

Acide-base, mécanique du solide et des forces centrales

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont autorisées

Au programme

Toute la mécanique, principalement moment cinétique, forces centrales et mécanique solide, premier chapitre acide-base.

Sommaire

E1	Dosage pH-métrique	2
E2	Oscillations d'un métronome	3
E3	Oscillations d'une tige rigide	4
P1	Programme d'exploration de Mars de la NASA	5

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendrez soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- | | |
|---|---|
| ◇ A : application numérique mal faite ; | ◇ Q : question mal ou non indiquée ; |
| ◇ N : numéro de copie manquant ; | ◇ C : copie grand carreaux ; |
| ◇ P : prénom manquant ; | ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ; |
| ◇ E : manque d'encadrement des réponses ; | ◇ H : homogénéité non respectée ; |
| ◇ M : marge non laissée ou trop grande ; | ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ; |
| ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ; | ◇ φ : loi physique fondamentale brisée. |

Attention

Il est obligatoire, sous peine d'un fort malus, de traiter une partie non négligeable de l'exercice E1.

Exemple application numérique

$$n = \frac{PV}{RT} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. : $n = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol}$

~~$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8,32 \cdot 300} = 0,56$$~~

Remarques antérieures

- 1) Inscrire dans le cadre attitré une remarque **pertinente** issue du **DS07** de l'**année précédente**.
- 2) De même avec une remarque pertinente du **DS06** de **cette année**.

/31

E1

Dosage pH-métrique

On veut réaliser le dosage pH-métrique d'un mélange d'acide fort, l'acide chlorhydrique, de concentration C_1 et d'acide éthanóïque ($K_a = 10^{-4,8}$) de concentration C_2 par une solution de soude de concentration $C_B = 0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On prélève alors $V_0 = 25,0 \text{ mL}$ du mélange et on ajoute $V_0 = 25,0 \text{ mL}$ d'eau distillée dans un bécher de 150 mL .

On rappelle le produit ionique de l'eau $K_e = 10^{-14}$. La courbe obtenue à l'issue du dosage est indiquée Figure D7.1.

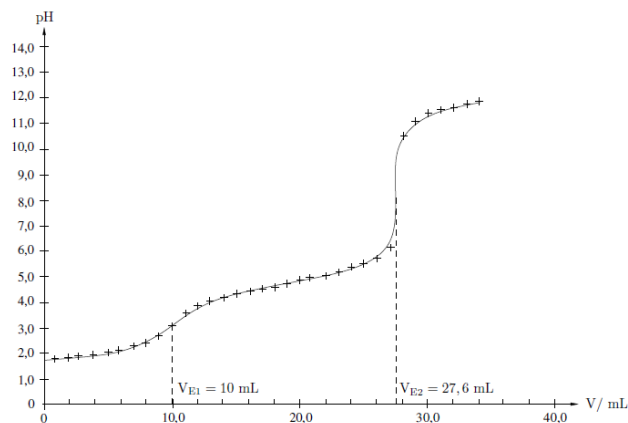


FIGURE D7.1 – Suivi pH-métrique

- 1 Représenter un schéma légendé du montage permettant de réaliser le dosage. On précisera clairement l(les) électrode(s) utilisée(s) et son(leur) rôle.
- 2 Quelles sont les réactions de titrage qui ont lieu au cours de cette expérience ? Calculer leur constante d'équilibre. Que doit vérifier une réaction de support de titrage pour être utilisée ? Est-ce le cas ici ?
- 3 Les titrages sont-ils successifs ou simultanés ? Était-ce prévisible à partir des valeurs des constantes d'équilibre ?
- 4 Écrire les relations aux équivalences et en déduire les concentrations C_1 et C_2 .
- 5 Comment retrouver le pK_A de l'acide éthanóïque à partir de la courbe de titrage ?

