal{S}$ se rangent en deux catégories :

1) Les forces intérieures **centrales** $\overrightarrow{F}_{\text{int}\to i}$ exercées par les autres points $\mathrm{M}_{j\neq i}$ du système ;
2) Les forces extérieures $\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to i}$ exercées par une origine externe au système.

On définit alors les forces totales sur le système :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{int}\to\mathcal{S}} = \sum_i \overrightarrow{F}_{\text{int}\to i}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}} = \sum_i \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to i}}$$

Propriété M8.4 : Résultante des forces intérieures

La résultante des forces intérieures d'un système <u>indéformable</u> est toujours nulle.

Démonstration M8.2 : Résultante des forces intérieures

Pour M_i : $\overrightarrow{F}_{\text{int}\to i} = \sum_{j\neq i} \overrightarrow{F}_{j\to i}$ soit pour $\mathcal{S}$: $\overrightarrow{F}_{\text{int}\to\mathcal{S}} = \sum_i \overrightarrow{F}_{\text{int}\to i} = \sum_i \sum_{j\neq i} \overrightarrow{F}_{j\to i}$

Or, 3e loi : $\forall i \neq j, \quad \overrightarrow{F}_{j\to i} = -\overrightarrow{F}_{i\to j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{F}_{\text{int}} = \sum_i \overrightarrow{F}_{\text{int}\to i} = \overrightarrow{0}}$ ■

II/C Théorème de la résultante cinétique

Théorème M8.1 : Résultante cinétique

Le **PFD pour un point** se transpose à un *ensemble de points* en prenant pour **point matériel** le **centre d'inertie G** affecté de la masse totale m_{tot} du système, en ne considérant que les **forces extérieures** s'appliquant à l'ensemble :

TRC : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = m_{\text{tot}}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{\mathrm{G}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}}}$$

Preuve M8.1 : TRC

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M}_i)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \overrightarrow{F}_{\text{int}\to i}}_{=\overrightarrow{0}\text{ par 3e loi}} + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to i}}_{=\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}}\text{ par déf.}}$$ ■

Attention M8.2 : TRC et rotation

Ce théorème ne contient que l'**information du centre d'inertie** ; il ne suffit pas à décrire tout le système, notamment les rotations pures !

III Moments pour un système de points

III/A Moments de forces

Propriété M8.5 : Moment des forces intérieures

Le moment des actions intérieures d'un système <u>indéformable</u> est toujours nul.

Démonstration M8.3 : Moment des forces intérieures

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{F}_{\mathrm{int}\to\mathcal{S}}) = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{F}_{\mathrm{int}\to i}) = \sum_i \sum_{j\neq i} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\overrightarrow{F}_{j\to i})$$

Or, en étudiant deux à deux les termes de la somme et en utilisant la 3ᵉ loi de Newton :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_i} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i} + \overrightarrow{\mathrm{OM}_j} \wedge \underbrace{\overrightarrow{F}_{i\to j}}_{=-\overrightarrow{F}_{j\to i}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}_i} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i} + \underbrace{-\overrightarrow{\mathrm{OM}_j}}_{=\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{O}}} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i} = \overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i} = \overrightarrow{0}$$

puisque **les forces intérieures sont centrales**. Ainsi, tous les termes **s'annulent 2 à 2**.

Définition M8.7 : Couple et liaison pivot

Couple

Un **couple** noté $\overrightarrow{\Gamma}$, est une action dont la **force résultante est nulle** mais dont le **moment résultant n'est pas nul**. Il *modifie la rotation sans affecter la translation.*

Couple de frottement

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma}_{\text{frott}} = -\alpha\overrightarrow{\omega}(t)}$$

Liaison pivot

Une **liaison pivot** modélise le contact d'une **rotation guidée** : elle restreint le mouvement du solide à la seule rotation autour de l'axe de la liaison, avec un couple de frottement

Pivot parfaite

On dit qu'une liaison pivot est **parfaite** si son **couple est nul**.

