MPSI3 – 21 mars 2025 – Devoir surveillé 7

Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont *autorisées*

Au programme

Toute la mécanique, principalement moment cinétique, forces centrales et mécanique solide, premier chapitre acide-base.

Sommaire

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendrez soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- ◇ A : application numérique mal faite ;
- ◇ N : numéro de copie manquant ;
- ◇ P : prénom manquant ;
- ◇ E : manque d'encadrement des réponses ;
- ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;
- ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- ◇ Q : question mal ou non indiquée ;
- ◇ C : copie grand carreaux ;
- ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;
- ◇ H : homogénéité non respectée ;
- ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;
- ◇ φ : loi physique fondamentale brisée.

Attention

Il est obligatoire, sous peine d'un fort malus, de traiter une partie non négligeable de l'exercice E1.

Exemple application numérique

$$\boxed{n = \frac{PV}{RT}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \\ V = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}} \\ T = 300\,\mathrm{K} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{n = 5{,}6 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol}}$

$$\cancel{n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8.32 \cdot 300} = 0.56}$$

/31 E1 Dosage pH-métrique

On veut réaliser le dosage pH-métrique d'un mélange d'acide fort, l'acide chlorhydrique, de concentration C_1 et d'acide éthanoïque ($K_a = 10^{-4,8}$) de concentration C_2 par une solution de soude de concentration $C_B = 0{,}100\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$.

On prélève alors $V_0 = 25{,}0\,\mathrm{mL}$ du mélange et on ajoute $V_0 = 25{,}0\,\mathrm{mL}$ d'eau distillée dans un bécher de $150\,\mathrm{mL}$.

On rappelle le produit ionique de l'eau $K_e = 10^{-14}$. La courbe obtenue à l'issue du dosage est indiquée Figure D7.1.

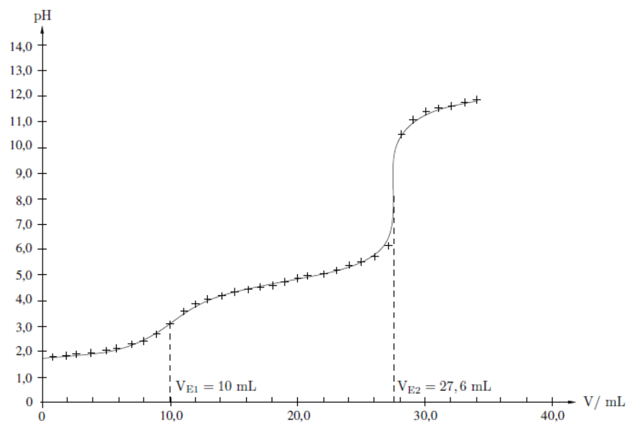


Figure D7.1 – Suivi pH-métrique

/7 **1** Représenter un schéma légendé du montage permettant de réaliser le dosage. On précisera clairement l(les)'électrode(s) utilisée(s) et son(leur) rôle.

Réponse

Schéma à faire avec la solution titrante (Na^+ ,$OH-$) dans une burette graduée 1, la solution titrée (H_3O^+ ,$Cl-$) 1 et CH_3COOH dans un bécher placé sur un agitateur magnétique 1.

Pour effectuer le suivi, on utilise un pH-mètre muni d'une électrode de verre, 1 de potentiel d'électrode proportionnel au pH 1 de la solution dans laquelle elle trempe, et une électrode de référence 1 pour laquelle le potentiel d'électrode est fixe. 1

◇

/12 **2** Quelles sont les réactions de titrage qui ont lieu au cours de cette expérience ? Calculer leur constante d'équilibre. Que doit vérifier une réaction de support de titrage pour être utilisée ? Est-ce le cas ici ?

Réponse

L'acide chlorhydrique est un acide fort : il se dissout totalement dans l'eau pour donner des ions oxonium. On dresse donc une échelle en pK_A avec H_3O^+ à la place de HCl. Les deux réactions de titrage sont alors :

$$K_1 \overset{1}{=} 10^{14} \qquad H_3O^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = 2\,H_2O_{(l)} \qquad 1 + 1 \tag{1}$$

$$K_2 \overset{1}{=} \frac{K_A}{K_e} \overset{1}{=} 10^{9,2} \qquad CH_3COOH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = CH_3COO^- + H_2O_{(l)} \qquad 1 + 1 \tag{2}$$

Une réaction de titrage doit être totale et rapide. 1 Ce sont de bonnes réactions de titrage car K_1 et $K_2 \gg 1$: elles sont bien totales 1. Nous n'avons aucune information sur la vitesse cependant. 1

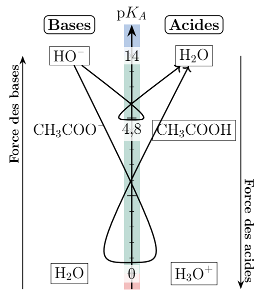


Figure D7.2 – 1+1

◇

/2 **3** Les titrages sont-ils successifs ou simultanés ? Était-ce prévisible à partir des valeurs des constantes d'équilibre ?

Réponse

On constate deux sauts de pH, indiquant deux équivalences. Les titrages sont donc successifs. 1 C'était prévisible car $\dfrac{K_1}{K_2} > 10^4$: la première réaction prépondérante prend le dessus sur la seconde. 1

◇

/6 **4** Écrire les relations aux équivalences et en déduire les concentrations C_1 et C_2.

