

DEVOIR SURVEILLE NUM 08

REVISIONS DE PHYSIQUE

(2H00)

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.

Les calculatrices sont autorisées.

Le devoir est composé **de deux problèmes indépendants.**

PROBLEME 1 : L'internet par ADSL

PROBLEME 2 : Autour de la photographie.

A l'intérieur des exercices, certaines questions sont indépendantes.

L'étudiant est invité à prendre connaissance de la totalité du sujet avant de commencer sa composition.

L'ordre dans lequel seront abordées les différentes questions est laissé au choix de l'étudiant, mais le numéro complet de la question devra être mentionné sur la copie et le correcteur appréciera qu'une partie soit traitée dans sa continuité.

*Une attention particulière sera portée à la **qualité de la rédaction** (vocabulaire, orthographe...) et à la **présentation de la copie** (numérotation des questions, encadrement des expressions littérales et soulignement des applications numériques...).*

*Et il est indispensable de **numéroter vos copies.***

Les résultats numériques doivent être accompagnés d'une unité et présentés avec le bon nombre de chiffres significatifs.

Une minoration pouvant aller jusqu'à 2 points pourra être appliquée en cas de travail négligé.

Programme de révision de ce devoir :

Tout ce qui a été vu depuis le début de l'année de SUP MPSI, sauf la thermodynamique.

PROBLEME 1 : L'internet par ADSL :

(≈ 75 pts)

De moins en moins de logements sont équipés de l'internet par ADSL, mais les filtres ADSL présents sur les prises téléphoniques ont permis de pouvoir simultanément téléphoner et rester connecté à internet.



Les questions 6 et 7 sont largement indépendantes des autres.

Dans le document 1 situé en annexe p4 est présentée la fiche technique d'un filtre ADSL classique de type «gigogne». La partie de filtre qui nous intéresse est comprise entre les branches 1 et 3 (voir schéma de la fiche technique).

Les bobines peuvent s'associer en série ou en parallèle avec les mêmes lois d'associations que des résistances.

On a représenté sur la figure 1 ci-contre une version simplifiée du filtre qui nous intéresse.

Q1. À l'aide de la fiche technique du document 1 en annexe p4, donner les valeurs numériques des différents composants présents dans le schéma simplifié de la figure 1.

Q2. Grâce à une étude basses et hautes fréquences **du schéma simplifié de la figure 1**, déterminer le comportement de ce filtre à vide et en déduire la nature du filtre.

Ce comportement est-il modifié si le filtre est en charge, avec une résistance $R_u = 600 \, \Omega$ en sortie, qui représente la résistance d'un téléphone ?

Q3. Cela est-il en accord avec le diagramme de Bode proposé dans la fiche technique présentée dans le document 1 (en annexe p4) ? On observera avec attention la grandeur placée en ordonnée. De plus, déterminer graphiquement la fréquence de coupure à 3 dB de ce filtre, en expliquant votre méthode.

Le signal d'entrée est composé de fréquences correspondant à des sons audibles auxquelles sont superposées des fréquences élevées correspondant au signal ADSL, comme représenté de manière simplifiée sur la figure 2, ci-contre.

Le téléphone (de résistance $R_u = 600 \, \Omega$) branché en sortie de ce filtre ne doit récupérer que le signal correspondant aux sons audibles.

Q4. Que peut-on dire du choix de la fréquence de coupure de ce filtre ? Justifier.

Q5. En déduire l'allure approximative de la représentation spectrale du signal obtenu en sortie du filtre ADSL. On ne s'attachera pas ici à faire le calcul des amplitudes de chaque harmonique.

Q6. On cherche à recréer ce type de filtre (à vide) uniquement avec une résistance R et un condensateur C . A l'aide de vos connaissances, proposer un montage correspondant en précisant les tensions en entrée et en sortie. On le justifiera uniquement par une étude basses et hautes fréquences du circuit.

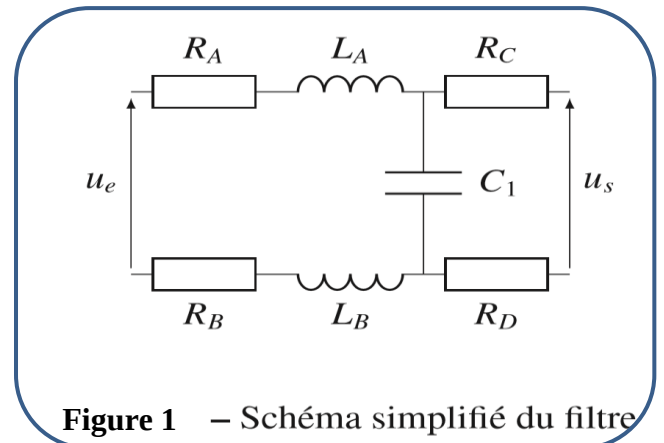


Figure 1 – Schéma simplifié du filtre

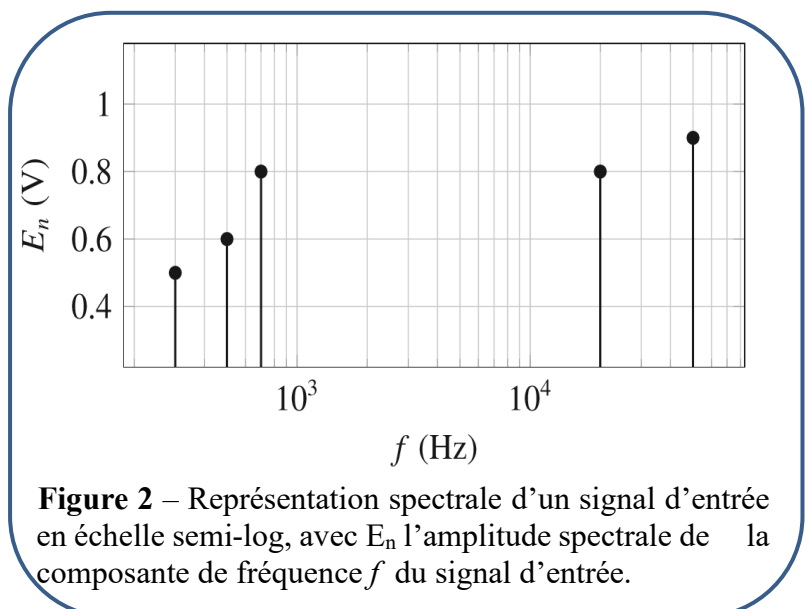


Figure 2 – Représentation spectrale d'un signal d'entrée en échelle semi-log, avec E_n l'amplitude spectrale de la composante de fréquence f du signal d'entrée.

Q7. En sortie du simple filtre RC de la question précédente, on connecte la résistance $R_u = 600 \, \Omega$ symbolisant le téléphone.

7.a - Montrer que la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$ peut se mettre sous la forme :

$\underline{H}(j\omega) = \frac{\alpha}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$. On exprimera α et ω_0 en fonction de R , R_u et C .