Exemple M8.4 : couples et pivots

Couples

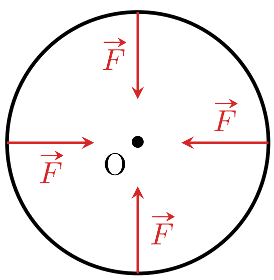


Figure M8.4 – Couple nul

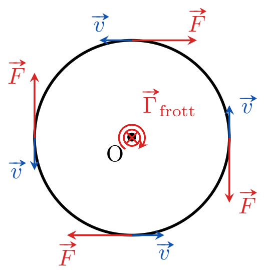
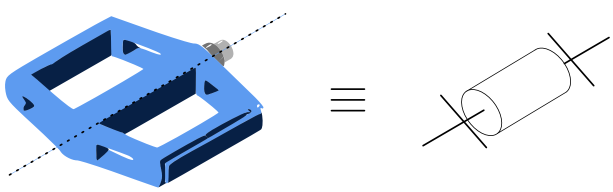


Figure M8.5 – Couple non nul

Pivot

Une pédale de vélo est fixée par une liaison pivot au pédalier :



III/B Moment cinétique et moment d'inertie

Définition M8.8 : $\vec{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ et moment d'inertie

Par rapport à un point O fixe dans $\mathcal{R}$ référentiel d'étude, le moment cinétique d'un système de points est la somme des moments cinétiques de chaque point :

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathcal{S},t) = \sum_i \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M}_i,t) = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{OM}}_i(t) \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}_i/\mathcal{R}}(t)}$$

L'**inertie de rotation** autour d'un axe Δ du système est donnée par le **moment d'inertie** :

$$\boxed{J_\Delta = \sum_i m_i {r_i}^2}$$

Propriété M8.6 : $\vec{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ et J_Δ

Le moment cinétique d'un solide en rotation s'exprime, **pour Δ un axe de symétrie** et $\mathrm{O} \in \Delta$:

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathcal{S},t) = J_\Delta \vec{\omega}_{\mathcal{S}}(t) \Rightarrow \mathcal{L}_\Delta(\mathcal{S},t) = J_\Delta \omega(t)}$$

avec J_Δ le **moment d'inertie** et $\vec{\omega}_{\mathcal{S}}(t)$ le **vecteur rotation**.

Outils M8.1 : Double produit vectoriel

Formule

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{d})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{d}$$

Moyen mnémotechnique

$$\boxed{\underbrace{\text{ABC}}_{\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{d})}\text{, c'est } \underbrace{\text{assez bien}}_{(\vec{a}\cdot\vec{d})\vec{b}}\text{, } \underbrace{\text{mais}}_{-} \underbrace{\text{abaissé}}_{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{d}}}$$

Démonstration M8.4 : $\vec{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ et J_Δ

Discret

$$\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathcal{S},t) = \sum_i \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M}_i,t) = (\overrightarrow{\mathrm{OM}}_i(t) \wedge m_i \vec{v}_i(t)) = (r_i \vec{u_r}) \wedge (m_i \vec{\omega}_{\mathcal{S}}(t) \wedge r_i \vec{u_r})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathcal{S},t) = \sum_i m_i \left({r_i}^2 \vec{\omega}_{\mathcal{S}}(t) - \underbrace{(\vec{\omega}_{\mathcal{S}}(t) \cdot r_i \vec{u_r})}_{=0} r_i \vec{u_r}\right) = \left(\sum_i m_i {r_i}^2\right) \vec{\omega}_{\mathcal{S}}(t) \qquad \blacksquare$$

Continu (HP)

$$\mathcal{L}_\Delta = \int_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}} (\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \mathrm{d}m\, \vec{v}_{\mathrm{M}})\vec{u_\Delta} = \int_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}} \underbrace{\left(r\vec{u_r} \wedge r\omega(t)\vec{u_\theta}\right)}_{\vec{u_r}\wedge\vec{u_\theta}=\vec{u_\Delta}} \vec{u_\Delta}\, \mathrm{d}m \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{L}_\Delta = \underbrace{\left(\int_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}} r^2\, \mathrm{d}m\right)}_{J_z} \omega(t)} \qquad \blacksquare$$

Interprétation M8.1 : Lien $\vec{p}$ et $\vec{\mathcal{L}}$

Le moment d'inertie caractérise **l'inertie de rotation**, c'est-à-dire la facilité avec laquelle la rotation d'un solide s'établit ou s'arrête ; il est analogue à la **masse** pour la translation, qui caractérise l'inertie d'un corps à être mis en mouvement. On peut en effet associer

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}} = J\vec{\omega}$$

et tous les théorèmes en découlant par ailleurs.

