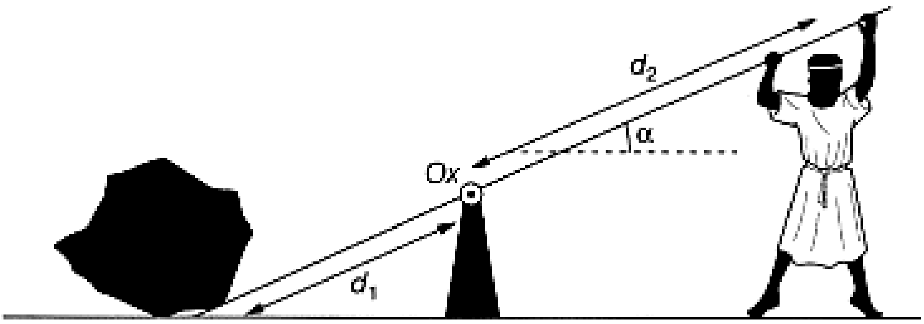
Correction du TD d'application

I Levier

ARCHIMÈDE (240 av. J.-C.) est le premier à établir la théorie physique du levier et de la balance. Il aurait dit[1] :

« Donnez-moi un point fixe et un levier, et le soulèverai la Terre. »

Imaginons une situation plus réaliste où ARCHIMÈDE utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200\,\text{kg}$. Les longueurs sont $d_1 = 50\,\text{cm}$, $d_2 = 1{,}5\,\text{m}$ et $\alpha = 60°$.

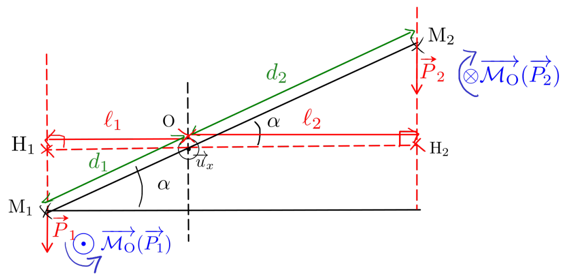


1) ARCHIMÈDE se suspend verticalement au levier. En utilisant les bras de levier, quelle doit être sa masse minimale pour que le rocher se soulève ?

Réponse

On fait un schéma et on détermine les distances des bras de levier pour calculer les moments :

$$\mathcal{M}_x(\vec{P}_1) = +\ell_1 Mg = Md_1 g\cos(\alpha)$$
$$\mathcal{M}_x(\vec{P}_2) = -\ell_2 mg = -md_2 g\cos(\alpha)$$



Pour avoir rotation, il faut que le moment total soit **négatif** (sens horaire autour de (Ox)), soit

$$\underbrace{\cancel{g\cos(\alpha)}}_{\neq 0}(Md_1 - md_2) < 0$$
$$\Leftrightarrow md_2 > Md_1$$
$$\Leftrightarrow \boxed{m > M\frac{d_1}{d_2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M = 200\,\text{kg} \\ d_1 = 0{,}50\,\text{m} \\ d_2 = 1{,}5\,\text{m} \end{cases}$$
$$\text{A.N.} : \underline{m_{\min} = 67\,\text{kg}}$$

◇

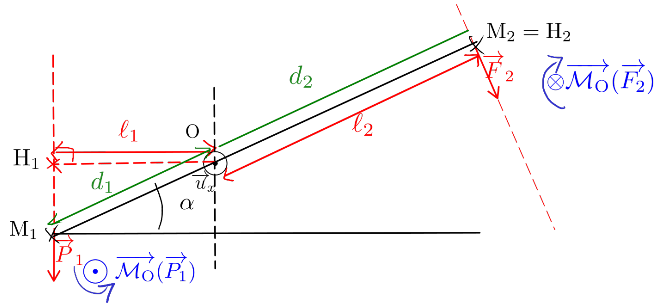
1. Voir https://www.persee.fr/doc/antiq_0770-2817_1955_num4_1_3257 pour une restitution plus fidèle.

2) ARCHIMÈDE décide de faire varier la direction de la force qu'il exerce sur le levier sans changer sa norme. Comment doit-il procéder pour être le plus efficace ? Quel est le gain par rapport au cas précédent ?