7.b - Établir l'expression du gain en décibels $G_{dB}(\omega)$ de la fonction de transfert et du déphasage $\varphi(\omega)$ de u_s par rapport à u_e , en fonction de α et ω_0 .

7.c - On prend $C = 4,4 \cdot 10^{-8} \text{ F}$. On souhaite avoir la même fréquence de coupure que celle du filtre réel trouvée à la question 3. Proposer une valeur numérique vraisemblable pour la résistance R . Calculer alors α .

7.d - On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Après avoir fait une étude asymptotique complète, tracer le diagramme de Bode complet de cette fonction de transfert sur votre feuille en prenant x comme variable. On prendra soin de calculer deux valeurs réelles pour le tracé de G_{dB} et φ .

Q8. En quoi le filtre proposé dans le document 1 est-il meilleur que ce simple filtre RC ?

Annexe du problème 1 :

Document 1 : Fiche Technique FILTRE Z-200FR (prises gigognes)

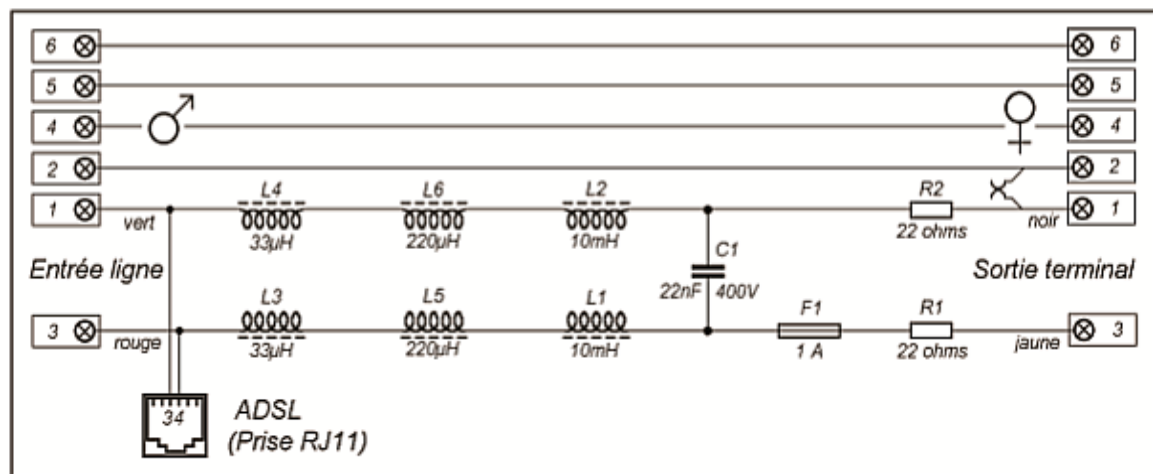


Figure 3 - Schéma technique du cablage électrique.

Description des composants

L1, L2 : enroulements réalisés sur des bobinettes de ferrite dont les plus grandes dimensions sont $d = 8 \text{ mm}$ et $l = 10 \text{ mm}$.

Résistance : 21Ω ; Nombre de spires : 500 environ.

L5, L6 : enroulements réalisés sur des bobinettes de ferrite dont les plus grandes dimensions sont $d = 4,5 \text{ mm}$ et $l = 5,5 \text{ mm}$.

Résistance : 2Ω ; Nombre de spires : 110 environ.

L3, L4 : enroulements de 15 ou 16 spires sur de minuscules tores de ferrite dont le plus grand diamètre n'atteint pas 5 mm .

Résistance : négligeable.

Réponse en fréquence

L'affaiblissement d'insertion mesuré, soit l'opposé du gain, entre un générateur d'impédance de 600 ohms et une résistance de charge de 600 ohms , en l'absence de courant continu est donné sur la **figure 4**.

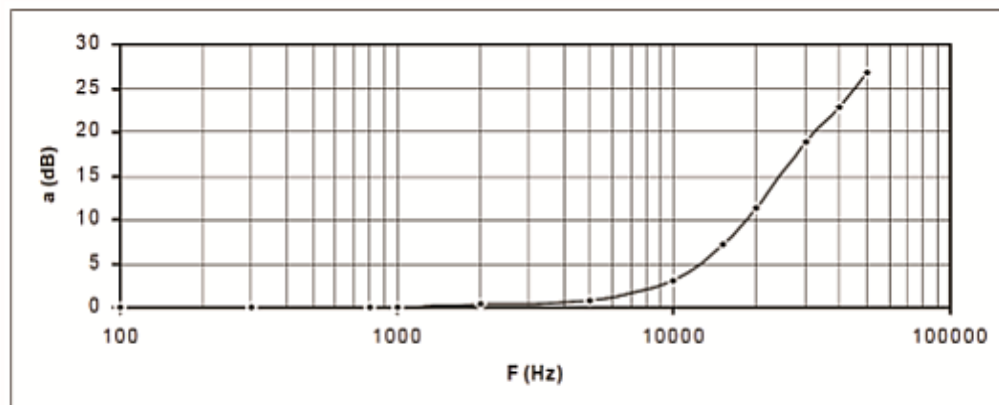


Figure 4 - Diagramme de Bode représentant l'affaiblissement d'insertion mesuré

D'après <http://www.abcelectronique.com>

Les deux parties sont totalement indépendantes.**I – Etude optique d'un appareil photographique modélisé par une, puis deux lentilles :****1 - Objectif constitué d'une seule lentille :**

On assimile l'objectif d'un appareil photographique à une lentille (L) mince convergente unique de centre O_1 et de focale $f'_1 = 50$ mm. La distance d entre la lentille (L) et l'écran (E) où se trouve le capteur photosensible est variable, et cette variation constitue la mise au point.

Q1. On désire photographier des objets dont la distance à l'appareil photographique varie de x à l'infini. Dans quel domaine doit pouvoir varier d ? On notera d_{min} et d_{max} les deux valeurs de d correspondantes ; On donnera leurs expressions en fonction de f'_1 et x , puis on les calculera en mm pour $x = 60$ cm.

Q2. On se propose de photographier une tour de hauteur $h = 50$ m et située à une distance $D = 2$ km du photographe.

- Exprimer la hauteur h_1 de l'image de la tour sur le capteur en fonction des données de l'énoncé, puis la calculer.
- Quel est l'encombrement E de l'objectif, c'est-à-dire la distance de l'objectif au capteur ?

Q3. Avec le même objectif, l'objet photographié est maintenant à la distance $D' = 1$ m de l'objectif. Pour que l'image soit nette, il faut modifier la distance capteur-lentille par rapport à la photographie d'un objet très éloigné. Exprimer la distance δ dont il faut déplacer le capteur par rapport au réglage précédent en fonction de D' et f'_1 . La calculer. La distance lentille-capteur a-t-elle augmenté ou diminué ?