Attention M8.3 : Solide vs. centre d'inertie

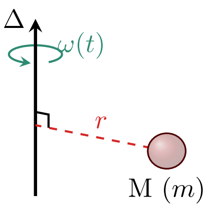
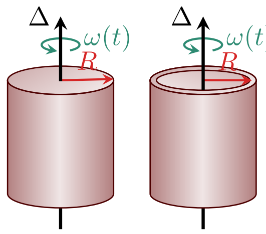
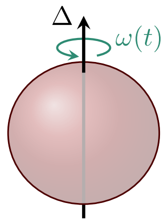
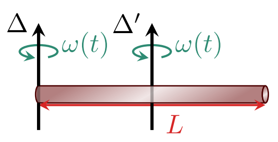
Ne pas confondre le solide avec son centre d'inertie !

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathcal{S},t) \neq \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{G},t)}$$

Important M8.1 : Analyse du moment d'inertie

Plus la masse d'un solide est excentrée, plus le moment d'inertie est grand et plus il est difficile de le mettre en rotation.

Exemple M8.5 : Moments d'inertie divers

	Point	Cylindre	Sphère	Tige
Schéma				
J_Δ	$J_\Delta = mr^2$	$J_{\Delta,\text{plein}} = \dfrac{1}{2}mR^2$ $J_{\Delta,\text{creux}} = mR^2$	$J_{\Delta,\text{plein}} = \dfrac{2}{5}mR^2$ $J_{\Delta,\text{creux}} = \dfrac{2}{3}mR^2$	$J_{\Delta',\text{centre}} = \dfrac{1}{12}mL^2$ $J_{\Delta,\text{bout}} = \dfrac{1}{3}mL^2$

Remarque M8.2 : Moments d'inertie d'un solide

Le moment d'inertie d'un solide **dépend de l'axe** de rotation choisi ! Un objet peut avoir des J_Δ différents selon l'axe Δ autour duquel il tourne.

Par exemple, le moment d'inertie d'un téléphone est plus grand pour une rotation à plat, cf. Figure M8.6

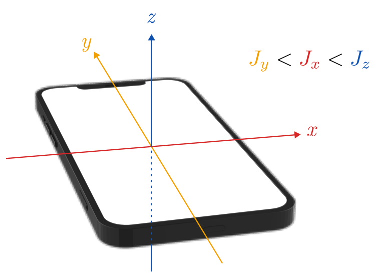


Figure M8.6

III/C Théorème du moment cinétique

Théorème M8.2 : moment cinétique pour un solide

Pour un solide $\mathcal{S}$ de masse m soumis à des forces extérieures $\vec{F}_i$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, O un point **fixe** et Δ un axe orienté **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

TMC vectoriel

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = J_\Delta \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}})}$$

TMC scalaire

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{\Delta/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = J_\Delta \ddot{\theta}(t) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}})}$$

Preuve M8.2 : TMC solide

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M}_i)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_{\text{int}\to\mathrm{M}_i})}_{=\vec{0}\text{ par 3}^{\text{e}}\text{ loi}} + \underbrace{\sum_i \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_{\text{ext}\to\mathrm{M}_i})}_{=\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}})}$$

Application M8.1 : Pendule pesant par TMC

Un pendule pesant est un objet solide pouvant osciller **sans frottement** autour d'un axe z. **Trouver l'équation du mouvement.**

1 **Système** : {pendule}, centre G, moment d'inertie J_Δ

2 **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.

3 **Repère** : cylindrique $(O,\vec{u_r},\vec{u_\theta},\vec{u_\Delta})$, O centre de la liaison pivot.