Réponse

On fait un schéma et on détermine les distances des bras de levier pour calculer les moments :

En modifiant la direction de la force, donc de la droite d'action, la longueur du bras de levier est modifiée : on a, au mieux, $\boxed{\ell_2 = d_2}$, obtenu pour une force perpendiculaire au levier.



$$\sum_i \mathcal{M}_x(\overrightarrow{F}_i) < 0$$

$$\Leftrightarrow M\cancel{g}d_1\cos(\alpha) - m\cancel{g}d_2 < 0 \qquad \|\overrightarrow{F}_2\| = mg$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m > M\frac{d_1}{d_2}\cos(\alpha)}$$

$$\text{A.N. : } \underline{m_{\text{min}} = 33\,\text{kg}}$$

Autrement dit, avec $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, c'est 330 N de force gagné par rapport à la situation précédente, soit un gain de 50% !

Important M8.1 : À retenir

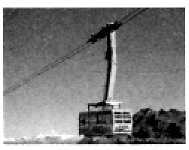
◇ Dessinez les moments et les bras de levier des forces **et** indiquez la direction de rotation induite par la force.

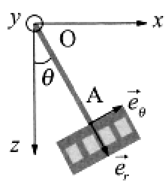
◇ Le moment total est la somme des moments

◇

II Pendule pesant non amorti

Une benne de téléphérique, de masse $M = 2{,}0 \times 10^3$ kg, est accrochée au point A situé à l'extrémité inférieure d'un bras de masse $m = 300$ kg relié à des câbles au point O. On note $\ell = 4{,}5$ m la distance entre O et G le centre de gravité de l'ensemble {benne+bras}, situé sur l'axe (OA).

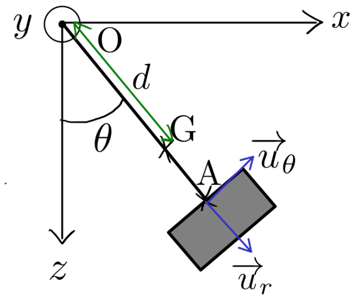




On note J_{tot} le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation y, et la liaison est supposée parfaite. On effectue un test d'oscillations de la benne, le point O étant maintenant fixe.

1) En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ.

Réponse



- **Système** : {benne+bras} solide de masse $m_{\text{tot}} = m + M$
- **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.
- **Repère** : cylindrique $(\text{O},\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_y})$ avec O centre de la liaison pivot.
- **Repérage** :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{OG}} = \ell\overrightarrow{e_r} \\ \overrightarrow{v}(\text{G}) = \ell\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{a}(\text{G}) = \ell\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - \ell\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

- **Bilan des forces** :
  - $\overrightarrow{P} = m_{\text{tot}}g\overrightarrow{e_y} = m_{\text{tot}}g(\cos(\theta)\overrightarrow{e_r} - \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta})$
  - $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ car pivot parfaite
- **Bilan des moments** :
  - $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{O}}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{\text{OG}} \wedge \overrightarrow{P} = (\ell\overrightarrow{e_r}) \wedge (m_{\text{tot}}g(\cos(\theta)\overrightarrow{e_r} - \sin(\theta)\overrightarrow{e_\theta})) \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{O}}(\overrightarrow{P}) = -m_{\text{tot}}g\ell\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}}$

    Par projection, on retrouve le résultat qu'on aurait eu avec le bras de levier :

$$d = \ell\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{P}\| = m_{\text{tot}}g \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{M}_y(\overrightarrow{P}) = -m_{\text{tot}}g\ell\sin(\theta)}$$

  - $\mathcal{L}_y(\mathcal{S}) = J_{\text{tot}}\dot{\theta}$
- **TMC** : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{L}_y(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_y(\overrightarrow{P}) \Leftrightarrow J_{\text{tot}}\ddot{\theta} = -m_{\text{tot}}g\ell\sin(\theta) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{m_{\text{tot}}g\ell}{J_{\text{tot}}}\sin(\theta) = 0}$

---

2) En déduire la période T des petites oscillations de la benne.