/20 E2 Oscillations d'un métronome

On étudie un métronome constitué :

- ◇ d'une tige rigide de longueur $L = 20$ cm de masse négligeable en rotation d'angle θ autour de l'axe Oz ;
- ◇ d'un disque homogène de centre C , tel que $OC = \ell = 2$ cm, de rayon $R = 1,5$ cm et de masse $M = 200$ g ;
- ◇ d'un curseur (dimensions négligeables) et de masse $m = 20$ g et pouvant être déplacé sur la tige selon le rythme souhaité. On appelle x la distance du curseur à O , cette distance ne pouvant dépasser 15 cm.

La tige est tenue en O par une liaison pivot supposée parfaite. On associe au bâti fixe le repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Oz , orienté selon le vecteur $\vec{u}_z$:

$$J = mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2$$

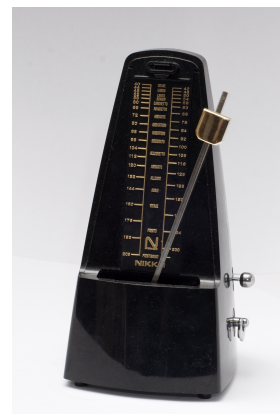
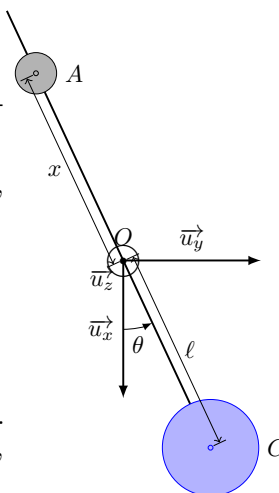


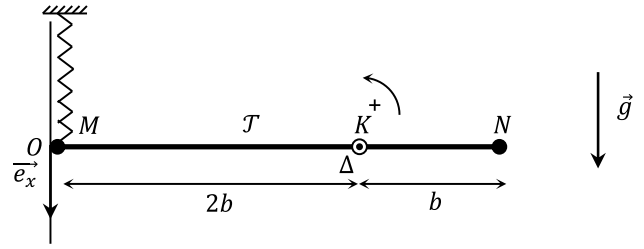
FIGURE D7.2 – Schéma du métronome à gauche et photo d'un métronome (d'après wikipedia). Sur la photo, le contrepois (disque homogène) n'est pas visible, seuls la tige et le curseur le sont.

- 1 Commenter et justifier l'influence de x sur la valeur de J .
- 2 Établir le système, faire un schéma puis le bilan des forces agissant sur le système et déterminer leurs moments par rapport à l'axe Oz par l'utilisation du **bras de levier**. Donnez l'expression du moment cinétique du système en fonction des données du problème.
- 3 Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ .
- 4 Dans l'hypothèse des petites oscillations, donner l'équation différentielle puis l'expression de la période propre T_0 des oscillations en fonction de m, M, ℓ, R, x et g .
- 5 Dans une partition musicale le rythme est donné en battements par minute, c'est à dire le nombre de demis aller-retour du métronome. On a ainsi le mouvement *andante* de 100 battements par minute. À quelle période du métronome correspondent ce mouvement ?
- 6 Dans quel sens faut-il modifier x pour augmenter le nombre de battements par minute pour un mouvement *allegro* de 120 battements par minutes ?

/25 E3 Oscillations d'une tige rigide

Une tige homogène $\mathcal{T}$, de masse m et de longueur $MN = 3b$, est initialement à l'équilibre avec une position horizontale dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{e}_x$, avec $g \approx 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\vec{e}_x$ un vecteur unitaire vertical descendant.

On l'astreint à tourner autour d'un axe horizontal Δ fixe dans le référentiel du laboratoire (supposé galiléen) et orthogonal à $\mathcal{T}$ et donc au plan de la figure (Figure ci-après).



L'axe de rotation, orienté positivement vers le lecteur, sépare la tige en deux parties de longueurs $MK = 2b$ et $KN = b$. Les frottements sont négligés. Le moment d'inertie de $\mathcal{T}$ par rapport à Δ vaut mb^2 .

