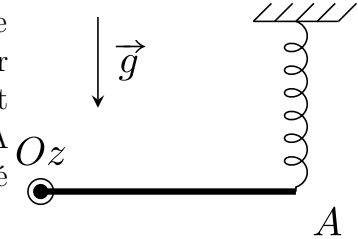


Correction du TD d'entraînement

★☆☆ I Barre fixée à ses extrémités

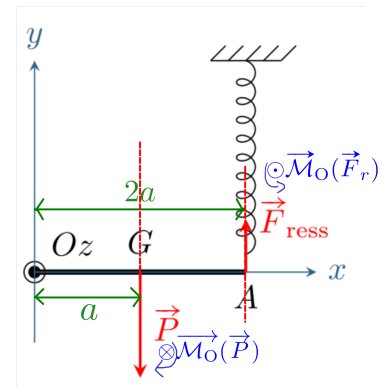
Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre homogène de masse m , de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz (liaison parfaite). Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k . L'autre extrémité du ressort est fixe.



- 1) À l'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. En déduire la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k, ℓ_0, m et g .

Réponse

- ◇ **Système** : {barre}
- ◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
- ◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$
- ◇ **Repérage** : $\overrightarrow{OG} = a\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{OA} = 2a\vec{u}_x$
- ◇ **BdF** : à l'équilibre, le ressort est vertical, soit
 - ▷ $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$;
 - ▷ $\vec{F}_r = k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_y$.
 - ▷ $\vec{F}_f = \vec{0}$ pas de frottements



- ◇ **BdM** : avec les bras de levier, qui se confondent ici avec les distances des points d'application puisque les droites d'actions sont perpendiculaires à l'objet, on trouve
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -a \times mg$ (sens horaire) ;
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \times k(\ell_{eq} - \ell_0)$.
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{F}_f) = 0$ pivot parfaite.
- ◇ **TMC** : à l'équilibre, pas de rotation donc

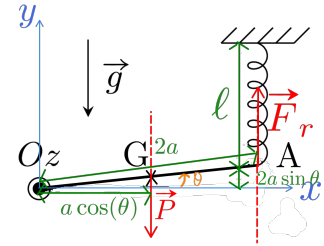
$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -mga + 2ak(\ell_{eq} - \ell_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}}$$



- 2) La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.

Réponse

Avec un angle, les droites d'actions ne sont plus perpendiculaires à la barre donc les bras de levier ne se confondent plus avec les distances des points d'application. Il faut refaire un schéma et recalculer les moments :



◇ **BdM :**

$$\triangleright \mathcal{M}_z(\vec{P}) = -a \cos(\theta) \times mg;$$

$$\triangleright \mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \cos(\theta) \times k(\ell - \ell_0)$$

Or, ℓ n'est plus ℓ_{eq} puisqu'on n'est plus à l'équilibre. On trouve $\ell = \ell_{eq} - 2a \sin(\theta)$, soit finalement

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \cos(\theta) \times k(\ell_{eq} - 2a \sin(\theta) - \ell_0)$$

$$\triangleright \mathcal{L}_z = J_z \dot{\theta}$$

◇ **TMC :**

$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_z(\vec{F}_i)$$

$$\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} = -a \cos(\theta) \times mg + 2a \cos(\theta) \times k(\ell_{eq} - 2a \sin(\theta) - \ell_0) \quad \left. \begin{array}{l} \cos(\theta) \approx 1 \\ \sin(\theta) \approx \theta \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} = -mga + 2ak(\ell_{eq} - 2a\theta - \ell_0)$$

$$\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} = -mga - 4ak\theta + 2ak(\ell_{eq} - \ell_0)$$

$$\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} = -mga + mga - 4ak\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3k}}$$

$$J_z = \frac{4}{3}ma^2$$

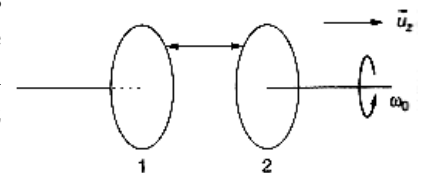
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

■



II Entraînement par frottements

On considère le système de deux disques en rotation, de moments d'inertie J_1 et J_2 par rapport à l'axe horizontal orienté par $\vec{u}_z$. Ils sont tous les deux en liaison pivot parfaite. Le second disque a une vitesse angulaire ω_0 , alors que le premier est initialement immobile. On translate lentement les disques le long de l'axe jusqu'à ce qu'ils rentrent en contact. Il n'y a plus de frottement après la mise en contact.