Réponse

Le premier saut de pH correspond à l'équivalence du titrage de l'acide fort. Ainsi, compte-tenu de la stœchiométrie,

$$C_1 V_0 \overset{1}{=} C_B V_{E1} \Leftrightarrow \boxed{C_1 \overset{1}{=} \frac{C_B V_{E1}}{V_0}}$$

$$\Rightarrow \underline{C_1 \overset{1}{=} 4{,}00 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}}$$

Pour $V_{\mathrm{E1}} < V < V_{\mathrm{E2}}$, c'est la réaction entre l'acide éthanoïque et la soude qui a lieu. À l'équivalence,

$$C_2V_0 \overset{(1)}{=} C_B(V_{\mathrm{E2}} - V_{\mathrm{E1}}) \Leftrightarrow \boxed{C_2 \overset{(1)}{=} \frac{C_B(V_{\mathrm{E2}} - V_{\mathrm{E1}})}{V_0}}$$

$$\Rightarrow \underline{C_2 \overset{(1)}{=} 7{,}04 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}}$$

/4 5 Comment retrouver le pK_A de l'acide éthanoïque à partir de la courbe de titrage ?

Réponse

À $V \overset{(1)}{=} \dfrac{V_{\mathrm{E1}} + V_{\mathrm{E2}}}{2} \overset{(1)}{=} 18{,}8\,\mathrm{mL}$, $[\mathrm{CH_3COOH}] = [\mathrm{CH_3COO^-}]$, donc $\mathrm{pH} \overset{(1)}{=} \mathrm{p}K_A$. Graphiquement on lit une valeur légèrement inférieure à 5, ce qui est cohérent avec la valeur attendue pK_A = 4,8. (1)

/20 E2 Oscillations d'un métronome

On étudie un métronome constitué :

- d'une tige rigide de longueur $L = 20\,\mathrm{cm}$ de masse négligeable en rotation d'angle θ autour de l'axe Oz ;
- d'un disque homogène de centre C, tel que OC $= \ell = 2\,\mathrm{cm}$, de rayon $R = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ et de masse $M = 200\,\mathrm{g}$;
- d'un curseur (dimensions négligeables) et de masse $m = 20\,\mathrm{g}$ et pouvant être déplacé sur la tige selon le rythme souhaité. On appelle x la distance du curseur à O, cette distance ne pouvant dépasser 15 cm.

La tige est tenue en O par une liaison pivot supposée parfaite. On associe au bâti fixe le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Oz, orienté selon le vecteur $\overrightarrow{u_z}$:

$$J = mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2$$

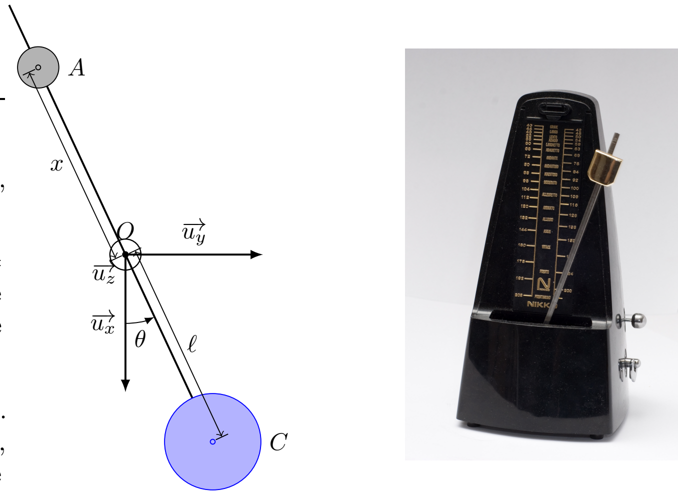


Figure D7.3 – Schéma du métronome à gauche et photo d'un métronome (d'après wikipedia). Sur la photo, le contrepoids (disque homogène) n'est pas visible, seuls la tige et le curseur le sont.

/2 1 Commenter et justifier l'influence de x sur la valeur de J.

Réponse

Plus x augmente et plus J augmente (1), ce qui est normal puisque le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse est répartie loin de l'axe. (1)

/8 2 Établir le système, faire un schéma puis le bilan des forces agissant sur le système et déterminer leurs moments par rapport à l'axe Oz par l'utilisation du **bras de levier**. Donnez l'expression du moment cinétique du système en fonction des données du problème.

Réponse

On établit le système :

(1) - **Système** : {métronome} = {disque+tige+curseur} de moment d'inertie J_z dans $\mathcal{R}_{\text{terrestre}}$ supposé galiléen ;

(1) - **Repère/age** : cylindrique $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$; $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \ell\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -x\overrightarrow{u_r}$.

Les actions qui s'exercent sur le métronome sont :

(1) - poids du disque $\overrightarrow{P}_{\mathrm{C}} = M\overrightarrow{g}$ dont le moment est $\mathcal{M}_z(\overrightarrow{P}_{\mathrm{C}}) = -Mg\ell\sin\theta$;

(1) - poids du curseur $\overrightarrow{P}_{\mathrm{A}} = m\overrightarrow{g}$ dont le moment est $\mathcal{M}_z(\overrightarrow{P}_{\mathrm{A}}) = +mgx\sin\theta$;

(1) - liaison pivot parfaite dont le moment par rapport à l'axe Oz est nul.

(1) - De plus, $\mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = J\dot{\theta}$.

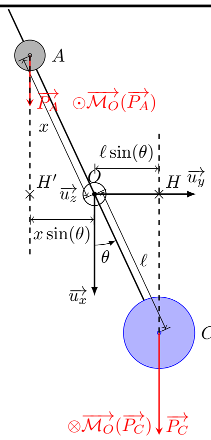


Figure D7.4 – Schéma (1)+(1)

/2 3 Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.