4 **Repérage** : $\overrightarrow{OG} = \ell\vec{u_r}$

5 **Bilan des actions** :

Origine	**Force**	**Moment**
Poids	$\vec{P} = m\vec{g}$	$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mg\ell\sin(\theta)$
Pivot parfaite	$\vec{F} = \vec{0}$	$\vec{\Gamma} = \vec{0}$

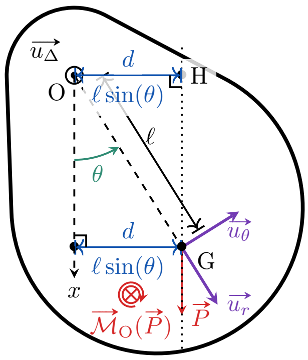


FIGURE M8.7 – Pendule pesant

6 **TMC** :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\Delta}{\mathrm{d}t} = J_\Delta\ddot{\theta}(t) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{mg\ell}{J_\Delta}\sin(\theta(t)) = 0}$$

III/D Applications

III/D) 1 Patinage artistique

Propriété M8.7 : J_r et ω

Si le moment cinétique d'un solide se conserve, alors rapprocher sa masse de l'axe augmente sa vitesse de rotation.

Démonstration M8.5 : J_r et ω

$$\mathcal{L}_z = J_z\dot{\theta}(t) \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{\mathcal{L}_z}{J_z}} \quad \nearrow \text{ si } J_z \searrow$$