Réponse

Petites oscillations $\Rightarrow \sin(\theta) \underset{\theta\to 0}{\sim} \theta$, donc oscillateur harmonique :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{\text{tot}}gd}{J_{\text{tot}}}} \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{tot}}}{m_{\text{tot}}gd}}}$$

---

3) Sachant que la période des petites oscillations est $T = 4{,}1\,\text{s}$ et que le bras de longueur $L = 3{,}0\,\text{m}$ a un moment d'inertie $J' = \frac{1}{3}mL^2$ par rapport à l'axe y, calculer le moment d'inertie J de la benne par rapport à y. On rappelle que $g = 9{,}81\,\text{m·s}^{-2}$ et on indique que dans ce cas, les moments d'inertie se somment.

Réponse

En restant autour du même axe, les moments cinétiques se somment, soit $J_{\text{tot}} = J_{\text{bras}} + J_{\text{benne}}$. On isole J_{tot} :

$$\begin{aligned} J_{\text{tot}} &= \frac{T^2}{4\pi^2}m_{\text{tot}}gd \\ \Leftrightarrow J &= \frac{T^2}{4\pi^2}m_{\text{tot}}gd - J' \\ \Leftrightarrow &\boxed{J = \frac{T^2}{4\pi^2}m_{\text{tot}}gd - \frac{mL^2}{3}} \\ \text{A.N. : } &\underline{J = 4{,}2 \times 10^4\,\text{kg·m}^2} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T = 4{,}1\,\text{s} \\ L = 3{,}0\,\text{m} \\ d = 4{,}5\,\text{m} \\ m = 300\,\text{kg} \\ m_{\text{tot}} = 2{,}3 \times 10^3\,\text{kg} \\ g = 9{,}81\,\text{m·s}^{-2} \end{cases}$$

III Choc de deux chariots

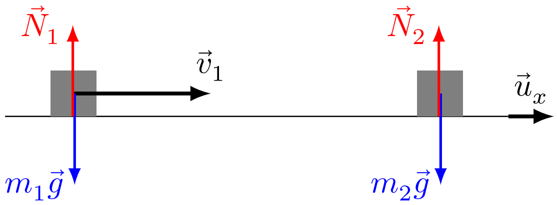
Deux masses m_1 et m_2 sont montées sur un banc horizontal à coussins d'air, de sorte qu'on peut négliger tout frottements. On les projette l'une contre l'autre avec des vitesses initiales $\vec{v}_1 = v_1\vec{u_x}$ et $\vec{v}_2 = \vec{0}$ (m_2 initialement à l'arrêt).

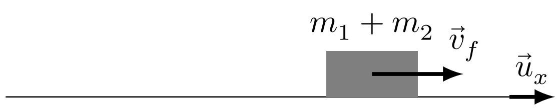
1) *Dans cette partie, on suppose qu'après le choc les masses restent solidaires.*

a – Quelle est la vitesse commune des deux masses après le choc ?

Réponse

◇ **Système** : {2 chariots} considérés chacun comme un point matériel
◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
◇ **Base** : $(\vec{u_x},\vec{u_z})$ avec $\vec{u_z}$ vertical ascendant
◇ **BdF** :
- ▷ $\vec{P}_1 = -m_1 g\vec{u_z}$ et $\vec{N}_1\vec{u_z}$ pour le premier
- ▷ $\vec{P}_2 = -m_2 g\vec{u_z}$ et $\vec{N}_2\vec{u_z}$ pour le second
- ▷ Aucune force de frottements, donc système pseudo-isolé ($\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$)





Ainsi, $\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ soit $\vec{p}_{\text{tot}} = \overrightarrow{\text{cte}}$. Ainsi,

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}_f \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{v}_f = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1\vec{u_x}}$$

◇

b – Quel est le travail des actions intérieures lors du choc ? Commenter le signe du résultat.