Réponse

On applique la loi du moment cinétique dans le référentiel galiléen du laboratoire :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} \mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{ext}}) \Leftrightarrow J\ddot{\theta} = mgx\sin\theta - Mg\ell\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{Mg\ell - mgx}{J}\sin\theta \overset{1}{=} 0}$$

/4 4 Dans l'hypothèse des petites oscillations, donner l'équation différentielle puis l'expression de la période propre T_0 des oscillations en fonction de m, M, ℓ, R, x et g

Réponse

Si les oscillations sont petites, alors $\sin\theta \approx \theta$, donc on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg\ell - mgx}{J}\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta \overset{1}{=} 0}$$

$$\Rightarrow \omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\frac{Mg\ell - mgx}{J}} \Leftrightarrow T_0 \overset{1}{=} 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mg\ell - mgx}} \Leftrightarrow \boxed{T_0 \overset{1}{=} 2\pi\sqrt{\frac{mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2}{Mg\ell - mgx}}}$$

/2 5 Dans une partition musicale le rythme est donné en battements par minute, c'est à dire le nombre de demis aller-retour du métronome. On a ainsi le mouvement *andante* de 100 battements par minute. À quelle période du métronome correspondent ce mouvement ?

Réponse

Cela correspond à 50 périodes par minute (1), donc

$$\boxed{T_0 = \frac{60\,\text{s}\cdot\text{min}^{-1}}{50\,\text{périodes}\cdot\text{min}^{-1}} = 1{,}2\,\text{s}\cdot\text{période}^{-1} \; (1)}$$

/2 6 Dans quel sens faut-il modifier x pour augmenter le nombre de battements par minute pour un mouvement *allegro* de 120 battements par minutes ?

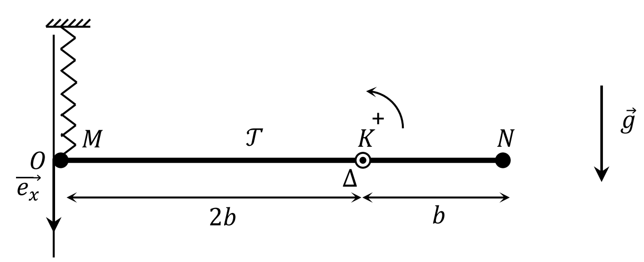
Réponse

Pour augmenter la fréquence, il faut diminuer T_0, (1) donc diminuer son numérateur et augmenter son dénominateur, ce qui revient dans les 2 cas à diminuer x. (1)

/25 E3 Oscillations d'une tige rigide *(D'après ENAC 2024)*

Une tige homogène $\mathcal{T}$, de masse m et de longueur MN $= 3b$, est initialement à l'équilibre avec une position horizontale dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{e_x}$, avec $g \approx 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\vec{e_x}$ un vecteur unitaire vertical descendant.

On l'astreint à tourner autour d'un axe horizontal Δ fixe dans le référentiel du laboratoire (supposé galiléen) et orthogonal à $\mathcal{T}$ et donc au plan de la figure (Figure ci-après).

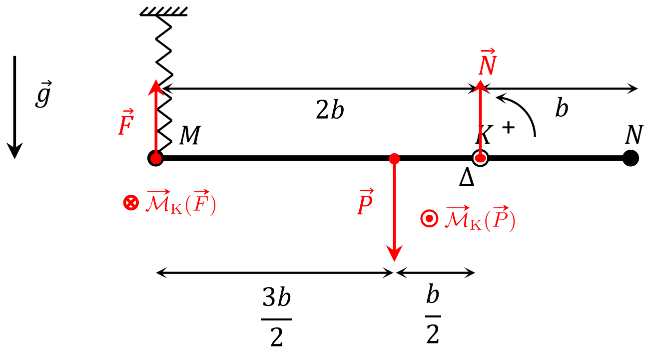


L'axe de rotation, orienté positivement vers le lecteur, sépare la tige en deux parties de longueurs MK $= 2b$ et KN $= b$. Les frottements sont négligés. Le moment d'inertie de $\mathcal{T}$ par rapport à Δ vaut mb^2.

L'extrémité M (gauche) de la tige est fixée à un ressort vertical, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est solidaire d'un bâti, fixe dans le référentiel du laboratoire. La coordonnée x de M est repérée par rapport à l'origine O du repère, avec $x(t = 0) = 0$.

/4 1 Recopier le schéma sur votre copie et représenter les forces qui s'exercent sur la tige en prenant soin de différencier leurs points d'application. Représenter également les moments vectoriels des forces.

Réponse



◇

Pour les questions suivantes, indiquer la ou les bonnes réponses clairement et en toutes lettres (« Réponse X »), en **justifiant entièrement votre choix**.

/4 [2] Exprimer le moment $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})$ du poids de la tige par rapport à l'axe orienté Δ à l'instant initial :

A) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \dfrac{mgb}{3}$ B) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \dfrac{mgb}{2}$ C) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = mgb$ D) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 2mgb$

Réponse

Réponse B. $\vec{P}$ tend à vers tourner la tige dans le sens direct (1), et son bras de levier $d = b/2$ (1). Ainsi,

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) \overset{(1)}{=} +d\|\vec{P}\| \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) \overset{(1)}{=} \frac{mgb}{2}}$$

◇

/4 [3] Exprimer la force $\vec{F}$ qu'exerce le ressort en M à l'instant initial :

A) $\vec{F} = -\dfrac{m\vec{g}}{4}$ B) $\vec{F} = -\dfrac{m\vec{g}}{6}$ C) $\vec{F} = \dfrac{m\vec{g}}{2}$ D) $\vec{F} = \dfrac{m\vec{g}}{4}$

Réponse

Réponse A. $\vec{F}$ tend à faire tourner la tige dans le sens horaire (1), et son bras de levier $d = 2b$. Ainsi,

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -d\|\vec{F}\| \Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \overset{(1)}{=} -2b\|\vec{F}\|$$

Or, équilibre $\Rightarrow$ $$\sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) \overset{(1)}{=} 0 \Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) \Leftrightarrow 2b\|\vec{F}\| = \frac{mgb}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{F} \overset{(1)}{=} -\frac{m\vec{g}}{4}}$$

◇

/2 [4] Quelle est la longueur ℓ du ressort à l'instant initial ?