Exemple M8.6 : Patinage artistique

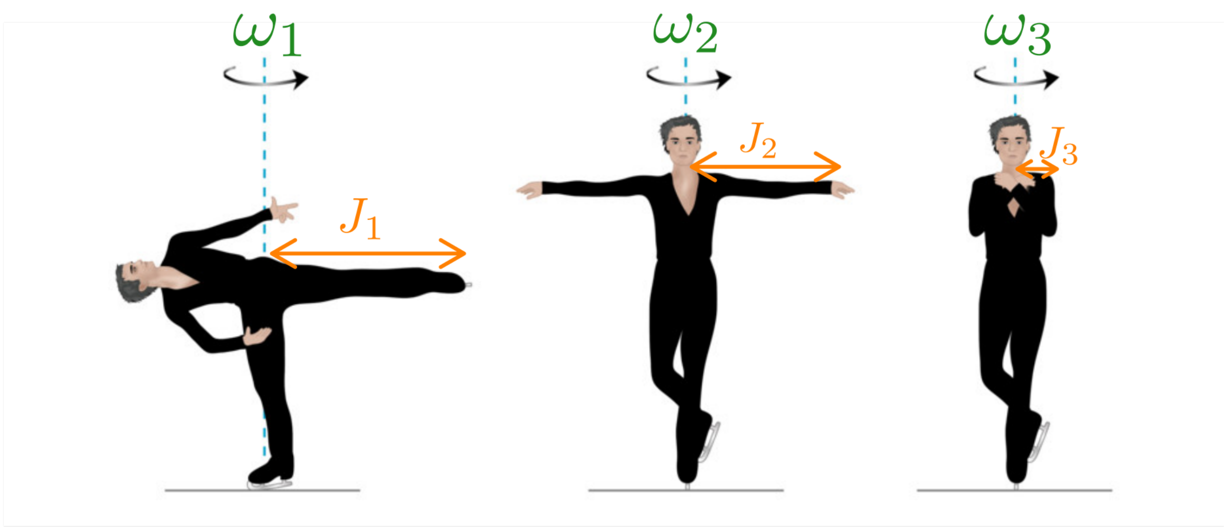


FIGURE M8.8 – Un-e patineur-euse accélère en rapprochant ses bras de son corps

III/D) 2 Précession

Définition M8.9 : Précession

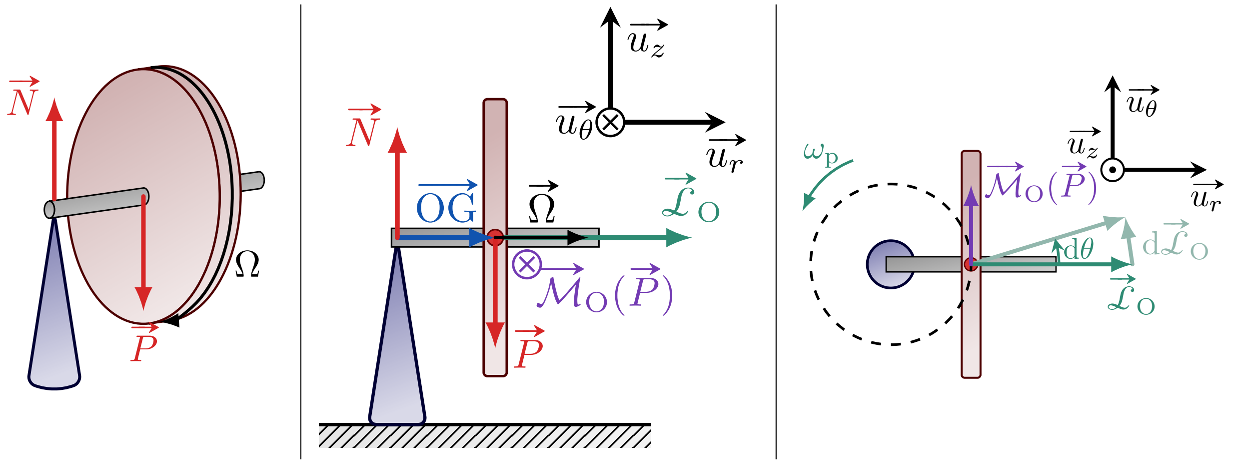
On appelle **précession** le **changement graduel** de la direction de l'axe de rotation d'un solide en rotation rapide : c'est le cas d'une toupie ou d'un gyroscope.

Propriété M8.8 : Précession d'un volant d'inertie

Soit un disque solide de masse m, en rotation à la vitesse angulaire Ω autour de son axe de symétrie. Posé sur un axe horizontal de demi-longueur d, le poids fait **varier son axe de rotation** : son **moment cinétique change de direction**, dans le plan perpendiculaire au poids, avec la vitesse angulaire de précession :

$$\boxed{\omega_p = \frac{mgd}{J_z\Omega}}$$

Démonstration M8.6 : Précession



1. **Système** : {volant d'inertie} solide indéformable de masse m
2. **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.
3. **Repère** : cylindrique $(\mathrm{O},\vec{u_r},\vec{u_\theta},\vec{u_z})$, O centre de la liaison pivot.
4. **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = d\vec{u_r}$
5. **Bilan des actions** :

Origine	Force	Moment
Poids	$\vec{P} = -mg\vec{u_z}$	$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{P}) = mgd\vec{u_\theta}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(t) = J_r\Omega\vec{u_r}$
Support	$\vec{N} = N\vec{u_z}$	$\vec{0}$

6. **TMC** :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{P}) \Leftrightarrow J_r\Omega\dot{\theta}_p\vec{u_\theta} = mgd\vec{u_\theta} \Leftrightarrow \boxed{\omega_p = \frac{mgd}{J_r\Omega}}$$

■

Vidéos

◇ Animation 3D

◇ Walter Lewin

IV Énergétique des systèmes de points

IV/A Énergie cinétique

Définition M8.10 : Énergie cinétique d'un solide

L'énergie cinétique d'un solide est la **somme des énergies cinétiques de ses points** :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathcal{S},t) = \sum_i \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathrm{M}_i,t) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i/\mathcal{R}}^2(t)$$

Propriété M8.9 : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S},t)$ en rotation

L'énergie cinétique d'un solide en rotation à la vitesse angulaire $\omega(t)$ autour de l'axe Δ est

$$\boxed{\mathcal{E}_{c,\mathrm{rot}}(t) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2(t)}$$

Démonstration M8.7 : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S},t)$ en rota°

En rotation, $v_{\mathrm{M}_i}(t) = r_i \omega(t)$, d'où

$$\mathcal{E}_{c,\mathrm{rot}}(t) = \sum_i \frac{1}{2} m_i {r_i}^2 \omega^2(t)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{c,\mathrm{rot}}(t) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_i m_i {r_i}^2\right)}_{J_\Delta} \omega(t)$$

IV/B Puissance des forces

Propriété M8.10 : Puissance des forces intérieures

La puissance des forces intérieures d'un système <u>indéformable</u> est nulle.