- 1) À quelle condition sur les vitesses angulaires n'y a-t-il plus de frottements ? Déterminer alors les vitesses angulaires finales de deux disques par application du TMC sur le système total.

Réponse

Il n'y a plus de frottements si les deux disques vont à la même vitesse angulaire. Or, le moment cinétique **total** se conserve puisque $\mathcal{M}_z(\vec{P}_1) = \mathcal{M}_z(\vec{P}_2) = 0$ (forces passent par l'axe de rotation) et les liaisons pivot sont supposées parfaites ; ainsi $\frac{d\mathcal{L}_z(\mathcal{S})}{dt} = 0$ soit $\mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = \text{cte}$.

En prenant une situation avant contact et à la fin du contact, on obtient

$$\left. \begin{aligned} 0 + J_2\omega_0 &= J_1\omega_{1,f} + J_2\omega_{2,f} \\ \Leftrightarrow \omega_f &= \frac{J_2}{J_1 + J_2}\omega_0 \end{aligned} \right\} \omega_{1,f} = \omega_{2,f} = \omega_f$$

Ce résultat ne dépend aucunement du type de frottements ; seule la durée du régime transitoire est impactée par l'expression des frottements.



- 2) Faire un bilan d'énergie pour chaque disque séparément.

Réponse

Avec l'énergie potentielle de pesanteur prise à 0, on a :

- 1) $\Delta\mathcal{E}_{m,1} = \Delta\mathcal{E}_{c,1} = \frac{1}{2}J_1\omega_f^2 - 0$ soit

$$\Delta\mathcal{E}_{m,1} = \frac{1}{2}J_1 \left(\frac{J_2}{J_1 + J_2} \right)^2 \omega_0^2 > 0$$

Le disque 1 gagne donc de l'énergie cinétique grâce aux frottements avec le second disque.

- 2) Pour le second,

$$\Delta\mathcal{E}_{m,2} = \Delta\mathcal{E}_{c,2} = \frac{1}{2}J_2\omega_f^2 - \frac{1}{2}J_2\omega_0^2$$

Soit $\Delta\mathcal{E}_{m,2} = \frac{1}{2}J_2 \left(\left(\frac{J_2}{J_1 + J_2} \right)^2 - 1 \right) \omega_0^2 < 0$

Évidemment, le second **perd** de l'énergie : il l'a cédée au premier et perdu une partie par frottements.



- 3) Faire le même bilan pour le système total.

Réponse

On somme les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_m &= \Delta\mathcal{E}_{m,1} + \Delta\mathcal{E}_{m,2} \\ &= \frac{1}{2}(J_1 + J_2) \frac{J_2^2}{(J_1 + J_2)^2} \omega_0^2 - \frac{1}{2}J_2\omega_0^2 \\ \Leftrightarrow \Delta\mathcal{E}_m &= -\frac{1}{2} \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \omega_0^2 < 0 \end{aligned}$$



- 4) Commenter les résultats.

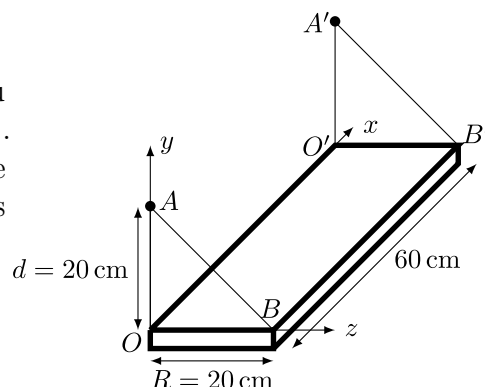
Réponse

À cause des frottements, l'énergie mécanique totale diminue. En revanche, l'énergie mécanique d'un sous-système peut augmenter ou diminuer.