2 - Objectif constitué de deux lentilles :

Un objectif de meilleure qualité est obtenu en ajoutant une lentille mince L_2 de centre O_2 et de distance focale $f'_2 = -25$ mm à la distance $e = \overline{O_1 O_2} = 31$ mm de O_1 .

On photographie de nouveau la tour AB de hauteur $h = 50$ m et située à une distance $D = 2$ km du photographe. Soit $A_1 B_1$ l'image de la tour AB par L_1 et $A' B'$ l'image définitive de AB sur le capteur.

Q4. Etablir l'expression de $\overline{O_2 A_1}$ en fonction des données de l'énoncé, puis la calculer. Indiquer la nature de l'image intermédiaire $A_1 B_1$ pour la lentille L_2 . Etablir l'expression de $\overline{F_2 A_1}$ en fonction des données de l'énoncé, puis la calculer.

Q5. Faire une construction à l'échelle sur l'annexe fourni p7 en positionnant correctement les deux lentilles et l'image intermédiaire et en lui attribuant une hauteur de 1 cm. Faire apparaître deux rayons provenant de l'objet et l'image définitive.

Q6. Déterminer la position de l'image définitive $A' B'$ par rapport à O_2 , puis la taille h_2 de l'image définitive $A' B'$ sur le capteur en fonction de h , f'_1 , f'_2 , D et e . Les calculer.

Q7. Déterminer littéralement l'encombrement E' de l'objectif constitué des deux lentilles, puis le calculer. Comparer les deux objectifs étudiés.

Q8. Quelle serait la distance focale f'_u d'une lentille unique convergente qui donnerait une image de la tour de la même taille qu'avec le téléobjectif ? Commenter l'encombrement correspondant.

II - Etude de l'accéléromètre d'un stabilisateur d'images :

Les appareils photo reflex numériques, même ceux d'entrée de gamme, sont aujourd'hui équipés d'accéléromètres pour la stabilisation d'image. Cela permet, en particulier sur les longues focales, de stabiliser la visée. Il est alors plus facile de faire le point sur un sujet très lointain et il est plus aisé de soigner son cadrage, les tremblements du photographe étant amortis.

On se propose, dans cette partie, d'étudier le fonctionnement d'un accéléromètre à détection capacitive, ce système étant le plus répandu actuellement. Son principe est décrit ci-après :

On modélise la structure mécanique étudiée par une masse ponctuelle M de masse m , suspendue à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , dont l'autre extrémité est fixée en O au bâti solide de l'appareil photo (voir figure ci-dessous).

Les amortissements sont modélisés par une force de frottement de la forme : $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}_M$ où $\vec{v}_M$ représente la vitesse du point M et α une constante positive.

Pour traduire la vibration engendrée par le tremblement du photographe, on considère que le boîtier oscille verticalement à la pulsation ω avec une amplitude Z_0 sous l'action d'une force supplémentaire $\vec{F}_e = -m\ddot{z}_0 \vec{u}_z$ avec $z_0(t) = Z_0 \cos(\omega t)$ dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

La position de la masse M est repérée par sa cote z .

On note g l'intensité du champ de pesanteur.

Q9. On note z_{eq} la position d'équilibre de la masse M par rapport à l'appareil en l'absence de vibration. Déterminer son expression en fonction de ℓ_0 , m , g et k .

Commenter.

Q10. Dans les conditions usuelles, établir l'équation différentielle en z du mouvement de la masse M en faisant apparaître les paramètres α , k , m , z_{eq} , ω et Z_0 .

On note $Z = z - z_{eq}$ la position de la masse M par rapport à sa position d'équilibre dans l'accéléromètre.

Q11. Montrer que l'équation du mouvement de M peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = Z_0 \omega^2 \cos(\omega t).$$

Nommer ω_0 et Q . Préciser leurs unités et leurs expressions en fonction de m , α et k .

On s'intéresse maintenant au mouvement de la masse en régime établi.

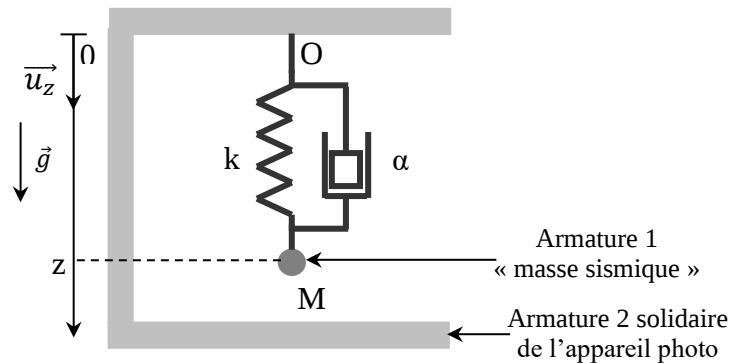
Q12. Expliquer pourquoi $Z(t)$ peut se mettre sous la forme $Z(t) = Z_M \cos(\omega t + \varphi)$. Préciser la signification des termes Z_M et φ apparaissant dans cette expression.

Q13. Etablir l'expression de Z_M en fonction de Z_0 , Q et de la pulsation réduite: $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Il est conseillé d'utiliser les notations complexes.

Q14. Montrer que la courbe $Z_M(x)$ passe par un maximum pour $Q > \delta$ où δ est une valeur numérique à préciser. Préciser l'expression x_r de x lorsque Z_M passe par ce maximum. Comparer x_r à 1.

Q15. Etudier les limites basse et haute fréquences de $Z_M(x)$, puis tracer sur un même graphique l'allure de la courbe $Z_M(x)$ pour $Q_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q_3 > Q_2$ en portant une attention particulière au positionnement des maxima.