A) $\ell = \ell_0 - \dfrac{mg}{4k}$ B) $\ell = \ell_0 + \dfrac{mg}{3k}$ C) $\ell = \ell_0 + \dfrac{mg}{4k}$ D) $\ell = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$

Réponse

Réponse C. Puisque $\|\vec{F}\| \overset{(1)}{=} k(\ell - \ell_0) = \frac{mg}{4}$, on en déduit que $\boxed{\ell \overset{(1)}{=} \frac{mg}{4k} + \ell_0}$.

◇

/4 [5] On étudie désormais le régime dynamique au voisinage de la position horizontale de $\mathcal{T}$ ($x \ll \ell_0$). Exprimer le moment scalaire $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ de $\vec{F}$ par rapport à l'axe orienté Δ :

A) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \dfrac{mgb}{2} - kbx$ B) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -\dfrac{mgb}{4} - 2kbx$ C) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -\dfrac{mgb}{2} - 2kbx$ D) $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -\dfrac{mgb}{2} + 2kbx$

Réponse

Réponse C. Puisque $x \ll \ell_0$, on peut considérer que $\vec{F}$ est toujours quasiment orthogonale à la tige (1). Puisque sa norme est $k(\ell + x - \ell_0)$ (1), en reprenant l'expression précédente :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \overset{(1)}{=} -k\left(\frac{mg}{4k} + x\right) \cdot 2b \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \overset{(1)}{=} -\frac{mgb}{2} - 2kbx}$$

◇

/5 6 L'équation différentielle d'évolution de l'abscisse $x(t)$ de M se met sous la forme suivante :

$$\ddot{x}(t) + {\omega_0}^2 x(t) = 0$$

avec ω_0 une constante temporelle. Exprimer ω_0 :

A) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{4k}{m}}$ B) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ C) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ D) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$

Réponse

Réponse A.
TMC :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\Delta}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} J_\Delta \ddot{\theta}(t) \overset{1}{=} \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) \Leftrightarrow mb^2\ddot{\theta}(t) = -\cancel{\frac{mgb}{2}} - 2kbx + \cancel{\frac{mgb}{2}}$$

Or, $\theta \overset{1}{\approx} \frac{x}{2b} \Rightarrow$

$$\frac{mb^2}{2b}\ddot{x}(t) + 2kbx \overset{1}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}(t) + {\omega_0}^2 x(t) = 0} \quad \text{avec} \quad \omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\frac{4k}{m}}$$

◇

/2 7 Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ de $\mathcal{T}$ au voisinage de sa position horizontale :

A) $\mathcal{E}_k = m\dot{x}^2$ B) $\mathcal{E}_k = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ C) $\mathcal{E}_k = \dfrac{m\dot{x}^2}{4}$ D) $\mathcal{E}_k = \dfrac{m\dot{x}^2}{8}$

Réponse

Réponse D. Par définition de l'énergie cinétique d'un solide en rotation :

$$\mathcal{E}_k \overset{1}{=} \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}(t)^2 \approx \frac{1}{2}mb^2\left(\frac{\dot{x}}{2b}\right)^2 \overset{1}{=} \frac{m\dot{x}^2}{8}$$

◇

/109 P1 Programme d'exploration de Mars de la NASA *(D'après Centrale-Supélec 2022)*

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'être humain. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains. Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Tableau D7.1 – Données

Masse du Soleil	$M_S = 2{,}00 \times 10^{30}$ kg
Demi-grand axe de l'orbite de la Terre	$a_T = 150 \times 10^6$ km
Demi-grand axe de l'orbite de Mars	$a_M = 228 \times 10^6$ km
Constante gravitationnelle	$\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI
Période de révolution de la Terre	$T_T = 365$ jours
Période de révolution de la Mars	$T_M = 687$ jours

I/A Étude préliminaire

I/A) 1 Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

/3 1 Donner les dimensions de la constante gravitationnelle ainsi que son unité dans le système international.

Réponse

On sait que $F_g = \mathcal{G}\frac{m_a m_b}{r^2}$ (1), d'où par analyse dimensionelle

$$\mathrm{M.L.T^{-2}} = \dim \mathcal{G}\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{L}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dim \mathcal{G} \overset{1}{=} \mathrm{L^3M^{-1}T^{-2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{[\mathcal{G}] \overset{1}{=} \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}}$$

◇

/3 2 Montrer que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O}$ en O, centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.

Réponse

La seule force à considerer est la force de gravitation $\vec{F}_g$ exercée par le soleil sur l'objet de masse m. Cette dernière s'exprime donc selon le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ donc en en déduit que $\vec{\mathcal{M}}_\mathrm{O}(\vec{F}_g) = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \wedge \vec{F}_g = \vec{0}$. (1)

L'application du Théorème du Moment Cinétique (TMC) à l'objet de masse m, par rapport à O dans le référentien héliocentrique supposé galiléen donne

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_g) = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}} \overset{1}{=} \overrightarrow{\mathrm{cte}}}$$

/7 3 On utilise les coordonnées cylindriques $(\mathrm{O},\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$ avec $\vec{e_z}$ tel que $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(0) = \mathcal{L}_0\vec{e_z}$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2(t)\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\mathcal{L}_0$ et m. Quel est le nom de cette grandeur ?