Réponse

On utilise le TEC :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{W}_{\text{int}} + \underbrace{\mathcal{W}_{\text{ext}}}_{=0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{W}_{\text{int}} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \frac{1}{2}(m_1+m_2){v_f}^2 - \frac{1}{2}m_1{v_1}^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_{\text{int}} = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}{v_1}^2 < 0}$$

Le travail des forces intérieures est donc **négatif**, ce qui est cohérent avec le fait que le système perd de l'énergie cinétique, transformée en énergie thermique lors du choc.

◇

2) *On considère dans cette partie que le choc est élastique, c'est-à-dire que l'énergie cinétique de l'ensemble des deux masses est conservée au cours du choc et qu'elles ne sont plus solidaires après.*

a – Montrer que les vitesses v_1' et v_2' après le choc s'expriment :

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{et} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Réponse

On a toujours un système pseudo-isolé :

On a donc la conservation de la quantité de mouvement totale, ainsi que l'énergie cinétique totale ; ainsi entre les deux situations :

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1' + \frac{1}{2} m_2 v_2' \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases}}$$

◇

b – Que se passe-t-il si $m_2 \gg m_1$?

Réponse

Si $m_2 \gg m_1$, alors $v_1' \to -v_1$ et $v_2' \to 0$. La masse m_1 rebondit sur la masse m_2, qui elle reste immobile. C'est la situation du lancer d'une balle rebondissante sur un mur.

◇

c – À quelle condition sur m_1 et m_2 est-il possible de réaliser un « carreau », i.e. échanger lors du choc les vitesses des deux masses, comme à la pétanque ?

Réponse

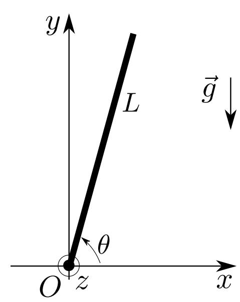
Pour faire un carreau, on veut $v_1' = 0 \Rightarrow \boxed{m_1 = m_2}$, et on aura bien $v_2' = v_1$.

◇

☆ IV Chute d'un arbre

On étudie la chute d'une arbre : on souhaite connaître la durée que met l'arbre, une fois tranché à sa base, pour tomber au sol.

On modélise la situation par une tige homogène de hauteur $L = 10\,\text{m}$ et de masse m, reliée au sol par une liaison pivot parfaite et qui part d'un angle initial $\theta_0 = 1{,}5\,\text{rad}$ avec une vitesse initiale nulle. On donne le moment d'inertie par rapport à Oz : $J_z = \frac{1}{3} m L^2$.



1) Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle de pesanteur de l'arbre.

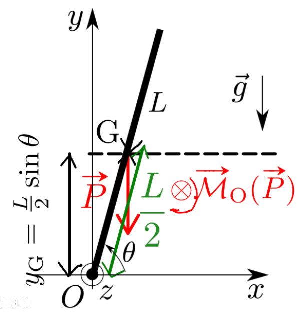
Réponse

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_{p,p} = mgy_G + 0$$

Or

$$y_G = \frac{L}{2}\sin(\theta) \Rightarrow \mathscr{E}_{p,p} = \frac{mgL}{2}\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{mgL}{2}\sin(\theta)} \tag{M8.1}$$



2) Justifier que l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement. Exprimer cette constante en utilisant les conditions initiales.

Réponse

Le système n'est soumis qu'à son poids, conservatif, et à l'action de la liaison pivot, supposée parfaite donc sans frottement. Le système est donc conservatif, et par TPM on a $\frac{d\mathscr{E}_m}{dt} = 0$.

On a donc $\mathscr{E}_m(t) = \mathscr{E}_m(0)$, or $\mathscr{E}_c(0) = 0$ et $\mathscr{E}_{p,p}(0) = \frac{mgL}{2}\sin(\theta_0)$, soit

$$\mathscr{E}_m = \frac{mgL}{2}\sin(\theta_0) \tag{M8.2}$$

3) En déduire la relation $\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}$

Réponse

$$(\text{M8.1}) = (\text{M8.2})$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{mgL}{2}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3mgL}{mL^2}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))$$
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}$$

Or, de toute évidence θ **diminue** puisque l'arbre tombe ($\mathcal{M}_z(\vec{P}) < 0$), soit

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}}$$ ■

4) Retrouver ce résultat par le TMC.