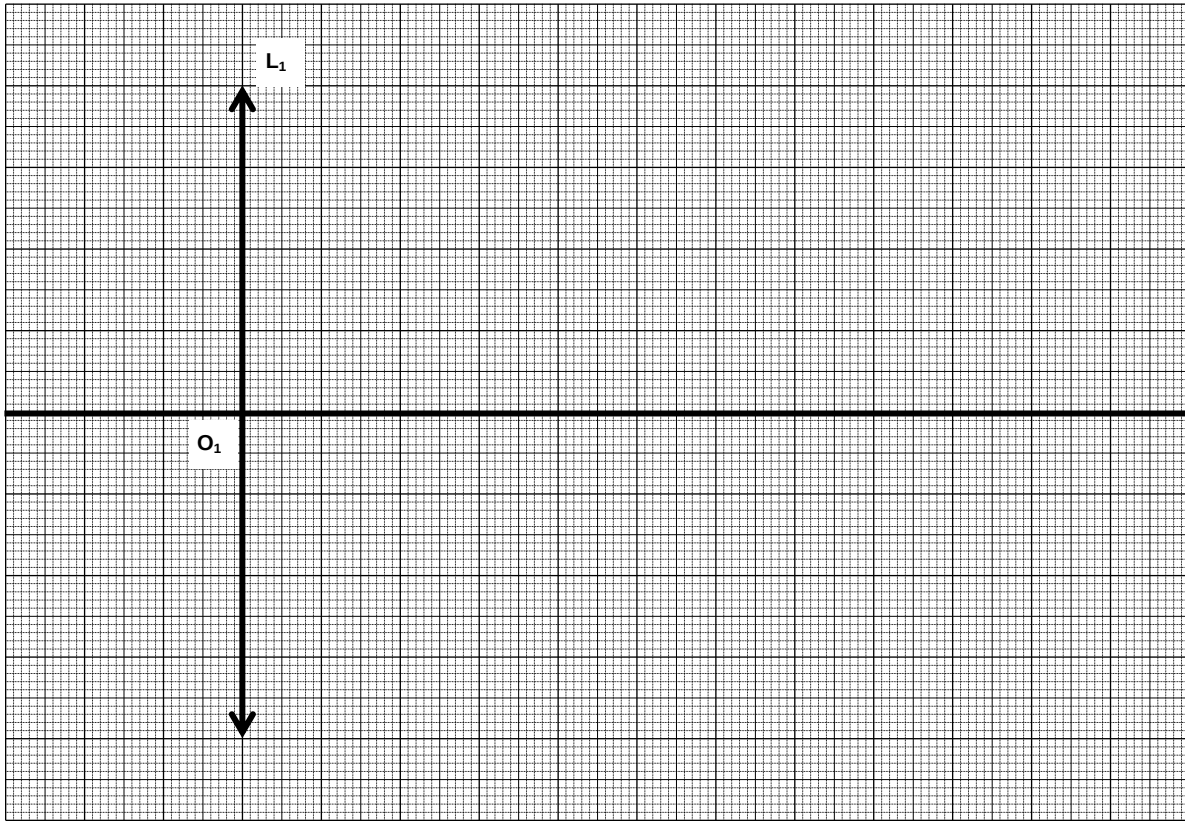
Q16. Comment faut-il choisir le facteur de qualité du système pour qu'il fonctionne sur une plage de fréquences de tremblements la plus large possible ? Expliquez votre raisonnement.



Figure

ANNEXE POUR LE PROBLEME 2, partie I.2 ; Q5

NOM PRENOM :



N'oubliez pas de le rendre avec la copie !

PROBLEME 1 : L'internet par ADSL :

(≈ 75 pts)

(D'après CCP TSI 2017)

Q1. Il est précisé dans l'énoncé que les bobines peuvent s'associer en série ou en parallèle sur le même principe que des résistances.

D'après la fiche technique, la **bobine L_A** est la bobine équivalente à **l'association série des bobines**

L_2, L_4 et L_6 . Ainsi $L_A = 10 \cdot 10^{-3} + 33 \cdot 10^{-6} + 22 \cdot 10^{-6}$; Soit **$L_A \approx 10$ mH**.

Et R_A est la résistance équivalente aux mêmes bobines soit : $R_A = 21 + 2$: **$R_A = 23 \Omega$** .

De même, la **bobine L_B** est la bobine équivalente à **l'association série des bobines L_1, L_3 et L_5** .

Soit **$L_B \approx 10$ mH** et **$R_B = 23 \Omega$** .

Et on remarque que **$R_C = R_2 = 22 \Omega$** et de même **$R_D = R_1 = 22 \Omega$** .

Enfin, on lit **$C_1 = 22$ nF**.

Q2. A basses fréquences, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert.

Et inversement en hautes fréquences, on obtient donc les deux schémas équivalents suivants :

➤ **A vide :**

Le filtre est supposé à vide donc il n'y a pas d'intensité dans les résistances R_C et R_D et par conséquence dans R_A et R_B non plus.

En BF, on obtient **$u_s = u_e$** ; **$G_{dB} \rightarrow 0$**

Et en HF : **$u_s = 0$** (tension aux bornes d'un fil) ; **$G_{dB} \rightarrow -\infty$** ;

Cela correspond donc à **un filtre passe-bas**.

➤ Si on place une résistance $R_u = 600 \Omega$ à la sortie :

Soit on considère que $R_u \gg$ aux autres résistances du circuit et cela ne change rien au comportement global du filtre.

Soit on refait le schéma équivalent :

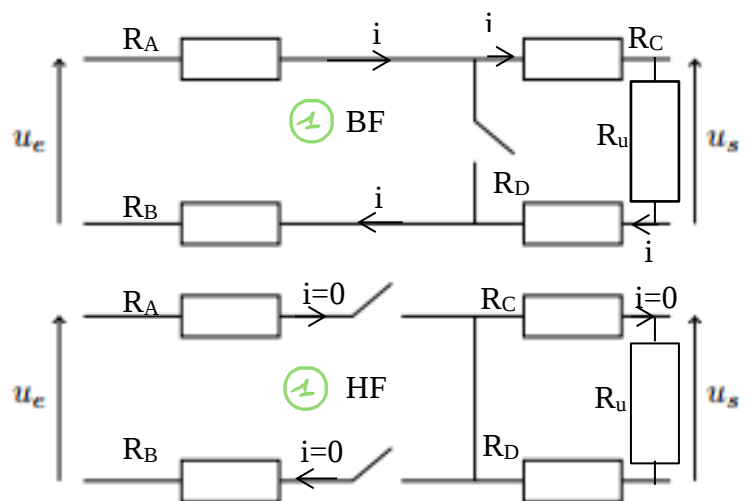
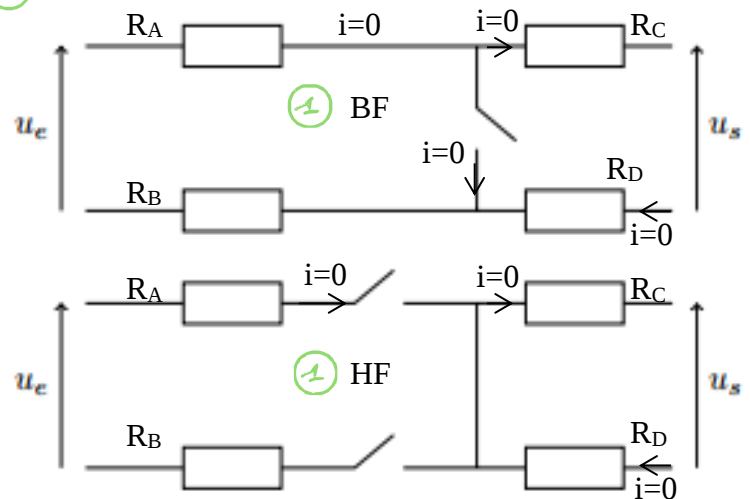
En BF, toutes les résistances sont en série, formule du pont diviseur de tension :

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{R_u}{R_A + R_B + R_C + R_D + R_u} ; \text{AN : } \frac{u_s}{u_e} = \frac{600}{23 + 23 + 22 + 22 + 600}$$

On trouve : **$\frac{u_s}{u_e} \approx 0,87$** et **$G_{dB} \rightarrow -1,24$ dB**

En HF : **$u_s = 0$** (tension aux bornes d'un fil) ; **$G_{dB} \rightarrow -\infty$** ;

Cela correspond toujours à **un filtre passe-bas**.



