

# Correction du TP

## ✂ Capacités exigibles

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Mettre en œuvre un accéléromètre, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur. | <input type="checkbox"/> Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. |
| <input type="checkbox"/> Effectuer des représentations graphiques à partir de données.                   | <input type="checkbox"/> Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux  |

## I Objectifs

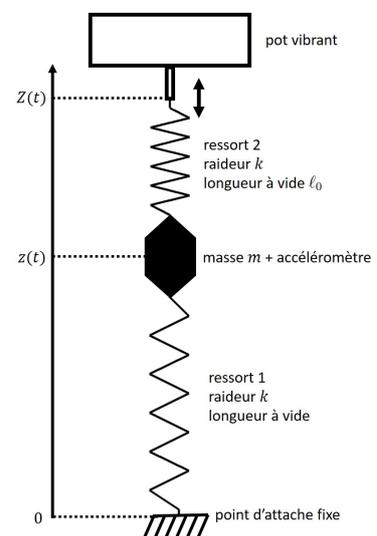
- ◇ Utiliser un microcontrôleur Arduino afin de mettre en œuvre un accéléromètre.
- ◇ Tracer l'allure de la courbe de résonance en vitesse et en position.
- ◇ Vérifier les principales caractéristiques des oscillations mécaniques forcées.
- ◇ Déterminer le facteur de qualité du montage.
- ◇ Développer une approche de recherche vis-a-vis de la détermination de paramètres physiques *via* une minimisation en Python.

## II S'appropriier : montage expérimental

Une masse  $m$ , assimilée à un point matériel  $M$ , est suspendue entre deux ressorts dont l'un d'eux – celui du haut – est relié à un pot vibrant permettant d'induire un mouvement linéaire quasi sinusoïdal d'amplitude constante mais de fréquence réglable. Le déplacement du système vibrant dans l'air est à l'origine d'un amortissement fluide modélisé par une force du type :

$$\vec{F} = -\alpha \vec{v}$$

Un accéléromètre est attaché directement à la masse en translation verticale afin de suivre son déplacement au cours du temps.



## III Analyser

On repère la position de la masse  $m$  grâce à son abscisse  $z(t)$  sur l'axe  $(Oz)$  dont l'origine  $O$  est au point d'attache fixe du ressort (1). Les deux ressorts ont une longueur à vide  $\ell_0$  et sont de raideur  $k$ . Le ressort du dessus peut bouger avec le vibreur, et son point d'attache est repéré par l'abscisse  $Z(t)$ .

### III/A À excitation nulle

À excitation nulle, on suppose que  $Z(t) = h$ , une constante.

/5 ① Montrer que la longueur du ressort (1) à l'équilibre est  $z_{\text{eq}} = \frac{h}{2} - \frac{mg}{2k}$

#### Réponse

◇ **Système** : {masse} assimilée à un point matériel M de masse  $m$ .

◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen.

◇ **Repère** :  $(O, \vec{u}_z)$  vertical ascendant.

◇ **Repérage** :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = z(t)\vec{u}_z \\ \vec{v} = \dot{z}(t)\vec{u}_z \\ \vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{u}_z \end{cases}$$

De plus, à excitation nulle on trouve

$$\ell_1(t) = z(t) \quad \text{et} \quad \ell_2(t) = Z(t) - z(t) = h - z(t)$$

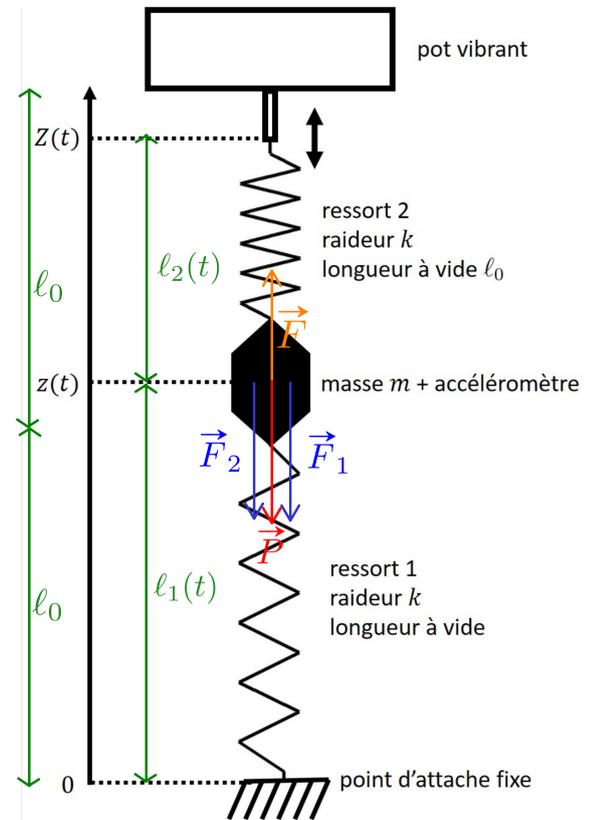
◇ **BdF** :

