

Actions mécaniques du champ magnétique

« Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse. »

Pierre-Simon LAPLACE à NAPOLEON, circa 1800

Sommaire

I La force de LAPLACE	2
I/A Observations expérimentales	2
I/B Densité linéique de la force de LAPLACE	2
I/C Expression intégrale de la force de LAPLACE	3
II Actions de LAPLACE en rotation	4
II/A Couple de LAPLACE	4
II/B Aspect énergétique	8

Capacités exigibles

- | | |
|--|--|
| ☐ Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme

☐ Établir et citer l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. | ☐ Exprimer la puissance des forces de Laplace.

☐ Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique.

☐ Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace. |
|--|--|

L'essentiel

Propriétés

- | | |
|---|---|
| ☐ I2.1 : Force de LAPLACE infinitésimale | 2 |
| ☐ I2.2 : Force de LAPLACE | 3 |
| ☐ I2.3 : Couple de LAPLACE | 4 |
| ☐ I2.4 : Énergie potentielle magnétique | 8 |

Démonstrations

- | | |
|---|---|
| ☐ I2.1 : Force infinitésimale de LAPLACE | 3 |
| ☐ I2.2 : Force de LAPLACE | 3 |
| ☐ I2.3 : Couple de LAPLACE | 4 |
| ☐ I2.4 : Dérivée vectorielle rotation | 8 |
| ☐ I2.5 : Énergie potentielle magnétique | 8 |

Implications

- | | |
|--|---|
| ☐ I2.1 : Puissance de la force de LAPLACE | 4 |
| ☐ I2.2 : Puissance du couple de LAPLACE | 5 |

Applications

- | | |
|--|---|
| ☐ I2.1 : Oscillations d'un aimant | 6 |
| ☐ I2.2 : Oscillations par énergie | 8 |

Outils

- | | |
|--|---|
| ☐ I2.1 : Dérivée vectorielle rotation | 8 |
|--|---|

Points importants

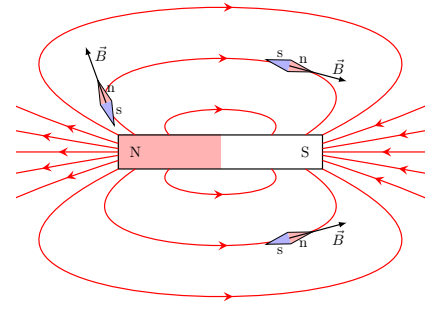
- | | |
|---|---|
| ☐ I2.1 : Action d'un champ sur un aimant | 6 |
|---|---|

I La force de LAPLACE

I/A Observations expérimentales

Pour introduire la notion d'aimant et définir la boussole, nous avons dit qu'une petite aiguille aimantée s'alignait sur la direction du champ magnétique. Il y a donc une action mécanique entre aimant et champ.

Une autre manifestation remarquable est celle des rails de LAPLACE :



Expérience I2.1 : Rails de LAPLACE

On utilise un **aimant en U** pour créer un champ magnétique uniforme sur une assez grande partie d'un barreau métallique mobile, posé sur un bout de **circuit électrique**. Le **barreau** permet de **fermer le circuit**. On allume alors le courant (voir [cette vidéo](#)).

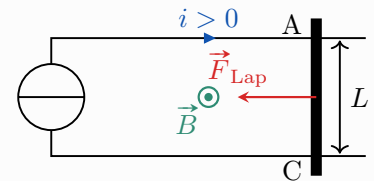


FIGURE I2.1

Observation I2.1 : Rails de LAPLACE

- ◇ Lorsqu'on allume le courant, le barreau se met en mouvement **vers la gauche**.
- ◇ En retournant l'aimant **ou** le sens du courant, le mouvement **s'inverse**.
- ◇ En mettant $\vec{B}$ dans le sens de la tige mobile, il n'y a pas de mouvement.

Ces observations suggèrent l'existence d'une **force** dépendant du **courant** et du **champ magnétique**, ainsi que de la **direction** du barreau.

I/B Densité linéique de la force de LAPLACE

♥ Propriété I2.1 : Force de LAPLACE infinitésimale

Un élément de fil électrique de longueur $d\ell$ parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit la force de LAPLACE :

$$d\vec{F}_{\text{LAPLACE}} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

avec $d\vec{\ell}$ orienté **dans le sens du courant**.