15 Q3. Sur le diagramme donné dans la fiche technique, il a été tracé l'affaiblissement, c'est-à-dire l'opposé du gain, en fonction de la fréquence.

On remarque que les faibles fréquences ne sont pas affectées par le filtre (en considérant $\frac{u_s}{u_e} \approx 1$), alors que l'affaiblissement augmente pour les hautes fréquences ce qui signifie que l'amplitude en sortie diminue fortement en HF. Cela correspond donc bien à un filtre passe-bas.

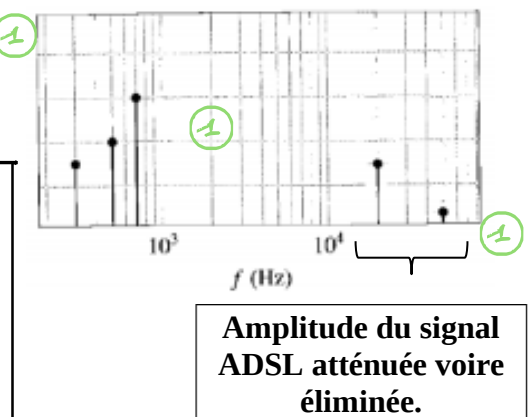
La fréquence de coupure est telle que $G_{dB}(f_c) = G_{dB\max} - 3$; Cela correspond à un affaiblissement de 3 dB. On lit $f_c = 10\,000\text{ Hz} = 10\text{ kHz}$.

13 Q4. Les fréquences audibles par l'être humain sont entre 20 Hz et 20 kHz.

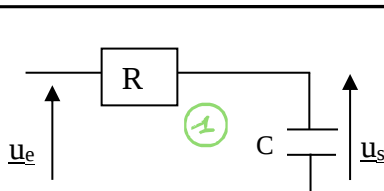
Ainsi, la fréquence de coupure choisie est grande devant les plus hautes fréquences audibles composant le signal téléphonique, mais reste faible devant la plus petite fréquence du signal ADSL.

Conclusion : Seul le signal ADSL est atténué et il n'y a pas de filtrage du signal audible.

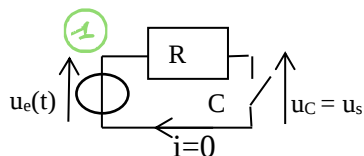
14 Q5. En sortie de filtre, on retrouve les fréquences du signal téléphonique sans modification des amplitudes puisque l'atténuation en basses fréquences est nulle, par contre le signal ADSL a été fortement diminué (voire totalement éliminé).



16 Q6. On veut obtenir un filtre passe bas avec un circuit RC série. Il faut donc mettre C en sortie, comme ci-contre, vérifions :

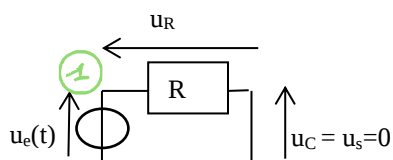


Equivalents BF et HF :
En BF :



Donc $u_s = u_e$: $H = 1$ et $G_{dB} \rightarrow 0$

En HF :



Donc $H = 0$ et $G_{dB} \rightarrow -\infty$.

On s'attend donc bien à un filtre passe bas, qui coupe les HF.

Q7. On a donc le schéma ci-contre :

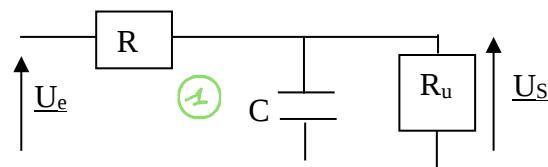
17 7.a - Calculons Z_{eq} équivalent à $R_u // C$:

$$Z_{eq} = \frac{Z_{R_u} \times Z_C}{Z_{R_u} + Z_C} = \frac{R_u \times \frac{1}{j\omega C}}{R_u + \frac{1}{j\omega C}}; \text{ Soit : } Z_{eq} = \frac{R_u}{1 + jR_u\omega C};$$

Z_{eq} est en série avec R, on peut appliquer la formule du pont diviseur de tension :

$$H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R} = \frac{\frac{R_u}{1 + jR_u\omega C}}{\frac{R_u}{1 + jR_u\omega C} + R}; \quad \text{On veut la fonction de transfert sous la forme : } H(j\omega) = \frac{\alpha}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}};$$

$$\text{Soit : } H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} \frac{R_u}{R + R_u + jRR_u\omega C}; \text{ Ainsi : } \alpha = \frac{R_u}{R + R_u} \text{ et } \omega_0 = \frac{R + R_u}{RR_u C}.$$



7.b - $G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ et $G_{dB} = 20 \log \left[\frac{\alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \right]$;

Et $\varphi = \arg(H) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

7.c - On sait que la pulsation de coupure d'un filtre passe bas du premier ordre vaut

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{R+R_u}{RR_uC}$$

Alors $\frac{R+R_u}{RR_uC} = 2\pi f_c$; Soit : $R + R_u = 2\pi RR_u C f_c$; Ainsi : $R(2\pi R_u C f_c - 1) = R_u$

D'où $R = \frac{R_u}{2\pi R_u C f_c - 1}$; AN : $R = \frac{600}{2\pi \times 600 \times 4,4 \cdot 10^{-8} \times 110^4 - 1}$; On trouve : $R \approx 911 \Omega$.

Alors $\alpha = \frac{R_u}{R+R_u}$; AN : $\alpha = \frac{600}{911+600}$; On trouve $\alpha \approx 0,4$.

7.d - On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$; alors $H(jx) = \frac{\alpha}{1+jx}$;

Etude asymptotique :

En BF : $x \ll 1$: $H(jx) \sim \alpha$

Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log \alpha \approx -8 \text{ dB}$;

Asymptote horizontale à -8 dB en BF.

Et $\varphi \rightarrow 0$;

En HF : $x \gg 1$: $H(jx) \sim \frac{\alpha}{jx} = -\frac{j\alpha}{x}$;

Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log \alpha - 20 \log x$;

Asymptote oblique de pente -20 dB / décade en HF.