$$\triangleright \vec{P} = -mg\vec{u}_z$$

$$\triangleright \vec{F}_{r,1} = -k(\ell_1(t) - \ell_0)\vec{u}_z = -k(z(t) - \ell_0)\vec{u}_z$$

$$\triangleright \vec{F}_{r,2} = +k(\ell_2(t) - \ell_0)\vec{u}_z = +k(h - z(t) - \ell_0)\vec{u}_z$$

$$\triangleright \vec{F} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{z}(t)\vec{u}_z$$



◇ **PFD** : à l'équilibre,

$$\vec{a} = \vec{0} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow 0 = -mg - k(z_{\text{eq}} - \ell_0) + k(h - z_{\text{eq}} - \ell_0) \underbrace{-\alpha\dot{z}_{\text{eq}}}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow 2kz_{\text{eq}} = kh - mg$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{\text{eq}} = \frac{h}{2} - \frac{mg}{2k}}$$

On projette

On isole

/3 ② On pose  $\ell(t) = z(t) - z_{\text{eq}}$ . Montrer que l'équation différentielle du mouvement de la masse  $m$  peut se mettre sous la forme canonique :

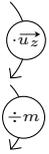
$$\ddot{\ell} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\ell} + \omega_0^2\ell = 0$$

Identifier  $\omega_0$  et  $Q$ , rappeler leur nom et leur unité.

#### Réponse

On reprend le PFD précédent mais  $\forall t$ , en remarquant que  $\ddot{\ell} = \ddot{z}$  et  $\dot{\ell} = \dot{z}$  :

$$\begin{aligned}
 m\vec{a} &= \sum_i \vec{F}_i \\
 \Leftrightarrow m\ddot{z}(t) &= -mg - k(z(t) - \ell_0) + k(h - z(t) - \ell_0) - \alpha\dot{z}(t) \\
 \Leftrightarrow \ddot{z}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{z}(t) + \underbrace{\frac{2k}{m}}_{=\omega_0^2} z(t) &= \underbrace{-g + \frac{k}{m}h}_{=\omega_0^2 z_{\text{eq}}} \\
 \Leftrightarrow \ddot{z}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{z}(t) + \omega_0^2(z(t) - z_{\text{eq}}) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \ddot{\ell} + \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \ell &= 0
 \end{aligned}$$



On trouve ainsi  $\omega_0$  la pulsation propre et  $Q$  le facteur de qualité tels que :

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad [\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}] \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{2km}}{\alpha} \quad \text{sans unité}$$



/1 ③ Quel est le ressort équivalent aux deux ressorts ?

**Réponse**

Par identification avec le résultat pour un unique ressort, on trouve

$$k' = 2k \quad \text{et} \quad \ell'_0 = \frac{h}{2}$$



### III/B En régime sinusoïdal for c 

On se place en régime sinusoïdal for c , et on suppose que le point d'attache haut du ressort (2) suit un mouvement sinusoïdal autour de sa position d'équilibre  $h$  :

$$Z(t) = h + \alpha \cos(\omega t)$$

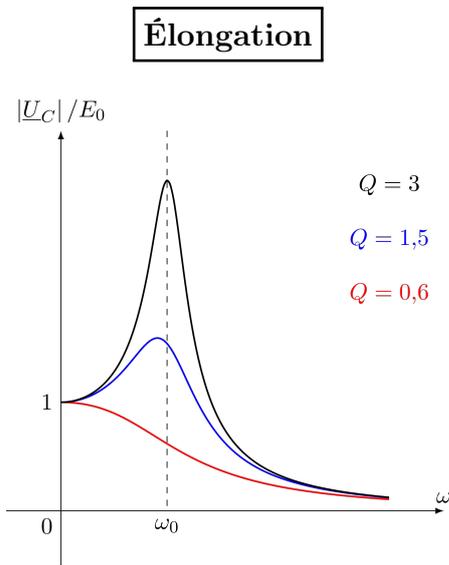
Ainsi, le mouvement de la masse est lui aussi sinusoïdal, de même fréquence que le forçage :