Réponse

On a par définition $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \wedge m\vec{v}(t)$ 1, donc $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ est perpendiculaire 1 à $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}$ vecteur fixe. Ainsi, M se trouve dans le plan perpendiculaire au moment cinétique contenant le point M à l'instant initial. 1 De plus, le mouvement étant plan, on peut se placer en coordonnées polaires et calculer $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}$:

$$1 \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = r(r)\vec{u_r} \\ \vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{u_r} + r(t)\omega(t)\vec{u_\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M},t) &= (r(t)\vec{u_r}) \wedge m(\dot{r}(t)\vec{u_r} + r(t)\omega(t)\vec{u_\theta}) \\ &\overset{1}{=} mr^2(t)\omega(t)\vec{u_z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}\| = mr^2(t)|\dot{\theta}(t)| \Leftrightarrow \boxed{C \overset{1}{=} \frac{\|\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}\|}{m} = r^2(t)|\dot{\theta}(t)|}$$

c'est la **constante des aires** 1

/7 4 Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R, la vitesse V de l'objet en fonction de $\mathcal{G}, M_S, R$ et m. Calculer les valeurs numériques de V_T, la vitesse orbitale de la Terre et de V_M, celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique, en $\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$

Réponse

La force exercée par le soleil sur la masse s'exprime selon $\vec{F}_g = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{R^2}\vec{e_r}$ 1 et la masse a pour vecteurs position, vitesse et accélération

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = R\vec{e_r} \qquad \vec{V}(t) = R\dot{\theta}(t)\vec{e_\theta} \qquad \vec{a}(t) = R\ddot{\theta}(t)\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2(t)\vec{e_r} \quad 1$$

On peut alors appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) à la masse dans le référentiel héliocentrique :

$$m\vec{a}(t) \overset{1}{=} \vec{F}_g \quad \Rightarrow \quad mR\ddot{\theta}(t) = 0 \quad \text{et} \quad -mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{R^2} \quad 1$$

De plus, on remarque que $R\dot{\theta}^2(t) = (R\dot{\theta}(t))^2/R = V^2(t)/R$ (immédiat avec le repère de Frenet), d'où en combinant ces résultats

$$\frac{V^2}{R} \overset{1}{=} \mathcal{G}\frac{M_S}{R^2} \Rightarrow \boxed{V \overset{1}{=} \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_S}{R}}}$$

Soit $\underline{V_T = 29{,}8\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}}$ $\overset{1}{\text{et}}$ $\underline{V_M = 24{,}2\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}}$

I/A) 2 Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

/6 5 Démontrer l'expression de l'énergie potentielle. On rappelle qu'on la prend nulle à l'infini.

Réponse

$$\vec{F}_g \text{ cons.} \Rightarrow \quad \mathrm{d}\mathcal{E}_p \overset{1}{=} -\delta\mathcal{W}(\vec{F}_g) \overset{1}{=} -\vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \overset{1}{=} -\left(-\mathcal{G}\frac{mM_S}{R^2}\vec{e_r}\right) \cdot (\mathrm{d}R\,\vec{e_r} + R\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e_\theta}) \overset{1}{=} \mathcal{G}\frac{mM_S}{R}\,\mathrm{d}R$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}R} = \mathcal{G}\frac{mM_S}{R^2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_p \overset{1}{=} -\mathcal{G}\frac{mM_S}{R} + \underbrace{\mathrm{cte}}_{=0\,1}}$$

/5 6 En déduire celle de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de $\mathcal{G}, M_S, R$ et m. Commenter son signe vis-à-vis de la nature du mouvement.

Réponse

$$\mathcal{E}_c \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}mV^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}mM_S}{R}$$
$$\Rightarrow \mathcal{E}_m \overset{(1)}{=} \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}mM_S}{R} - \frac{\mathcal{G}mM_S}{R}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m \overset{(1)}{=} -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}mM_S}{R}}$$

On trouve le fait que $\mathcal{E}_m = -2\mathcal{E}_c$. L'énergie mécanique obtenue est négative, ce qui est typique d'une trajectoire fermée (ici, circulaire). (1)

◇

/2 7 On note T la période de révolution de l'objet. Démontrer alors que l'on obtient (troisième loi de Kepler) :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}$$

Réponse

On a trouvé dans les questions précédentes, une expression constante pour la vitesse. Le mouvement est alors uniforme et dans ce cas, la distance parcourue est liée à la vitesse et à la durée (période T) par $2\pi R = VT$ d'où

$$T \overset{(1)}{=} \frac{2\pi R}{V} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{\mathcal{G}M_S}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{R^3} \overset{(1)}{=} \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}}$$

◇

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a de la trajectoire.