Et $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$;

Intersection des asymptotes :

Pour $20 \log \alpha = 20 \log \alpha - 20 \log x$; Soit pour : $\log x = 0$ et alors $G_{dB} = 20 \log \alpha$;

Ainsi les asymptotes se croisent en

A (log x = 0 ; 20 log α ≈ -8 dB);

Diagramme réel :

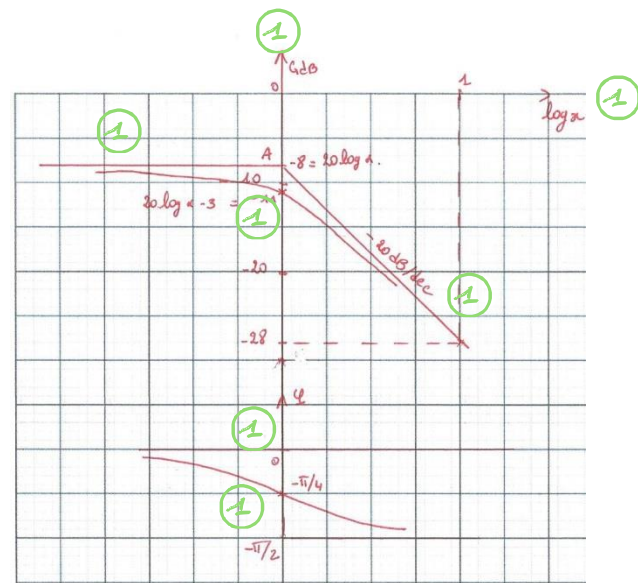
En $x = 1$: $H = \frac{\alpha}{1+j}$; Donc : $G = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$;

Soit $G_{dB} = 20 \log \alpha - 3 \approx -11 \text{ dB}$;

Et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$;

D'où le diagramme ci-contre.

Conclusion : **Filtre passe-bas** du premier ordre confirmé.



Q8. Le filtre proposé dans le document 1 est meilleur car,

- En BF, il n'a aucune **atténuation** alors que le circuit RC simple en a une de 8 dB.

- D'autre part, le filtre proposé dans le document 3 a **une pente d'environ 40 dB** par décade en HF, alors que le filtre RC simple en a une de 20. Le filtre du document 3 permet donc **de mieux couper les fréquences des signaux ADSL situés au-delà de f_c** .

PROBLEME 2 : Autour de la photographie :

(~145pts)

I – Etude optique d'un appareil photographique modélisé par une, puis deux lentilles :

1- Avec une seule lentille :

1/9

Q1.



➤ Si l'objet est à l'infini, alors l'image est dans le plan focal image de la lentille.

Il faut donc **mettre le capteur dans le plan focal image** de la lentille.

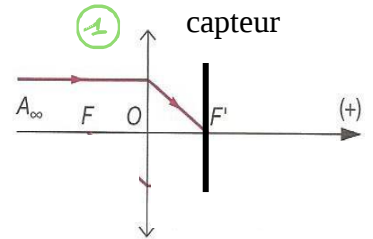
Ainsi : $d_{min} = OF' = f_1' = 50 \text{ mm}$

➤ Si l'objet est à la distance x de l'objectif :

Formule de Descartes : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f_1'}$; Avec $OA' = d_{max}$ et $OA = -x$.

Alors : $\frac{1}{d_{max}} = \frac{1}{-x} + \frac{1}{f_1'} = \frac{f_1' - x}{f_1' \times (-x)}$; Ainsi : $d_{max} = \frac{f_1' \times x}{x - f_1'}$;

AN : $d_{max} = 55 \text{ mm}$.



1/5 Q2. Le grandissement : $\gamma = \frac{A'B}{AB} = \frac{OA'}{OA}$; Soit : $\frac{-h_1}{h} = \frac{f_1'}{-D}$;

D'où : $|h_1| = \frac{f_1'}{D} h = \frac{d_{min}}{D} h$.

AN : $|h_1| = \frac{5 \times 50}{200000}$; Soit : $|h_1| = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,25 \text{ mm}$.

➤ L'encombrement est donc $E = d_{min} = f_1' = 50 \text{ mm}$, l'objet étant considéré à l'infini.

1/6

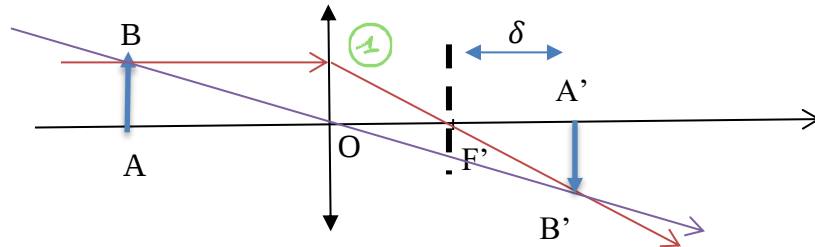
Q3. Formule de Descartes : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f_1'}$ Avec $OA' = d = OF' + F'A' = f_1' + \delta$ et $OA = -D'$.

Donc : $\frac{1}{f_1' + \delta} = \frac{1}{-D'} + \frac{1}{f_1'} = \frac{f_1' - D'}{f_1' \times (-D')}$;

Ainsi : $f_1' + \delta = \frac{f_1' \times (-D')}{f_1' - D'}$;

D'où : $\delta = \frac{f_1' \times (-D')}{f_1' - D'} - f_1' = -\frac{f_1'^2}{f_1' - D'} = \frac{f_1'^2}{D' - f_1'}$;

AN : $\delta = 2,6 \text{ mm}$. $\delta > 0$: L'encombrement ou la distance lentille-capteur a donc augmenté.



2 – Avec deux lentilles :

1/10

Q4 - L'objet est à l'infini, donc l'image intermédiaire est dans le plan focal image de L_1 :

Ainsi : $O_1A_1 = O_1F_1' = f_1' = 50 \text{ mm}$;

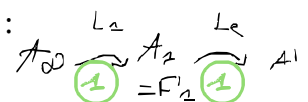
De plus : $\frac{O_2A_1}{O_2O_1} + \frac{O_1A_1}{O_1A_1} = \frac{O_2A_1}{O_2O_1} - e + f_1'$; Soit : $O_2A_1 = -e + f_1'$

AN : $O_2A_1 = -31 + 50$; Soit : $O_2A_1 = 19 \text{ mm}$.

Ainsi : $O_2A_1 > 0$: A_1 est donc située après L_2 : C'est donc un **objet virtuel pour L_2** .

Et : $\frac{F_2A_1}{F_2O_2} + \frac{O_2O_1}{O_2O_1} + \frac{O_1A_1}{O_1A_1} = \frac{F_2A_1}{F_2O_2} + \frac{O_2O_1}{O_2O_1} + \frac{O_1A_1}{O_1A_1}$; Soit : $F_2A_1 = f_2' - e + f_1'$;

AN : $F_2A_1 = -25 - 31 + 50$; D'où : $F_2A_1 = -6 \text{ mm}$.