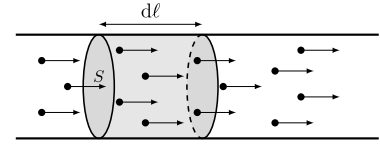
Rappel I2.1 : Force de LORENTZ

La force magnétique de LORENTZ subie par un électron de charge $-e$ et de vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ est donnée par :

$$\vec{F}_{\text{Lor}} = -e (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

Démonstration I2.1 : Force infinitésimale de LAPLACE**Hypothèses**

- ◇ les électrons ont une **même vitesse** $\vec{v} = v\vec{u}_x$ ¹ ;
- ◇ la **densité d'électrons** n (en m^{-3}) est uniforme ;
- ◇ soit S sa section, constante, et longueur $d\ell$ sa longueur.

**FIGURE I2.2****Calcul**

$$\vec{dF}_{\text{Lap}} = -e dN \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Or, $i = \frac{dq}{dt} = -e \frac{dN}{dt} \Leftrightarrow \boxed{-e dN = i dt}$

Soit

$$\vec{dF}_{\text{Lap}} = i \vec{v} dt \wedge \vec{B}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{dF}_{\text{Lap}} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}}$$

I/C Expression intégrale de la force de LAPLACE**♥ Propriété I2.2 : Force de LAPLACE**

La force de LAPLACE sur une barre conductrice de longueur L traversée par un courant i et placée dans un champ magnétique **uniforme** et **stationnaire** $\vec{B}$:

- 1) s'applique **en son milieu** ;
- 2) s'exprime

$$\boxed{\vec{F}_{\text{LAPLACE}} = i \vec{L} \wedge \vec{B}}$$

avec $\vec{L}$ dans le sens de i .**Démonstration I2.2 : Force de LAPLACE**

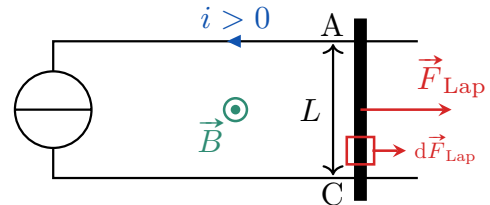
On **intègre** sur la longueur :

$$\vec{F}_{\text{Lap}} = \int_A^C \vec{dF}_{\text{Lap}} = \int_A^C i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}} = i \left(\int_A^C d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}} = i \vec{L} \wedge \vec{B}$$

$\vec{B}$ uniforme

**FIGURE I2.3 – Schéma rails.****Remarque I2.1 : Force de LAPLACE**

- 1) Elle respecte la règle de la main droite, version « trois doigts » :

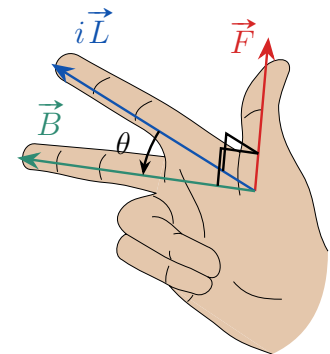
- ◇ la force sur le pouce (« le pouce pousse ») ;
- ◇ l'**intensité** sur l'**index** ;
- ◇ le champ **magnétique** sur le **majeur**.

- 2) On obtient alors la dimension de B en fonction des dimensions SI :

$$B = \frac{F}{\ell i} \Leftrightarrow \dim B = \frac{\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}}{\text{L} \cdot \text{I}} = \text{M} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{I}^{-1}$$

- 3) Pour un fil de 5 cm dans un champ de 0,1 T parcouru par une intensité de 1 A, on trouve :

$$\boxed{\|\vec{F}_{\text{Lap}}\| = i \ell B = 5 \text{ mN}}$$



1. Dans une situation réelle, v représente la vitesse **moyenne** des électrons.

♥ Implication I2.1 : Puissance de la force de LAPLACE

La puissance de la force de LAPLACE correspondante est :

$$\mathcal{P}_{L,v} = (i \vec{L} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

Ainsi, alors que la force de magnétique de LORENTZ était de puissance nulle sur **1 électron**, ça n'est pas le cas de la force de LAPLACE qui s'applique sur un solide conducteur : dans ce cas, **un champ magnétique peut accélérer le système**.

II Actions de LAPLACE en rotation

II/A Couple de LAPLACE

♥ Propriété I2.3 : Couple de LAPLACE

Un **circuit** ou un **aimant** de moment magnétique $\vec{\mu}$ plongé dans un champ **uniforme** et **stationnaire** $\vec{B}$ subit un **couple magnétique**, issu du moment des forces de LAPLACE par rapport à un axe $\vec{u}_z$ tel que :

$$\vec{\Gamma}_{\text{Lap}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

II/A) 1 Spire rectangulaire plongée dans un champ constant

♥ Démonstration I2.3 : Couple de LAPLACE

Modélisation

- ◇ Cadre rectangulaire AECD parcouru par un courant i pouvant tourner autour de l'axe (Oz).
- ◇ On impose un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_x$. On note θ l'angle entre $\vec{\mu} = i\vec{S}$ (orienté par la main droite selon i) et $\vec{B}$.