★★ III Étagère murale

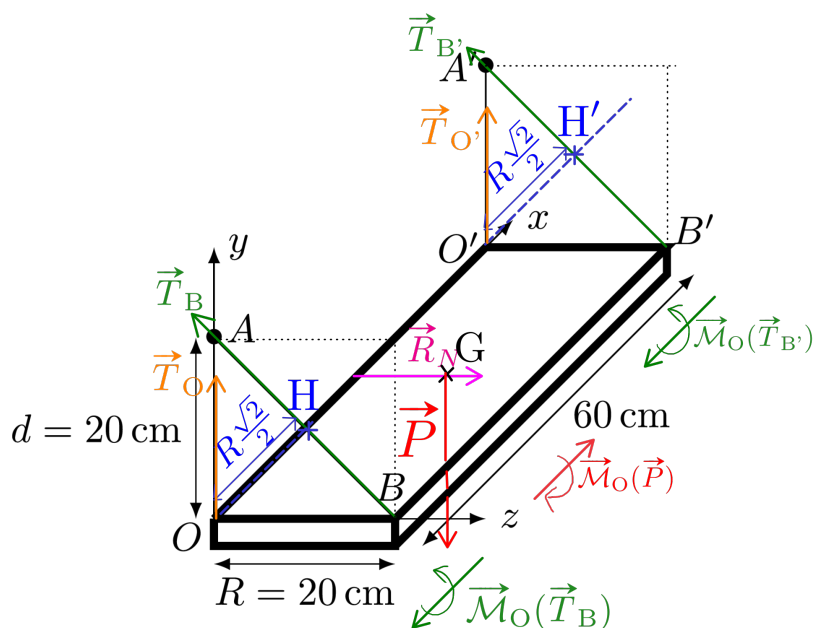
Une étagère est suspendue par quatre câbles métalliques et fixée au mur uniquement par deux pattes de fixation murale (en A et A'). La planche est en bois, de masse $m = 1,0 \text{ kg}$, de centre de masse G situé à la distance $R/2$ de l'axe $\Delta = (OO')$ et nous négligerons la masse des câbles.



- 1) Exprimer les 4 forces de tension des câbles en fonction de normes arbitraires, la force de réaction $\vec{R}_N$ du mur sur la planche lorsque l'étagère est posée et en équilibre ainsi que le poids de l'étagère. $\vec{R}_N$ est supposée normale au mur. Calculer les valeurs numériques des normes des forces à l'aide de l'équilibre.

Réponse

On fait un schéma :



◇ BdF :

- ▷ En B et B', les tensions des câbles obliques sont portées par les vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{B'A'}$. Elles ont la même norme T_1 par symétrie, et on peut déduire les angles $\widehat{OBA} = 45^\circ = \widehat{O'B'A'}$ puisque les triangles sont isocèles et rectangles. Ainsi, avec $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(45^\circ)$, on trouve

$$\vec{T}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} T_1 (\vec{u}_y - \vec{u}_z) = \vec{T}_{B'}$$

- ▷ En O et O', les tensions sont égales et verticales, soit

$$\vec{T}_O = T_2 \vec{u}_y = \vec{T}_{O'}$$

▷ De plus, la réaction du mur est $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_z$.

▷ Enfin, le poids s'exprime $\vec{P} = -mg \vec{u}_y$

◇ **BdM** :

▷ le moment des tensions en B et B' se trouvent par le bras de levier. Avec H le projeté orthogonal de O sur AB, on trouve $OH = R \frac{\sqrt{2}}{2}$ (OBA triangle rectangle isocèle, OH moitié de la diagonale et diagonale d'un carré de côté $a = a\sqrt{2}$). Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) &= 2 \times \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B) = \underbrace{2}_{\text{sens direct}} OH \|\vec{T}_B\| \Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) = \underbrace{-2R \frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{OH}} \underbrace{T_1}_{\|\vec{T}_B\|} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) = -RT_1 \sqrt{2}} \end{aligned}$$

▷ Les moments des tensions $\vec{T}_O$ et $\vec{T}_{O'}$ ainsi que la réaction du support $\vec{R}_N$ sont tous nuls, puisque leurs droites d'actions passent par l'axe Δ .