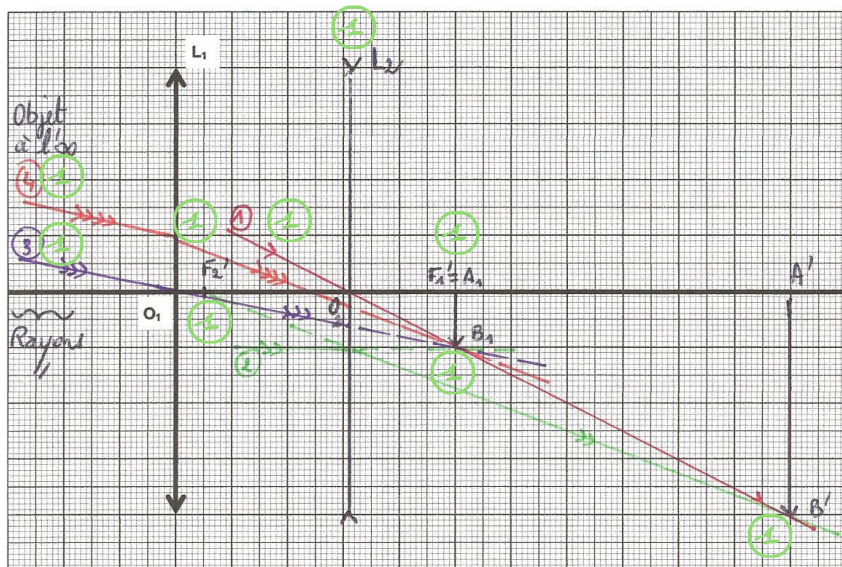


19

Q5.

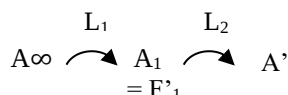
- ✓ Positionner L_2 , l'image intermédiaire A_1B_1 et les deux foyers images de L_1 et L_2 .
- ✓ Tracer le rayon 1 passant par O_2 et B_1 : Il n'est pas dévié en sortie de L_2 .
- ✓ Tracer le rayon 2 parallèle à l'axe optique passant par B_1 : Il émerge en passant par F_2' .
- ✓ Ces deux rayons se croisent et donnent la position de l'image définitive.
- ✓ Tracer le rayon 3 passant par O_1 et B_1 : Il n'est pas dévié par L_1 .
- ✓ Tracer le rayon 4 initialement parallèle au rayon 3 : Après L_1 , ils se croisent dans le plan focal image de L_1 , soit en B_1 , qui joue le rôle de foyer secondaire.

D'où la construction ci-contre.



19

Q6.



Formule de Descartes à L_2 : $\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2F_1'} = \frac{1}{f_2'}$; Donc : $\frac{1}{O_2A'} = \frac{1}{O_2F_1'} + \frac{1}{f_2'}$;

Ainsi : $\frac{1}{O_2A'} = \frac{f_2' \times O_2F_1'}{f_2' + O_2F_1'}$; Or Chasles : $\frac{1}{O_2F_1'} = \frac{1}{O_2O_1} + \frac{1}{O_1F_1'}$;

Ainsi : $\frac{1}{O_2F_1'} = -\frac{e}{f_1'} + \frac{1}{f_1'}$; Ccl : $\frac{1}{O_2A'} = \frac{f_2' \times (-e + f_1')}{f_1' + f_2' - e}$.

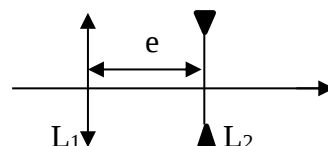
AN : $O_2A' = 79,2 \text{ mm}$.

Le grandissement : $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{-h_2}{h} = \gamma_1 \times \gamma_2 = \frac{O_1A_1}{O_1A} \times \frac{O_2A'}{O_2A_1}$

D'où : $\frac{-h_2}{h} = \frac{f_1'}{-D} \times \frac{f_2' \times (-e + f_1')}{f_1' + f_2' - e} \times \frac{f_1'}{D}$

Ccl : $-h_2 = -\frac{f_1'}{D} \times \frac{f_2' \times (-e + f_1')}{f_1' + f_2' - e} \times h = -\frac{f_1' f_2'}{D(f_1' + f_2' - e)} \times h$; Ou encore : $|h_2| = \frac{f_1' f_2'}{D(f_1' + f_2' - e)} \times h$.

AN : $|h_2| = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 5,2 \text{ mm}$.



15

Q7. L'encombrement E' du téléobjectif correspond à la distance O_1A' .

Soit : $E' = O_1A' = O_1O_2 + O_2A' = e + \frac{f_2' \times (-e + f_1')}{f_1' + f_2' - e}$

AN : $E' = O_1A' = 110 \text{ mm}$.

L'encombrement au I était $E = d_{\min} = f_1' = 50 \text{ mm}$.

Ccl : $h_2 > h_1$. Meilleure qualité de photo, mais $E' > E$: Donc encombrement bien plus important.

15

Q8. Le grandissement d'une lentille unique serait : $\gamma_u = \frac{A'B'}{AB} = \frac{-h_2}{h} = \frac{O_1A'}{OA} = \frac{f_u'}{-D}$

Soit : $f_u' = h_2 \frac{D}{h}$; AN : $f_u' = 208 \text{ mm}$.

Ccl : Avec une lentille simple l'encombrement serait de 20,8 cm, alors qu'avec les deux lentilles E' valait 11 cm. Le téléobjectif composé de deux lentilles permet donc de diviser par 2 l'encombrement à qualité égale.

II - Etude de l'accéléromètre d'un stabilisateur d'images :

12 Q9. Référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen (1)

Base de projection cartésienne. L'axe Oz est orienté vers le bas. (1)

Système : La masse M (1)

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Le poids : $\vec{P} = M\vec{g} = +mg\vec{u}_z$ (1)
- La force de Hooke dirigée vers le haut : $\vec{T} = -k(l - \ell_0)\vec{u}_z = -k(z_{eq} - \ell_0)\vec{u}_z$. (1)
- Pas de force de frottement de la forme : $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}_M$, car le système est immobile. (1)
- Pas de force supplémentaire : $\vec{F}_e = -m\ddot{z}_0\vec{u}_z$ car pas de vibration. (1)

Condition d'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$; Soit : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$. (1)

Projetons sur l'axe (Oz) : $mg - k(z_{eq} - \ell_0) = 0$; Soit : $z_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k} > \ell_0$ ok, car le ressort est étiré. (1)

16 Q10. Dans les conditions usuelles, on rajoute les deux forces précédemment citées comme étant nulles :

- Force de frottement de la forme : $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}_M$ avec $\vec{v}_M = \dot{z}\vec{u}_z$ (1)
- Force supplémentaire : $\vec{F}_e = -m\ddot{z}_0\vec{u}_z$ avec $z_0(t) = Z_0 \cos(\omega t)$; Soit : $\vec{F}_e = +m Z_0 \omega^2 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ (1)

Equation différentielle du mouvement : 2^{ème} loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{z}\vec{u}_z$ (1)