$$\ell(t) = L \cos(\omega t + \varphi)$$

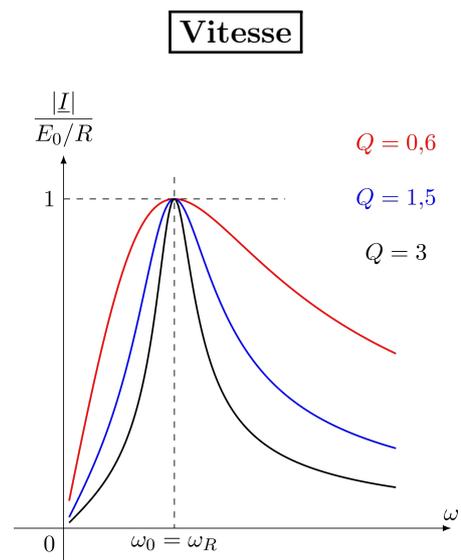
/2 ④ Rappeler l'allure des courbes de résonance (amplitude des oscillations en fonction de la fréquence) en position ( $\ell(t)$ ) et en vitesse ( $v_z = \dot{\ell}(t)$ ) pour un tel système mécanique.   quel type de filtre correspond chaque courbe ?

**Réponse**

On trouve les courbes suivantes pour la tension/élongation et l'intensité/vitesse (par analogie au RLC série) :



**FIGURE TP20.1** – Résonance en élongation  
Filtre passe-bas



**FIGURE TP20.2** – Résonance en vitesse  
Filtre passe-bande

- /1 ⑤ Exprimer  $v_z = \dot{\ell}(t)$  et  $a_z = \ddot{\ell}(t)$ , puis les amplitudes  $V$  et  $A$  de leurs oscillations en fonction de  $L$  et  $\omega$ .

**Réponse**

En RSF, on aura  $\ell(t) = L \cos(\omega t + \varphi)$ , d'où

$$v_z(t) = -L\omega \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \boxed{V = L\omega}$$

$$a_z(t) = -L\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \boxed{A = L\omega^2}$$

- /1 ⑥ Quelle relation relie la bande passante et le facteur de qualité lors de la résonance en vitesse ?

**Réponse**

C'est l'acuité de la résonance :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

### III/C Détection automatique de la fréquence et de l'amplitude

Un signal réel est souvent bruité. Afin de détecter l'amplitude de l'accélération, on réalise une transformée de Fourier numérique du signal. Un pic dans le spectre apparaît autour de la fréquence d'excitation. En mesurant l'amplitude de ce pic, on obtient (par le théorème de PARSEVAL) l'amplitude du signal dans le domaine réel. Tout ce traitement est réalisé par la fonction `freq_finder` dans un script Python.

## IV Réaliser

### IV/A Acquisition

#### Expérience TP20.1 : Manipulation

- 
- 1) Brancher le GBF au **geneboost** par un câble coaxial. Le **geneboost** permet de délivrer le courant important demandé par le haut parleur mais ne modifie pas le signal de tension.
  - 2) Relier le **geneboost** au haut parleur par une liaison bifilaire.
  - 3) Régler le GBF sur une fréquence de  $f = 4$  Hz et une tension crête à crête de 6 Vpp.
  - 4) Attendre environ 30 s que le système atteigne le régime permanent avant de commencer toute mesure. Assurez vous que les oscillations soient bien verticales et qu'il n'y ait pas de rotation de la masselotte. Pour cela, régler la position du point d'attache bas en décalant ou tournant le contre-poids (point d'attache bas). Retenez vos fils à l'aide de la pince, ils ne doivent pas toucher la paillasse.
  - 5) Ouvrir Pyzo et dans Pyzo ouvrir le script `Trace_graphe_accelerometre.py`.
  - 6) Faire une acquisition de l'accélération sur `t_acquisition = 5` s. Une acquisition relativement longue est importante afin de traiter les données par la suite.

