Correction du TD d'application

I Pression des pneus

La pression préconisée sur les roues avant d'une Mégane est de 2,2 bar. On règle la pression des pneus un jour froid de cet hiver, par une température extérieure de $-5\,°\mathrm{C}$.

1) En supposant que le volume des pneus ne varie par et qu'il n'y a aucune fuite d'air possible, quelle sera l'indication du manomètre un jour chaud cet été, par une température extérieure de $30\,°\mathrm{C}$?

Réponse

Comme la quantité de matière n d'air contenue dans le pneu et son volume sont des constantes, alors d'après l'équation d'état du gaz parfait on a

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} = \frac{nR}{V}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{P_2 = \frac{T_2}{T_1}P_1} \Rightarrow \underline{P_2 = 2{,}5\,\mathrm{bar}}$$

◇

2) Calculer la variation relative de pression due au changement de température. Que conseillez-vous ?

Réponse

La variation relative de pression est $\Delta P/P_1 = 14\%$. Elle est supérieure à 10%, ce qui est loin d'être négligeable. Le meilleur conseil à donner est de refaire la pression des pneus ! Notez par ailleurs qu'il est préconisé de la vérifier chaque mois, et **indispensable** de le faire au moins deux fois par an **et** avant les grands trajets.

◇

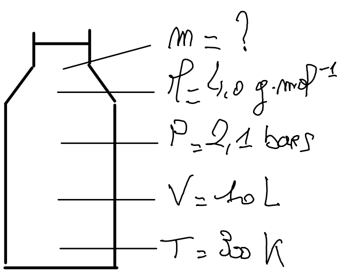
II Fuite d'hélium

On considère une bouteille de volume constant $V = 10\,\mathrm{L}$ contenant de l'hélium, modélisé comme un gaz parfait monoatomique, à la pression $P = 2{,}1\,\mathrm{bar}$ et à la température $T = 300\,\mathrm{K}$.

$M(\mathrm{He}) = 4{,}0\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$.

1) Calculer la masse m d'hélium dans la bouteille, puis la densité particulaire n^*, c'est-à-dire le nombre d'atomes par unité de volume.

Réponse



$$PV = nRT \quad \text{et} \quad m = nM$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m = \frac{PVM}{RT}} \Leftrightarrow \underline{m = 3{,}4\,\mathrm{g}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = 2{,}1 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \\ V = 10 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \\ M = 4{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}} \\ T = 300\,\mathrm{K} \end{cases}$$

$$n^* = \frac{N}{V} \quad \text{avec} \quad N = n\mathcal{N}_A \quad \text{et} \quad n = \frac{m}{M} \Leftrightarrow \boxed{n^* = \frac{m\mathcal{N}_A}{MV}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 3{,}4\,\mathrm{g} \\ \mathcal{N}_A = 6{,}022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}} \\ M = 4{,}0\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}} \\ V = 10 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{n^* = 5{,}1 \times 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}}$

◇

2) Calculer la vitesse quadratique moyenne des atomes.

Réponse

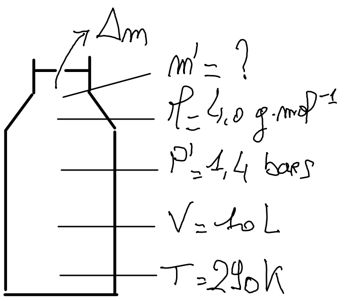
Température cinétique $\frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}k_BT$ avec $m = \frac{M}{\mathcal{N}_A}$ et $R = \mathcal{N}_A k_B$

$$\Leftrightarrow \boxed{v^* = \frac{3RT}{M}} \Rightarrow \underline{v^* = 1{,}4 \times 10^3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

3) À la suite de l'ouverture de la bouteille, la pression passe à $P' = 1{,}4\,\mathrm{bar}$ et la température à $T' = 290\,\mathrm{K}$. Calculer la masse Δm de gaz qui s'est échappé de la bouteille.

Réponse



$$\boxed{m' = \frac{P'VM}{RT'}} \Rightarrow \underline{m = 2{,}0\,\mathrm{g}}$$

$$\Delta m = m - m' \Leftrightarrow \underline{\Delta m = 1{,}0\,\mathrm{g}}$$

◇

4) On a vite refermé la bouteille. À quelle température T'' faudrait-il porter le gaz pour atteindre à nouveau la pression P ? L'exprimer en fonction de P, P' et T'.

Réponse

On garde m' et V, on revient à $P'' = P$ et on cherche T'' :

$$\boxed{T'' = \frac{PVM}{m'R} = \frac{P}{P'}T'} \Rightarrow \underline{T'' = 435\,\mathrm{K} = 4{,}4 \times 10^2\,\mathrm{K}}$$

◇

III Gaz parfait dans une enceinte

1) Comment évolue la vitesse quadratique d'agiation dans ungaz si on multiplie sa température absolue par 2 ?

Réponse

$$v^* = \sqrt{\frac{DRT}{M}} \Rightarrow (v^*)' = \sqrt{2}v^* \quad \text{pour} \quad T' = 2T$$

◇

2) Comparer la vitesse quadratique moyenne d'agitation thermique des atomes dans un gaz d'hélium $M(\mathrm{He}) = 4\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ et un échantillon de gaz de dioxygène $M(\mathrm{O_2}) = 32\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ à la même température.

Réponse

$$v^*_{\mathrm{He}} = \sqrt{\frac{3RT}{M(\mathrm{He})}} \quad \text{et} \quad v^*_{\mathrm{O_2}} = \sqrt{\frac{5RT}{M(\mathrm{O_2})}}$$

$$\Rightarrow \frac{v^*_{\mathrm{He}}}{v^*_{\mathrm{O_2}}} = \sqrt{\frac{3}{5}\frac{M(\mathrm{O_2})}{M(\mathrm{He})}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{v^*_{\mathrm{He}}}{v^*_{\mathrm{O_2}}} \approx \sqrt{5}}$$

◇

3) Retrouver l'exoression de l'énergie interne d'une mole de gaz parfait d'hélium.

Réponse

Il n'a que 3 degrés de liberté, ceux de translation selon x, y et z, soit

$$\langle e_{c,i} \rangle = 3 \cdot \frac{1}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad U = e_c = \sum_{i=1}^{N} \langle e_{c,i} \rangle \Rightarrow U = \frac{3}{2} \cdot N k_B \cdot T = \frac{3}{2} nRT$$

◇

4) En déduire l'expression de sa capacité thermique à volume constant.

Réponse

Immédiatement, $\boxed{C_V^{\text{mono}} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{3}{2} nR}$

◇