En projetant sur l'axe (Oz), il vient : $mg - k(z - \ell_0) - \alpha\dot{z} + m Z_0 \omega^2 \cos(\omega t) = m\ddot{z}$ (1)

On introduit z_{eq} : Il vient : $mg - k(z - z_{eq} + z_{eq} - \ell_0) - \alpha\dot{z} + m Z_0 \omega^2 \cos(\omega t) = m\ddot{z}$ (1)

Or $mg - k(z_{eq} - \ell_0) = 0$; Il reste : $-k(z - z_{eq}) - \alpha\dot{z} + m Z_0 \omega^2 \cos(\omega t) = m\ddot{z}$ (1)

Ou encore : $m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = kz_{eq} + m Z_0 \omega^2 \cos(\omega t)$

Et sous forme canonique, on obtient : $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_{eq} + Z_0 \omega^2 \cos(\omega t)$ (1)

17 Q11. On pose $Z = z - z_{eq}$: On a donc : $\ddot{Z} + \frac{\alpha}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = + Z_0 \omega^2 \cos(\omega t)$

Et avec $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$, on obtient : $\ddot{Z} + \frac{\alpha}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = + Z_0 \omega^2 \cos(\omega t)$ (1)

De la forme : $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = Z_0 \omega^2 \cos(\omega t)$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la **pulsation propre** de l'oscillateur mécanique exprimée en **rad.s⁻¹**. (1)

Q est le **facteur de qualité sans dimension**. Par identification, on a $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$;

Soit : $Q = \frac{m}{\alpha} \omega_0 = \frac{m}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m}}$; D'où $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ (1)

13 Q12. En régime permanent, la masse oscille à la même pulsation que le boîtier, mais peut être déphasée.

- Z_M est l'amplitude du mouvement de la masse. (1)

- φ est le déphasage de la masse par rapport au mouvement du boîtier. (1)

16 Q13. En régime établi, on passe aux notations complexes :

$\underline{Z} = \underline{Z}_M e^{j\omega t}$ et $\underline{Z}_M = Z_M e^{j\varphi}$, l'amplitude complexe. (1)

L'équation différentielle devient alors : $\ddot{\underline{Z}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{Z}} + \omega_0^2 \underline{Z} = + Z_0 \omega^2 e^{j\omega t}$. (1)

De plus, $\frac{d\underline{Z}}{dt} = j\omega \underline{Z}$ et $\frac{d^2\underline{Z}}{dt^2} = -\omega^2 \underline{Z}$. Il vient alors : $\underline{Z}(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) = Z_0 \omega^2 e^{j\omega t}$. (1)

Et en simplifiant par $e^{j\omega t}$ de chaque côté, on obtient : $\underline{Z}_M(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) = Z_0 \omega^2$ (1)

Soit : $\underline{Z}_M(j\omega) = \frac{Z_0 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}} = \frac{Z_0}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j\frac{\omega_0}{Q}} = \frac{Z_0}{\frac{1}{x^2} - 1 + j\frac{1}{Qx}}$. (1)

On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$; Il vient : $\underline{Z}_M(jx) = \frac{Z_0}{\frac{1}{x^2} - 1 + j\frac{1}{Qx}}$. (1)

Enfin, $\underline{Z}_M(x) = |\underline{Z}_M(jx)| = \frac{Z_0}{\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{Q^2 x^2}}}$. (1)

Q14. Le numérateur est constant, mais le dénominateur varie en fonction de x .

Posons $f(x) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 x^2}$.

Z_M passe par un maximum, lorsque le dénominateur est minimum, donc lorsque $\frac{df}{dx} = 0$.

Or $\frac{df}{dx} = 2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right) - \frac{2}{Q^2 x^3}$.

Soit : $\frac{df}{dx} = \frac{2}{x^3} \left(2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{Q^2}\right)$.

Ainsi $\frac{df}{dx} = 0$ ssi $\frac{2}{x_r^2} = 2 - \frac{1}{Q^2}$; Ou encore : $\frac{1}{x_r^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2} = \frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}$

Il vient : $x_r^2 = \frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}$; Ou encore $x_r = \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$ et x_r n'existe que si $2Q^2 - 1 > 0$; Soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D'après l'expression de $x_r = \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}}$, on en conclut que $x_r > 1$.

Q15. $\lim_{x \rightarrow 0} Z_M(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} Z_M(x) = Z_0$.

D'où l'allure de la courbe ci-contre avec condition de résonance.

Pas de résonance avec Q_1 .

Mais **résonance avec Q_2 et Q_3 .**

De plus, $Q_3 > Q_2 > 0$.

Donc $Q_3^2 > Q_2^2$.

Et $\frac{1}{Q_3^2} < \frac{1}{Q_2^2}$; Alors $\frac{1}{2Q_3^2} < \frac{1}{2Q_2^2}$.

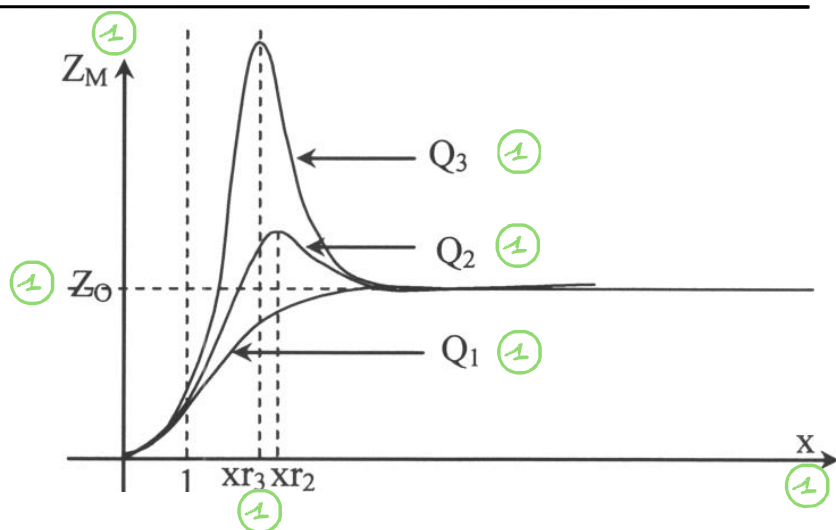
Et $-\frac{1}{2Q_3^2} > -\frac{1}{2Q_2^2}$.

$1 - \frac{1}{2Q_3^2} > 1 - \frac{1}{2Q_2^2}$.

Enfin : $\frac{1}{1 - \frac{1}{2Q_3^2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2Q_2^2}}$.

D'où : $x_{r3} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2Q_3^2}}} < \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2Q_2^2}}} = x_{r2}$.

D'autre part quand $Q \uparrow$ alors $Z_M \uparrow$. Conclusion : $Z_{M3} > Z_{M2}$.



Q16. Pour que le stabilisateur fonctionne, on veut que Z_M reste inférieur à Z_0 .

Il faut donc que $Q \approx Q_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.