Démonstration M8.8 : Puissance des forces intérieures

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{int}\to\mathcal{S}}) = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{int}\to i}) = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i} \cdot \vec{v}_{\mathrm{M}_i/\mathrm{M}_j} = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{int}\to\mathcal{S}}) = \sum_i \sum_{j\neq i} \overbrace{\underbrace{\vec{F}_{j\to i}}_{\parallel\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i}} \cdot \underbrace{(\vec{\omega}_{\mathcal{S}}(t) \wedge \overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i})}_{\perp\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i}}}^{=0} \quad \text{car} \quad \textbf{forces centrales}$$

Propriété M8.11 : $\mathcal{P}(\vec{F})$ en rotation

La **puissance d'une force** sur un corps en rotation à $\vec{\omega}(t)$ autour de Δ est

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{rot}}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = \mathcal{M}_\Delta \omega(t)}$$

Outils M8.2 : Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{d}$ est le **scalaire** : $\boxed{[\vec{a},\vec{b},\vec{d}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{d})}$

Antisymétrie

$$\begin{aligned} &\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{d}) \\ =& -\vec{b}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{d}) \\ =& -\vec{a}\cdot(\vec{d}\wedge\vec{b}) \end{aligned}$$

Alternance

$$\begin{aligned} &\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{d}) \\ =& \vec{b}\cdot(\vec{d}\wedge\vec{a}) \\ =& \vec{d}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) \end{aligned}$$

Volume

Le parallélépipède formé par les vecteurs a un volume :

$$\boxed{V = \left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{d})\right|}$$

Démonstration M8.9 : $\mathscr{P}(\vec{F})$ en rotation

$$\mathscr{P}_{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot(\vec{\omega}(t)\wedge\overrightarrow{\text{OM}}(t)) = (\overrightarrow{\text{OM}}(t)\wedge\vec{F})\cdot\vec{\omega}(t)$$ ■

IV/C Théorèmes énergétiques

Théorème M8.3 : Énergétique pour le solide

Pour un système $\mathcal{S}$ **déformable ou non** dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

TEC, TPC

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} &= \mathcal{W}_{\text{ext}/\mathcal{R}} + \mathcal{W}_{\text{int}/\mathcal{R}}\\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} &= \mathscr{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} + \mathscr{P}_{\text{int}/\mathcal{R}}\end{aligned}}$$

TEM, TPM

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} &= \mathcal{W}_{\text{ext,NC}/\mathcal{R}} + \mathcal{W}_{\text{int,NC}/\mathcal{R}}\\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} &= \mathscr{P}_{\text{ext,NC}/\mathcal{R}} + \mathscr{P}_{\text{int,NC}/\mathcal{R}}\end{aligned}}$$

Les grandeurs **intérieures** sont **nulles** pour un système **indéformable**.

Preuve M8.3 : Énergétique pour le solide

Il suffit d'appliquer le TPC ou TPM à chaque point matériel M_i du système et de sommer.

Corollaire M8.1 : Équivalence TPC/TMC scalaire

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} &= \mathscr{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}})\omega(t)\\ \Leftrightarrow J_\Delta\ddot{\theta}(t)\cancel{\omega(t)} &= \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}})\cancel{\omega(t)}\\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\Delta}{\mathrm{d}t} &= \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}})\end{aligned}$$

Application M8.2 : Pendule pesant par TPC

Retrouver l'équation différentielle du pendule pesant par approche énergétique.