I/B Etude de la trajectoire

I/B) 1 Voyage aller Terre - Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

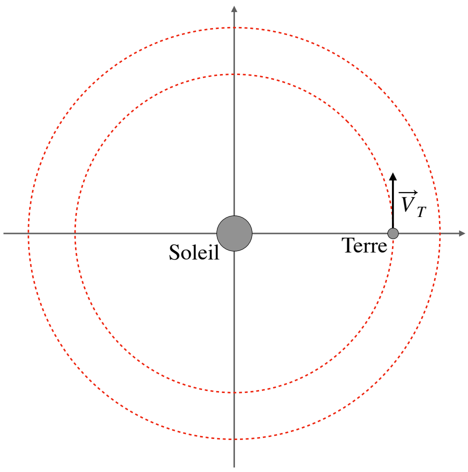
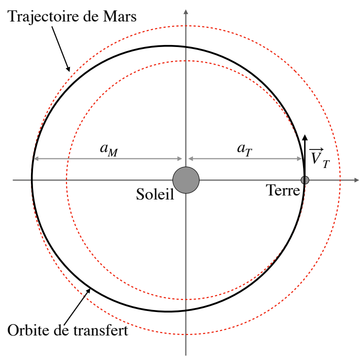


Figure D7.5

/2 8 Reproduire la figure D7.5 sur votre copie. Indiquer à quelle planète appartient chaque orbite, et ajouter les demi-grands axes a_M et a_T. Rajouter alors l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann). La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

Réponse

Le schéma précédent est modifié pour y faire figurer l'orbite elliptique de transfert. C'est la seule ellipse qui recoupe les orbite des deux planètes et pour laquelle le soleil occupe l'un de ses foyers.



◇

/9 **9** Au départ de l'orbite de la Terre, démontrer que la vitesse V_T' que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert s'exprime selon

$$V_T' = V_T\sqrt{\frac{2a_M}{a_M + a_T}}$$

En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T' - V_T$. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$.

Réponse

Sur l'orbite de transfert, le grand axe s'exprime par $2a = a_M + a_T$ (1). On peut alors réutiliser les résultats précédents pour l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m' = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{2a} \overset{1}{=} -\mathcal{G}\frac{mM_S}{a_M + a_T}$$

Or, pour $\theta = 0$,
$$\mathcal{E}_p' \overset{1}{=} \mathcal{E}_p = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{a_T}$$

Ainsi
$$\mathcal{E}_c' = \mathcal{E}_m' - \mathcal{E}_p' = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{a_M + a_T} + \mathcal{G}\frac{mM_S}{a_T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_T'^2 = \mathcal{G}mM_S\left(\frac{1}{a_T} - \frac{1}{a_T + a_M}\right) \overset{1}{=} m \times \underbrace{\mathcal{G}\frac{M_S}{a_T}}_{V_T^2 \,1}\left(1 - \frac{1}{1 + a_M/a_T}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_T' \overset{1}{=} V_T\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{1 + a_M/a_T}} \overset{1}{=} V_T\sqrt{\frac{2a_M}{a_M + a_T}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V_T' \overset{1}{=} V_T\left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_M + a_T}} - 1\right)} \Rightarrow \underline{\Delta V_T' \overset{1}{=} 2{,}93\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$$

Au passage, on remarque que pour $a_M = a_T$ (cas hypothétique bien sur), on retrouve $V_T = V_T'$ (pas besoin de changement d'orbite), ce qui est rassurant.

◇

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

/5 **10** Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars, en secondes puis en jours.

Réponse

Cette fois ci, on reprend la troisième loi de Kepler, adaptée aux trajectoires elliptiques. On trouve alors, pour la période $T' = 2\Delta t$ (1) de l'orbite de transfert :

$$\frac{(2\Delta t)^2}{a^3} \overset{1}{=} \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_s} \Rightarrow \boxed{\Delta t \overset{1}{=} \frac{\pi(a_T + a_m)^{3/2}}{2\sqrt{2\mathcal{G}M_S}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_T = 150 \times 10^6\,\mathrm{km} \\ a_M = 228 \times 10^6\,\mathrm{km} \\ \mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-20}\,\mathrm{km^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}} \\ M_S = 2{,}00 \times 10^3\,\mathrm{kg} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{\Delta t \overset{1}{=} 22{,}3 \times 10^6\,\mathrm{s} \overset{1}{=} 259\,\text{jours}}$$

◇

/5 **11** Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t = 0) - \theta_T(t = 0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0.

Réponse

On sait d'après les questions précédentes que $\theta_M(\Delta t) = \pi + \theta_T(0)$ (1) (lecture graphique sur le schéma). De plus, l'angle formé par Mars et l'axe des abscisse est donné par $\theta_M(t) = \Omega_M t + \alpha_0$ avec $\Omega_M = 2\pi/T_M$. (1)

En effet, α_0 représente bien l'écart angulaire entre Mars et la Terre (donc l'axe des abscisses) à l'instant initial. On en déduit que

$$\alpha_0 + \Omega_M\Delta t \overset{1}{=} \pi \Rightarrow \boxed{\alpha_0 \overset{1}{=} \pi - 2\pi\frac{\Delta t}{T_M}} \Rightarrow \underline{\alpha_0 \overset{1}{=} 0{,}78\,\mathrm{rad} \approx \pi/4}$$

Le lancé du vaisseau doit donc être effectué lorsque la Terre et Mars forment un angle d'environ $\pi/4$ par rapport au soleil.

◇

/5 12 Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

Réponse

La période de révolution sur l'orbite de transfert est donnée par $T' = 2\Delta t = 516\,\text{jours}$ 1. Pendant cette durée, la position angulaire de la Terre va évoluer de

$$\Delta\theta_T = \theta_T(T') - \theta_T(0) \overset{1}{=} \Omega_T T' = 2\pi\frac{T'}{T_M} \overset{1}{=} 2\pi + 2{,}6\,\text{rad}$$

La Terre va donc parcourir un tour complet plus environ 2,6 rad, soit presque un autre demi-tour. On en déduit que la Terre et le vaisseau ne vont **pas se croiser**. 1 Cette orbite de transfert ne peut donc pas être utilisée pour retourner sur Terre et il faut s'assurer que le vaisseau dispose d'un moyen de propulsion suffisant pour s'insérer sur une **autre orbite de retour**. 1

◇

I/B) 2 Durée de la mission

Pour minimiser le coût énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

/6 13 Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ du vaisseau depuis Mars, à l'instant t_1, pour que la Terre soit au rendez-vous à son arrivée. Commenter son signe.