▷ Finalement, à l'équilibre la droite d'action du poids est à une distance $R/2$ de l'axe de rotation, et comme le poids fait tourner l'étagère dans le sens horaire, on a

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2}$$

◇ **PFD** : à l'équilibre, la somme des forces est nulle, soit

$$\begin{cases} T_1 \sqrt{2} + 2T_2 = mg & \text{sur } \vec{u}_y \\ T_1 \sqrt{2} = R_N & \text{sur } \vec{u}_z \end{cases}$$

◇ **TMC** : à l'équilibre, il n'y a pas de rotation donc la somme des moments est nulle :

$$RT_1 \sqrt{2} = \frac{mgR}{2}$$

◇ **Ccl** : on trouve

$$\boxed{T_1 = \frac{mg}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \underline{T_1 = 3,5 \text{ N}} \quad ; \quad \boxed{R_N = \frac{mg}{2}} \Rightarrow \underline{R_N = 4,9 \text{ N}} \quad ; \quad \boxed{T_2 = \frac{mg}{4}} \Rightarrow \underline{T_2 = 2,5 \text{ N}}$$



2) On imagine que les 2 câbles fixés en B et B' se rompent en même temps. La planche n'est alors retenue que par les câbles OA et OA', et elle tourne donc autour de l'axe $\Delta = (OO')$. Nous négligerons son épaisseur et admettrons que son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ vaut $J_\Delta = mR^2$. Montrer qu'alors :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{mgR}{J_\Delta} \sin(\theta)$$

En déduire la vitesse angulaire de la planche lorsqu'elle percute le mur.

Réponse

On reconnaît l'énergie cinétique dans la partie gauche de l'équation proposée. Il serait donc logique de partir du TEC. On sait que la puissance d'une force de rotation est $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\omega$, donc le travail élémentaire associé est $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) d\theta$. Or, les tensions en B et B' n'existent plus et les moments des tensions en O et de la réaction normale sont toujours nuls : il ne reste que le moment du poids.

Or, avec un angle θ , le bras de levier diminue et on trouve $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2} \cos(\theta)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_c &= \mathcal{W}(\vec{P}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 &= \int_0^\theta \frac{mgR}{2} \cos(\theta) d\theta \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 &= \frac{mgR}{2} \sin(\theta) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{c, \text{rot}} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2} \cos(\theta) \\ \int_0^\theta \cos(\theta) d\theta = [\sin(\theta)]_0^\theta \\ \sin(0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{mgR}{J_\Delta} \sin(\theta)}$$

Quand l'étagère touche le mur, $\theta = \frac{\pi}{2}$, d'où

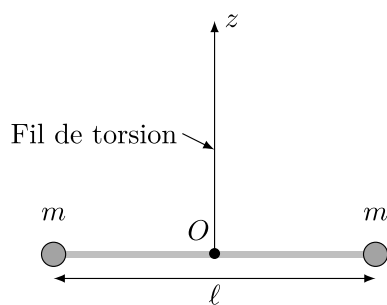
$$\boxed{\dot{\theta}_f = \sqrt{\frac{3g}{R}}} \Leftrightarrow \underline{\dot{\theta}_f = 12 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$



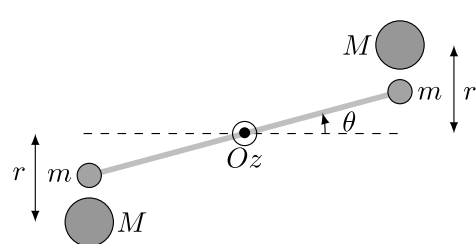
★ IV Expérience de CAVENDISH

L'expérience réalisée par CAVENDISH en 1789 a permis à ce dernier d'obtenir une valeur remarquable de la constante de gravitation universelle, $\mathcal{G}$. Le dispositif est constitué de deux petites sphères, de masse $m = 0,72 \text{ kg}$, fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable, rigide, et longueur $\ell = 180 \text{ cm}$ et suspendue horizontalement, en son milieu, à un fil de torsion vertical et très fin de constante de torsion C : si la tige tourne d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre $\theta = 0$, le fil exerce ainsi le couple de rappel $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$ sur la tige.