L'extrémité M (gauche) de la tige est fixée à un ressort vertical, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'autre extrémité du ressort est solidaire d'un bâti, fixe dans le référentiel du laboratoire. La coordonnée x de M est repérée par rapport à l'origine O du repère, avec $x(t=0) = 0$.

- 1 Recopier le schéma sur votre copie et représenter les forces qui s'exercent sur la tige en prenant soin de différencier leurs points d'application. Représenter également les moments vectoriels des forces.



Pour les questions suivantes, indiquer la ou les bonnes réponses clairement et en toutes lettres (« Réponse X »), en **justifiant entièrement votre choix**.

- 2 Exprimer le moment $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})$ du poids de la tige par rapport à l'axe orienté Δ à l'instant initial :

A) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgb}{3}$ B) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgb}{2}$ C) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = mgb$ D) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 2mgb$

- 3 Exprimer la force $\vec{F}$ qu'exerce le ressort en M à l'instant initial :

A) $\vec{F} = -\frac{m\vec{g}}{4}$ B) $\vec{F} = -\frac{m\vec{g}}{6}$ C) $\vec{F} = \frac{m\vec{g}}{2}$ D) $\vec{F} = \frac{m\vec{g}}{4}$

- 4 Quelle est la longueur ℓ du ressort à l'instant initial ?

A) $\ell = \ell_0 - \frac{mg}{4k}$ B) $\ell = \ell_0 + \frac{mg}{3k}$ C) $\ell = \ell_0 + \frac{mg}{4k}$ D) $\ell = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

- 5 On étudie désormais le régime dynamique au voisinage de la position horizontale de $\mathcal{T}$ ($x \ll \ell_0$). Exprimer le moment scalaire $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ de $\vec{F}$ par rapport à l'axe orienté Δ :

A) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \frac{mgb}{2} - kbx$ B) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -\frac{mgb}{4} - 2kbx$ C) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -\frac{mgb}{2} - 2kbx$ D) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -\frac{mgb}{2} + 2kbx$

- 6 L'équation différentielle d'évolution de l'abscisse $x(t)$ de M se met sous la forme suivante :

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

avec ω_0 une constante temporelle. Exprimer ω_0 :

A) $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}}$ B) $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ C) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ D) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$

- 7 Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ de $\mathcal{T}$ au voisinage de sa position horizontale :

A) $\mathcal{E}_k = m\dot{x}^2$ B) $\mathcal{E}_k = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ C) $\mathcal{E}_k = \frac{m\dot{x}^2}{4}$ D) $\mathcal{E}_k = \frac{m\dot{x}^2}{8}$

P1 Programme d'exploration de Mars de la NASA

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'être humain. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains. Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

TABLEAU D7.1 – Données

Masse du Soleil	$M_S = 2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$
Demi-grand axe de l'orbite de la Terre	$a_T = 150 \times 10^6 \text{ km}$
Demi-grand axe de l'orbite de Mars	$a_M = 228 \times 10^6 \text{ km}$
Constante gravitationnelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI}$
Période de révolution de la Terre	$T_T = 365 \text{ jours}$
Période de révolution de la Mars	$T_M = 687 \text{ jours}$

I/A Étude préliminaire

I/A) 1 Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

- Donner les dimensions de la constante gravitationnelle ainsi que son unité dans le système international.
- Montrer que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O$ en O, centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.
- On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ tel que $\vec{\mathcal{L}}_O(0) = \mathcal{L}_0 \vec{e}_z$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2(t)\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\mathcal{L}_0$ et m . Quel est le nom de cette grandeur ?
- Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R , la vitesse V de l'objet en fonction de G, M_S, R et m . Calculer les valeurs numériques de V_T , la vitesse orbitale de la Terre et de V_M , celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique, en $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

I/A) 2 Aspect énergétique et troisième loi de KEPLER

- Démontrer l'expression de l'énergie potentielle. On rappelle qu'on la prend nulle à l'infini.
- En déduire celle de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G, M_S, R et m . Commenter son signe vis-à-vis de la nature du mouvement.
- On note T la période de révolution de l'objet. Démontrer alors que l'on obtient (troisième loi de KEPLER) :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de KEPLER obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a de la trajectoire.