Réponse

On reprend le raisonnement de la question 11 en l'adaptant à cette nouvelle situation. Cette dois ci, on note t_1 l'instant du départ de Mars et on en déduit que pour une durée de retour Δt :

$$\theta_T(t_1+\Delta t) \overset{1}{=} \pi + \theta_M(t_1) \Rightarrow \theta_T(t_1) + \Omega_T\Delta t \overset{1}{=} \pi + \theta_M(t_1) \Rightarrow \boxed{\alpha_1 \overset{1}{=} \theta_M(t_1) - \theta_T(t_1) \overset{1}{=} \Omega_T\Delta t - \pi} \quad\Rightarrow\quad \underline{\alpha_1 \overset{1}{=} 1{,}3\,\text{rad}}$$

L'angle obtenu est positif. En effet, lorsque le vaisseau part de Mars, la Terre, dont la vitesse angulaire est plus élevée, va rattraper Mars puis la dépasser pour enfin se retrouver au bon endroit pour intercepter le vaisseau. 1

◇

/6 14 Exprimer la durée totale de la mission en fonction de t_1 et Δt. En déduire le nombre minimum de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge en fonction de $\Omega_T, \Omega_M, \Delta t, \alpha_1$ et un entier relatif p décrivant les positions angulaires de Mars par rapport à la Terre.

Réponse

Cette durée s'exprime selon $T_{\text{tot}} \overset{1}{=} \underbrace{\Delta t}_{\text{aller}} + \underbrace{(t_1 \overset{1}{-} \Delta t)}_{\text{séjour sur mars}} + \underbrace{\Delta t}_{\text{retour}}$. Il reste donc à exprimer la durée du séjour sur Mars, à l'aide des angles α_0 et α_1. En effet, lorsque le vaisseau arrive sur Mars, cette dernière se trouve en $\theta_M(\Delta t) = \pi$ d'après la question 11.

Au moment du départ du vaisseau de la planète Mars, on a $\theta_M(t_1) \overset{1}{=} \theta_T(t_1) + \alpha_1 + 2p\pi$ avec p, un entier relatif. On en déduit, en combinant ces deux relations, que

$$\theta_M(t_1) - \theta_M(\Delta t) \overset{1}{=} \theta_T(t_1) + \alpha_1 + (2p-1)\pi \Rightarrow \Omega_M(t_1 - \Delta t) \overset{1}{=} \Omega_T(t_1 \underbrace{-\Delta t + \Delta t}_{\text{ruse}}) + \alpha_1 + (2p-1)\pi$$

Soit

$$\boxed{(t_1 - \Delta t)_p \overset{1}{=} \frac{\Omega_T\Delta t + \alpha_1 + (2p-1)\pi}{\Omega_M - \Omega_T}}$$

Il existe alors différentes durées possible pour le séjour sur Mars en fonction de l'entier relatif p.

◇

/7 15 Déterminer alors par le calcul la valeur de p donnant la durée minimale, et la calculer. En déduire la valeur de la durée totale de la mission associée (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Réponse

Des applications numériques montrent que la durée minimale est obtenue pour $p = -1$ 1; alors

$$\boxed{t_1 - \Delta t \overset{1}{=} 466\,\text{jours}} \quad\Rightarrow\quad \underline{T_{\text{tot}} \overset{1}{=} 982\,\text{jours} \approx 2{,}7\,\text{ans}}$$

Le lancement est possible aux instants t_n tels que $\theta_M(t) - \theta_T(t) = \alpha_0 + 2n\pi$ 1 avec $n \in \mathbb{Z}$ donc lorsque

$$(\Omega_M - \Omega_T)t_n + \alpha_0 \overset{1}{=} \alpha_0 + 2n\pi \Rightarrow t_n = \frac{2n\pi}{\Omega_M - \Omega_T} \Rightarrow \boxed{|t_{n+1} - t_n| \overset{1}{=} \frac{2\pi}{\Omega_T - \Omega_M}} \Rightarrow \underline{|t_{n+1} - t_n| \overset{1}{=} 780\,\text{jours}}$$

◇

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta\vec{v}_T(t)$ colinéaire à $\vec{v}_T(t)$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire $(\theta_T(t=0)=0)$ et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$$

où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

/6 $\boxed{16}$ Reproduire une nouvelle fois le schéma de la figure D7.5 en y faisant ajoutant la position de Mars à l'arrivée du vaisseau ainsi que la trajectoire suivie par ce dernier. Cette dernière ne sera pas tangente à la trajectoire de Mars au point d'arrivée. Montrer alors que l'excentricité s'écrit

$$e = \frac{a_M - a_T}{a_T + a_M/\sqrt{2}}$$

et calculer sa valeur numérique.