#### Attention TP20.1 : Important



- ◇ Si le script s'interrompt, c'est une erreur dans la liaison série Arduino. Relancez simplement une nouvelle fois votre script. Ça devrait fonctionner correctement.
- ◇ Par ailleurs, entre deux acquisitions successives, appuyer sur `Ctrl + k` afin de réinitialiser le shell.

- 7) En fin d'acquisition, le script détermine la fréquence de forçage  $f$  et l'amplitude  $A$  de l'accélération  $a_z(t)$  grâce au script et à la fonction `freqfinder`. Vérifier que la fréquence renvoyée par le script correspond à peu près à celle du GBF ; on utilisera cependant **celle du GBF**.

### IV/B Enregistrement

#### Python, 1

- 
- 1) Ouvrir Capytale avec ce lien : <https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/3b87-1426775>
  - 2) Dans la cellule « Données expérimentales », créez deux listes avec :
    - a – La fréquence  $f$  (en Hz) du GBF ;
    - b – L'amplitude  $A$  de la réponse en accélération déterminée avec le script sur Pyzo.
  - 3) Faire une quinzaine d'acquisition entre  $f_{\min} = 4$  Hz et  $f_{\max} = 15$  Hz. Vous resserrerez vos mesures autour de la résonance. Ne dépassez pas  $U = 6$  Vpp.

## IV Valider et conclure

### IV/A Traitement des données

Afin d'exploiter les enregistrements, effectuez, à partir des données précédemment regroupées sur **Capytale**, les étapes suivantes :

#### Python, 2

- 1) Calculer la pulsation  $\omega$  de chaque enregistrement dans une nouvelle liste  $\omega$ .
- 2) Déterminer l'amplitude en vitesse puis en position à partir de  $A$ . Les calculer dans deux nouvelles listes sur **Capytale** :  $V$  et  $L$ .
- 3) Tracer les graphes de ces valeurs expérimentales avec `plt.scatter`.
- 4) Tracer leurs lissages grâce à `pchip`.
- 5) Tracer la position et la vitesse (ainsi que leurs lissages) de l'oscillateur en fonction de la pulsation  $\omega$ .

- /1 [1] Ces deux courbes ont-elles l'allure attendue (vous vérifierez en particulier que les régimes asymptotiques soient approximativement cohérents) ? Les résonances se font-elles à la même pulsation ? Conclure sur la valeur du facteur de qualité.

————— Réponse —————

Voir solution à <https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/0c79-2069265>.

Elles ont en effet l'allure attendue : l'élongation est non-nulle pour  $\omega \rightarrow 0$  alors que la vitesse tend vers 0, elles passent par un maximum à la pulsation estimée à l'œil et tendent vers 0 pour  $\omega \rightarrow \infty$ .

Théoriquement, les résonances ne se font pas à la même pulsation :  $\omega_r$  pour l'élongation est **plus faible** que  $\omega_0$  la pulsation de résonance pour la vitesse. Ici, on ne perçoit pas de différence notable. On peut déjà en conclure que le facteur de qualité est relativement élevé.



- /5 [2] Déterminer graphiquement la pulsation de résonance de l'oscillateur  $\omega_0$ .

————— Réponse —————

On pointe le maximum des lissages et on trouve  $\omega_0 \approx 45 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .



- /5 [3] Déterminer la bande passante de l'oscillateur, en déduire le facteur de qualité  $Q$ .

————— Réponse —————

On trouve les valeurs pour lesquelles  $V(\omega_c) = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$ , et on trouve

$$\Delta\omega_0 \approx 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q \approx 9}$$



- /1 [4] Conclure.

————— Réponse —————

On tombe sur un résultat cohérent avec nos observations :

- ◇ Le facteur de qualité est supérieur à  $1/\sqrt{2}$  puisqu'il y a résonance ;
- ◇ Le facteur de qualité est élevé puisque l'élongation maximale à la résonance est bien plus grande que l'excitation du pot vibrant, qui ne bouge que de quelques millimètres ;

- ◇ Le facteur de qualité est de l'ordre de la dizaine puisqu'en éteignant le pot vibrant en pleine résonance, on obtient une dizaine d'oscillations pendant l'amortissement.