On part des résultats précédents (Application 8.1) et on calcule $\mathcal{E}_c$ et $\mathscr{P}(\vec{P})$:

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S},t) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P})\omega$$

Or, TPC $\Rightarrow$
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\vec{P}) \Leftrightarrow J_\Delta\dot{\omega}\cancel{\omega} = -mg\ell\sin(\theta)\cancel{\omega}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{J_\Delta}\sin(\theta) = 0}$$ ■

Définition M8.11 : Intégrale première du mouvement

Une intégrale première du mouvement est une équation de conservation[2] faisant intervenir une coordonnée du mouvement et sa première dérivée ; c'est souvent une **forme intégrée de l'équation différentielle**

2. Souvent celle de l'énergie mécanique

Exemple M8.7 : Intégrale première du mouvement

Avec l'équation du mouvement du pendule pesant, on obtient une intégrale première du mouvement en **multipliant par** $\dot{\theta}$ et **en intégrant**. On retrouvera l'énergie mécanique constante :

$$J_z\ddot{\theta} \times \dot{\theta} + mg\ell\sin(\theta) \times \dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_z\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos(\theta)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}J_z\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos(\theta) = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{cte}$$

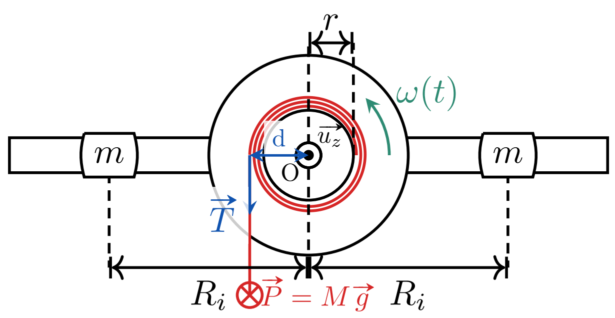
Important M8.2 : Analogie point/solide en rotation

	Inertie	Déplac$^{\text{t}}$	Quantité	Causes	Évolution	$\mathcal{E}_c$	$\mathcal{P}$
Point	m	$\vec{v}$	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{F}$	$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}}$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\vec{F}\cdot\vec{v}$
Solide	J_Δ	$\vec{\omega}$	$\vec{\mathcal{L}} = J_\Delta\vec{\omega}$	$\vec{\mathcal{M}}$	$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}$	$\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$	$\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{\omega}$

Expérience M8.1 : Mesure d'un moment d'inertie

On étudie un système en rotation disposant de deux bras sur lesquels se fixent deux masses $m = (258{,}24 \pm 0{,}01)$ g à des distances variables R_i.

On attache une masse $M = (100{,}08 \pm 0{,}01)$ g à un fil, enroulé autour du disque principal par une poulie. Le fil transmet la force du poids *via* sa tension. On appelle ℓ la longueur enroulée.



La longueur de fil enroulé est égale au périmètre du disque principal. Avec θ_f l'angle total d'enroulement, on a

$$\ell = r\theta_f \Leftrightarrow \boxed{\theta_f = \frac{\ell}{r}}$$

En lâchant la masse, le système est mis en rotation. On appelle ω_f la vitesse angulaire du système lorsque le fil de la masse se détâche.

Une pince optique est installée afin de détecter le passage des bras lors de la rotation. Ceci permet de déterminer la vitesse angulaire finale ω_f. La variation d'énergie cinétique s'exprime alors :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J_z\omega_f^2 = \mathcal{W}(\vec{P})$$

Or, $$\mathcal{W}(\vec{P}) = \int \mathcal{P}(\vec{P}) = \int \mathcal{M}_z\omega(t)\mathrm{d}t = Mgr\int_0^{\theta_f}\mathrm{d}\theta$$

Ainsi $$\frac{1}{2}J_z\omega_f^2 = Mgr\theta_f \Leftrightarrow \boxed{J_z = \frac{2Mgr\theta_f}{\omega_f^2}}$$

On peut ainsi vérifier la relation $\boxed{J_z = aR_i^2 + \text{cte}}$ (il faut prendre en compte le moment d'inertie du disque principal et des bras). L'expérience est réalisée sur le `Capytale` suivant : https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/a42d-3143216.