Réponse

Avec le bras de levier, on a $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -\dfrac{mgL}{2}\cos(\theta)$. Ainsi, avec le TMC,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} &= \mathcal{M}_z(\vec{P}) \\
\Leftrightarrow J\ddot{\theta} &= -\frac{mgL}{2}\cos(\theta) && \times\dot{\theta} \\
\Leftrightarrow J\ddot{\theta}\dot{\theta} &= -\frac{mgL}{2}\cos(\theta)\dot{\theta} && \textstyle\int(\cdot)\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow J\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\cancel{\mathrm{d}t}}\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right]\cancel{\mathrm{d}t} &= -\frac{mgL}{2}\int_{t=0}^{t}\cos(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\cancel{\mathrm{d}t}}\cancel{\mathrm{d}t} && \textstyle\int\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int\mathrm{d}\left[\sin(\theta)\right] \\
\Leftrightarrow \dot{\theta}^2(t) - \underbrace{\cancel{\dot{\theta}^2(0)}}_{=0} &= -\frac{mgL}{2J}\left(\sin(\theta)-\sin(\theta_0)\right) && J = \tfrac{mL^2}{3} \\
\Leftrightarrow \dot{\theta}^2(t) &= -\frac{3\cancel{m}g\cancel{L}}{\cancel{m}L^{\cancel{2}}}\left(\sin(\theta)-\sin(\theta_0)\right) && \text{On prend l'opposé} \\
\Leftrightarrow \dot{\theta}^2(t) &= \frac{3g}{L}\left(\sin(\theta_0)-\sin(\theta)\right) && \tfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} < 0 \\
\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\sin(\theta_0)-\sin(\theta)\right)}} &
\end{aligned}
$$

■

On retiendra ici deux choses :

Important M8.2 : À retenir

- ◇ Penser à multiplier par $\dot{\theta}$ pour facilement intégrer les relations avec $\ddot{\theta}$ et des fonctions transcendantales (cos, sin. . .)
- ◇ Attention en prenant la racine carré d'une fonction : toujours écrire les deux valeurs possibles et vérifier la faisabilité physiquement.

◇

5) Pour exprimer la durée T de la chute, isoler dt dans l'expression précédente puis l'intégrer entre $\theta = \theta_0$ et $\theta = 0$. Faire l'application numérique, sachant que $\displaystyle\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} \approx 5{,}44$ pour $\theta_0 = 1{,}5\,\mathrm{rad}$.

Réponse

On inverse pour avoir

$$\mathrm{d}t = \frac{-\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\sin(\theta_0)-\sin(\theta)\right)}}$$

Or, quand $t\big|_0^{t_f}$, on a $\theta\big|_{\theta_0}^{\theta_f=0}$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_f}\mathrm{d}t &= \int_{\theta_0}^{0}\frac{-\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\sin(\theta_0)-\sin(\theta)\right)}} && \text{On inverse les bornes avec } - \\
\Leftrightarrow t_f - 0 &= \sqrt{\frac{L}{3g}}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin(\theta_0)-\sin(\theta)}} \\
\text{A.N. : } & \underline{t_f = 3{,}2\,\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

◇

6) *Bonus* Écrire un script `Python` permettant de calculer numériquement l'intégrale précédente. Vous utiliserez pour cela la fonction `quad` de la librairie `scipy.integrate`.

Réponse

On obtient bien $t_f = 3{,}17\,\mathrm{s}$ avec :

```python
from scipy.integrate import quad  # Module d'intégration "quad"
import numpy as np

# Intervalle d'intégration
theta_0 = 1.5 # rad
theta_f = 0   # rad

# Constantes
L = 10                # m
g = 9.81              # m.s^-2
K = np.sqrt(L/(3*g)) # s

# Fonction à intégrer
def function(theta):
    return K/(np.sqrt(np.sin(theta_0) - np.sin(theta)))

# Calcul de l'intégrale
res, err = quad(function, theta_f, theta_0)

# Affichage du résultat
print(f"Résultat de l'intégrale = {res:.2f} ± {err:.2f}")
```