Deux boules de plomb de masse $M = 160 \text{ kg}$ sont fixées, l'une derrière une petite sphère et l'autre devant l'autre petite sphère, à une distance $r = 20 \text{ cm}$ définie sur le schéma ci-dessous. Les deux forces d'attraction gravitationnelle produisent un couple qui fait tourner la tige d'un angle θ par rapport à sa position au repos. Les deux petites sphères se rapprochent ainsi des boules de plomb jusqu'à ce que la torsion du fil s'équilibre avec le couple gravitationnel.



Vue de face du pendule



Vue de dessus avec les boules de plomb

- 1) Nous cherchons dans un premier temps à déterminer la constante de torsion C du pendule en faisant osciller celui-ci. Les boules en plomb ne sont pas encore présentes.

a – Montrer à l'aide du TMC que l'oscillateur est harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}$.

Réponse

Soit $\Delta = (Oz)$ l'axe vertical ascendant. Chacune des deux sphères étant en mouvement de rotation de rayon $\ell/2$ autour de Δ à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et la masse de la tige étant négligée, le moment cinétique total de l'ensemble {tige+deux sphères} par rapport à Δ est $\mathcal{L}_\Delta = \frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}$.

Ce système est soumis à l'action de son poids et de la tension du fil, dont les moments par rapport à Δ sont nuls, et au couple de torsion $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$.

L'application du TMC scalaire conduit donc à

$$\frac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2C}{m\ell^2}\theta = 0}$$

C'est bien un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}$.



b – La mesure de la période T_0 des oscillations donne $T_0 = 7,0 \text{ min}$. En déduire la valeur de C .

Réponse

$$\boxed{C = \frac{2\pi^2 m\ell^2}{T_0^2}} \Rightarrow \underline{C = 2,6 \times 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}}$$



2) Les boules étant placées, déterminer l'expression de la déviation angulaire θ par rapport à la position d'équilibre. On tiendra compte du fait que θ est extrêmement faible pour évaluer le couple exercé par les deux boules de plomb.

Réponse

On se place dans le système de coordonnées polaires, de base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ pour chacune des deux sphères, et on estime que la distance entre une des sphères et la boule correspondante est

$$r - \frac{\ell}{2} \sin(\theta) \approx r - \frac{\ell}{2} \theta$$

On néglige aussi l'action de la boule la plus éloignée. On suppose de plus que la force de gravitation exercée par la boule sur la sphère est portée par $\vec{u}_\theta$, et on utilise le développement limité $(1 - x)^{-2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + 2x$:

$$\vec{F}_g = \mathcal{G} \frac{mM}{\left(r - \frac{\ell}{2}\theta\right)^2} \vec{u}_\theta \approx \frac{\mathcal{G}mM}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right) \vec{u}_\theta$$

Le moment de cette force par rapport à Δ est ainsi, avec d du bras de levier égal à $\ell/2$:

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_g) = \frac{\mathcal{G}mM\ell}{2r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)$$

On en déduit que le moment total des deux forces gravitationnelles est le double de ce moment unique :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{g,\text{tot}}) = \frac{\mathcal{G}mM\ell}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)$$

Ainsi, avec le TMC :

$$\frac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta + \frac{\mathcal{G}mM\ell}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{\text{eq}} = \frac{\mathcal{G}mM\ell r}{Cr^3 - \mathcal{G}mM\ell_2}} \quad \left. \vphantom{\frac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta + \frac{\mathcal{G}mM\ell}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)} \right\} \text{Équilibre}$$



- 3) La valeur obtenue par CAVENDISH à l'aide de ce dispositif et $\mathcal{G} = 6,75 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$. En déduire la déviation angulaire et commenter.

Réponse

$$\theta_{\text{eq}} = 1,4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Ainsi, CAVENDISH avait donc développé une méthode de mesure d'angle avec une précision inférieure au milliradian !

Pour une vidéo sur le sujet, voir notamment celle de Steve MOULD : https://youtu.be/70-_GBymrck?si=6iBDUeYnSixdLS3c