Réponse

$$r(0) = a_T = \frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad r(3\frac{\pi}{4}) = a_M = \frac{p}{1-e/\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_T}{a_M} = \frac{1-e/\sqrt{2}}{1+e} \Leftrightarrow e\left(a_T + a_M/\sqrt{2}\right) = a_M - a_T$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e = \frac{a_M - a_T}{a_T + a_M/\sqrt{2}}} \Rightarrow \underline{e = 0{,}25}$$

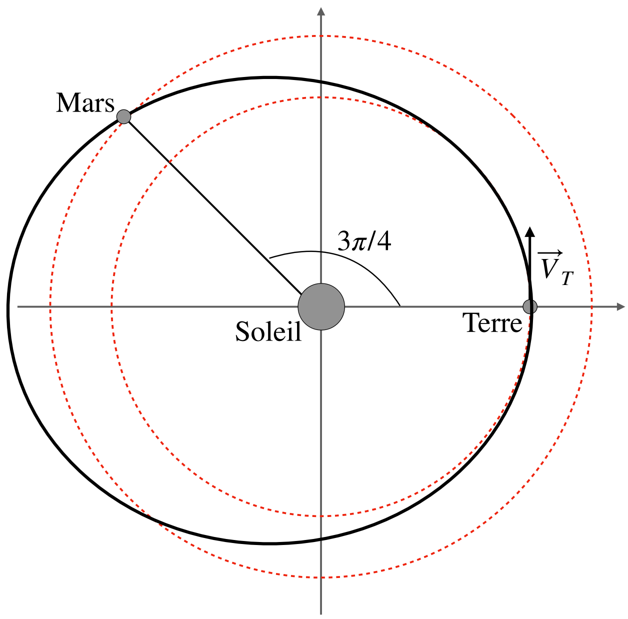


Figure D7.6 – 1+1

/8 $\boxed{17}$ Exprimer le demi-grand axe a de la trajectoire du vaisseau en fonction de a_T et e, puis le calculer. En reprenant la question $\boxed{6}$, exprimer alors l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m,V_T et e.

Réponse

On a :
$$r(\pi) = \frac{p}{1-e} \quad \text{et} \quad r(0) = \frac{p}{1+e} = a_T$$

Or
$$r(\pi) + r(0) = 2a \Leftrightarrow a = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) = \frac{p}{1-e^2} \Leftrightarrow a = \underbrace{\frac{p}{1+e}}_{=a_T} \times \frac{1}{1-e}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = \frac{a_T}{1-e}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_T = 150 \times 10^6\ \text{km} \\ e = 0{,}25 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{a = 200 \times 10^6\ \text{km}}$$

Ainsi $\mathscr{E}_m = -\dfrac{\mathscr{G}mM_s}{2a} = -\mathscr{G}mM_s\dfrac{1-e}{2a_T}$ or $\dfrac{\mathscr{G}M_S}{a_T} \overset{(1)}{=} V_T^2$ donc $\boxed{\mathscr{E}_m \overset{(1)}{=} -\dfrac{1}{2}mV_T^2 \times (1-e)}$

◇

/3 18 En déduire la vitesse V_T'' que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e.

Réponse

En $\theta = 0$,
$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p \quad\Leftrightarrow\quad \mathscr{E}_c = \mathscr{E}_m - \mathscr{E}_p \quad\text{or}\quad \mathscr{E}_p = -\frac{\mathscr{G}mM_S}{a_T} \overset{(1)}{=} -mV_T^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_T''^2 = -\frac{1}{2}mV_T^2 \times (1-e) + mV_T^2 \overset{(1)}{=} mV_T^2\left(1 - \frac{1-e}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{V_T'' \overset{(1)}{=} V_T\sqrt{1+e}}$$

◇

/3 19 Donner, en fonction de V_T et e, la variation de vitesse $\Delta V_T'' = V_T'' - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T''$ et vérifier que cette dernière est bien supérieur à ΔV_T.

Réponse

On trouve $\boxed{\Delta V_T'' = V_T'' - V_T \overset{(1)}{=} V_T\left(\sqrt{1+e} - 1\right)} \Rightarrow \underline{\Delta V_T'' \overset{(1)}{=} 3{,}51\,\mathrm{km/s} \overset{(1)}{>} 2{,}93\,\mathrm{km/s} = \Delta V_T'}$

◇

/2 20 Exprimer $C = r^2(t)\dot\theta(t)$ en fonction de a_T et V_T''.

Réponse

On sait que $C = \mathscr{L}_O/m$ est une constante que l'on peut par exemple exprimer à l'instant initial de l'orbite de transfert :
$$C = C(0) \overset{(1)}{=} r^2(0)\dot\theta(0) = a_T^2\frac{V_T''}{a_T} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{C \overset{(1)}{=} a_T V_T''}$$

◇

/9 21 Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars. Pour l'excentricité e calculée à la question 16, on donne
$$\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1+e\cos(\theta))^2}\mathrm{d}\theta = 2{,}15$$
Commenter.

Réponse

$$C = r^2(t)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \frac{r^2(t)}{C}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\Rightarrow \Delta t' \overset{(1)}{=} \int_{t=0}^{\Delta t'} \mathrm{d}t = \int_{\theta=0}^{\theta_M(\Delta t')} \frac{r^2}{C}\mathrm{d}\theta \overset{(1)}{=} \frac{p^2}{C}\int_{\theta=0}^{3\pi/4} \frac{1}{(1+e\cos(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$$
Or, $a_T \overset{(1)}{=} \dfrac{p}{1+e} \Rightarrow$
$$\Delta t' \overset{(1)}{=} \frac{a_T^2(1+e)^2}{a_T V_T''} \times 2{,}15 \Leftrightarrow \boxed{\Delta t' \overset{(1)}{=} 2{,}15\frac{a_T}{V_T''}(1+e)^2}$$
$$\text{A.N. : } \underline{\Delta t' \overset{(1)}{=} 175\,\text{jours}}$$

La valeur obtenue est plus faible que Δt, le trajet est donc plus court (1). Cependant, il requiert plus de carburant donc le vaisseau sera plus imposant. (1)

◇