I/B Etude de la trajectoire

I/B) 1 Voyage aller Terre - Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de HOHMANN). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

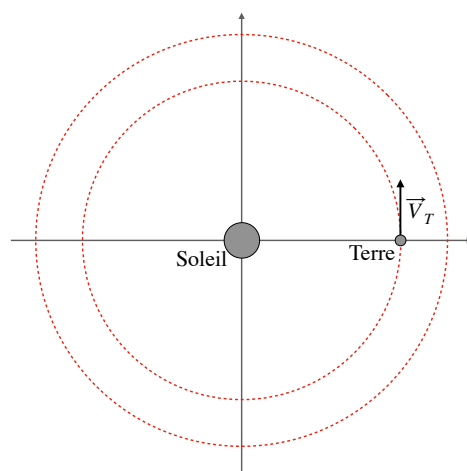


FIGURE D7.3

- Reproduire la figure D7.3 sur votre copie. Indiquer à quelle planète appartient chaque orbite, et ajouter les demi-grands axes a_M et a_T . Rajouter alors l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de HOHMANN). La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

- 9 Au départ de l'orbite de la Terre, démontrer que la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert s'exprime selon

$$V'_T = V_T \sqrt{\frac{2a_M}{a_M + a_T}}$$

En déduire la variation de vitesse $\Delta V'_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de $\Delta V'_T$.

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

- 10 Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars, en secondes puis en jours.
- 11 Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t=0) - \theta_T(t=0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 .
- 12 Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

I/B) 2 Durée de la mission

Pour minimiser le coût énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

- 13 Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ du vaisseau depuis Mars, à l'instant t_1 , pour que la Terre soit au rendez-vous à son arrivée. Commenter son signe.
- 14 Exprimer la durée totale de la mission en fonction de t_1 et Δt . En déduire le nombre minimum de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge en fonction de $\Omega_T, \Omega_M, \Delta t, \alpha_1$ et un entier relatif p décrivant les positions angulaires de Mars par rapport à la Terre.
- 15 Déterminer alors par le calcul la valeur de p donnant la durée minimale, et la calculer. En déduire la valeur de la durée totale de la mission associée (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta \vec{v}_T(t)$ colinéaire à $\vec{v}_T(t)$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t=0) = 0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

- 16 Reproduire une nouvelle fois le schéma de la figure D7.3 en y faisant ajoutant la position de Mars à l'arrivée du vaisseau ainsi que la trajectoire suivie par ce dernier. Cette dernière ne sera pas tangente à la trajectoire de Mars au point d'arrivée. Montrer alors que l'excentricité s'écrit

$$e = \frac{a_M - a_T}{a_T + a_M/\sqrt{2}}$$

et calculer sa valeur numérique.

- 17 Exprimer le demi-grand axe a de la trajectoire du vaisseau en fonction de a_T et e , puis le calculer. En reprenant la question [6], exprimer alors l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m, V_T et e .
- 18 En déduire la vitesse V''_T que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e .
- 19 Donner, en fonction de V_T et e , la variation de vitesse $\Delta V''_T = V''_T - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V''_T$ et vérifier que cette dernière est bien supérieur à ΔV_T .

20 Exprimer $C = r^2(t)\dot{\theta}(t)$ en fonction de a_T et V_T'' .

21 Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars. Pour l'excentricité e calculée à la question 16, on donne

$$\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1 + e \cos(\theta))^2} d\theta = 2,15$$

Commenter.