## IV/B Ajustement des données

L'utilisation d'un lissage n'est pas une approche scientifiquement approuvée pour déterminer des valeurs expérimentales. En effet, l'ordre de réflexion dans la recherche scientifique est de d'abord établir la théorie, puis de faire l'expérimentation et comparer la courbe obtenue aux solutions analytiques déterminées. Dans notre cas, les amplitudes complexes de la vitesse et de l'élongation s'expriment :

$$\underline{V}(\omega) = \frac{K_v}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad \underline{L}(\omega) = \frac{K_\ell}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

### Python, 3

- 1) Compléter les fonctions `V_cplx` et `L_cplx` à partir du squelette donné sur `Capitale` afin de déterminer les amplitudes réelles `V_ampl` et `L_ampl`.
- 2) Remplir les entrées de `curve_fit` afin d'obtenir les valeurs ajustées.
- 3) Tracer sur le même graphique les données expérimentales, les lissages et les fonctions ajustées.

- /2 5 Relever vos observations : est-ce qu'on obtient les mêmes réponses ? Quelle approche vous paraît plus précise dans ce cas ? Quelles sont les avantages et limites au fait d'ajuster un modèle théorique à des données ?

### Réponse

Les résultats sont proches, mais le passage par la minimisation donne de meilleurs résultats, notamment pour les parties de hautes variations où il peut manquer des points de mesure. Souvent, on obtient un facteur de qualité plus grand avec l'ajustement que le lissage si on manque de points autour de la résonance.

Ajuster un modèle à des données permet de sonder la vraisemblance des mesures et une comparaison fidèle et honnête avec les incertitudes, tout en permettant des calculs de paramètres automatiques et bien plus précis. On pose le cadre mathématique et physique du réel dans le calcul informatique. Notamment, ici on peut tracer l'ajustement pour des valeurs de  $\omega$  en-dehors des données testées (voir correction : tracé avec `wfit` allant jusqu'à 0).

En revanche, il faut avoir une formule analytique pour cette approche (d'autres méthodes récentes dépassent ce problème avec le *machine learning*, mais le résultat est alors souvent une boîte noire), et notamment décider du nombre de paramètres libres (théorie incomplète, frottements quadratiques et non linéaires...) et éviter l'*overfitting*<sup>1</sup>.

En général, pour une expérience dont la théorie est connue et maîtrisée comme c'est le cas ici, **l'ajustement est toujours meilleur**. On préférera un lissage lorsque le jeu de donnée de résultat pas de mécanismes descriptibles analytiquement (en sociologie statistique notamment, selon les études).

1. « Surapprentissage » en français. Voir ce lien : <https://www.jedha.co/formation-ia/overfitting>

## IV/C Comparaison à la théorie

La masse pèse 40 g.

- 6] Proposer un protocole (que vous réaliserez) afin de déterminer la raideur  $k$  des ressorts utilisés dans l'expérience.

\_\_\_\_\_ **Réponse** \_\_\_\_\_

Le plus simple :

- ◇ Mesurer  $\ell_0$  la longueur à vide d'un ressort **à l'horizontale** ;
- ◇ L'accrocher verticalement à un support ;
- ◇ Prendre une masse connue et l'accrocher à la partie basse dudit ressort ;
- ◇ Attendre l'équilibre si nécessaire, puis mesurer la longueur à l'équilibre. On obtient  $k$  avec la relation  $\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} \Leftrightarrow k = \frac{mg}{\ell_{\text{eq}} - \ell_0}$ .

On pourrait aussi utiliser les résultats obtenus en faisant osciller une masse en mesurant la période de l'élongation, mais cela dépendra de la valeur de  $\alpha$  ou de  $Q$  ( $T_{\text{amorti}} > T_0$  à cause des frottements). On préférera donc un protocole indépendant, i.e. le premier.

\_\_\_\_\_ ◇ \_\_\_\_\_

- 7] En déduire la valeur de la pulsation théorique  $\omega_{0\text{théo}}$ . Comparer à la pulsation  $\omega_0$  précédemment obtenue.

\_\_\_\_\_ **Réponse** \_\_\_\_\_

Non corrigé.

\_\_\_\_\_ ◇ \_\_\_\_\_