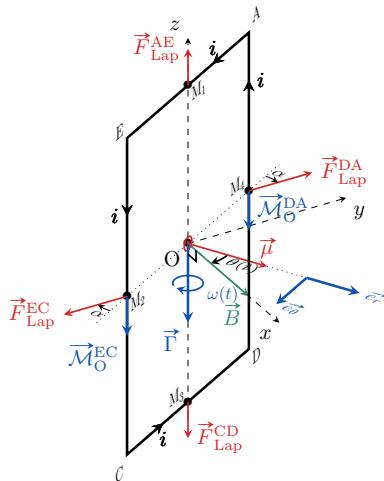


FIGURE I2.4 – 3D

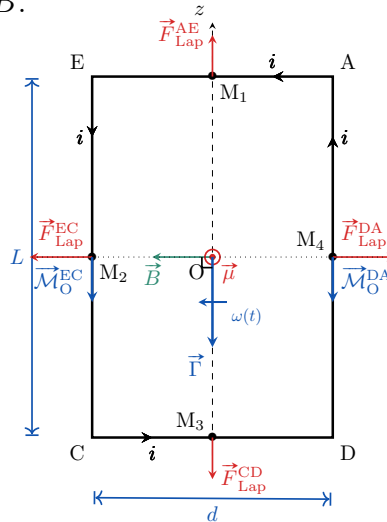


FIGURE I2.5 – Face

Résultante des forces

$$\vec{F}_{\text{Lap,tot}} = i \oint_C d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Or, $\vec{B}$ uniforme

$$\Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap,tot}} = i \left(\underbrace{\oint_C d\vec{\ell}}_{=\vec{0}} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

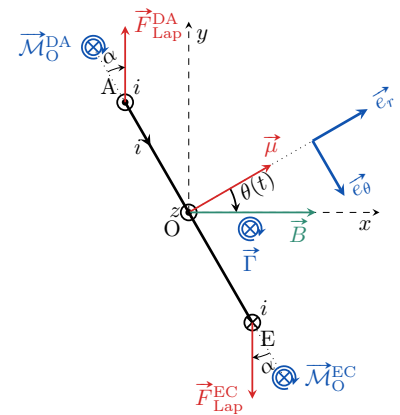


FIGURE I2.6 – Dessus

Moment des forces

◇ AE :

Force

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{AE}} &= i\vec{AE} \wedge \vec{B} \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{AE}} &= i(-d \cos(\theta) \vec{u}_y + d \sin(\theta) \vec{u}_x) \wedge \vec{B} \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{AE}} &= idB \cos(\theta) \vec{u}_z\end{aligned}$$

Moment

Elle s'applique en $M_1 \in (Oz)$, soit

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{AE}}) = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{AE}} = \vec{0}$$

◇ EC :

Force

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}} &= i\vec{EC} \wedge \vec{B} \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}} &= i(-L\vec{u}_z) \wedge B\vec{u}_x \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}} &= -iLB\vec{u}_y\end{aligned}$$

Moment

Elle s'applique en M_2 , soit

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}}) &= \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}} \\ \Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}}) &= \left(-\frac{d}{2} \cos(\theta) \vec{u}_y + \frac{d}{2} \sin(\theta) \vec{u}_x\right) \wedge -iLB\vec{u}_y \\ \Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}}) &= -iLB \frac{d}{2} \sin \theta \vec{u}_z\end{aligned}$$

◇ CD : La force agissant sur le côté $\vec{CD}$ s'applique en M_3 , qui est sur l'axe de rotation, donc immédiatement :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{CD}}) = \vec{0}$$

◇ DA : De manière analogue au côté $\vec{EC}$ (on vérifie avec la règle de la main droite) :

Force

$$\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{DA}} = iLB\vec{u}_y$$

Moment

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{DA}}) = -iLB \frac{d}{2} \sin \theta \vec{u}_z$$

Couple des forces

En sommant tous ces moments, on trouve :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{\text{Lap}} &= \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{Lap},i}) \\ \Leftrightarrow \vec{\Gamma}_{\text{Lap}} &= -idLB \sin \theta \vec{u}_z\end{aligned}$$

Or, $\vec{\mu} = iS\vec{n}$, donc :

$$\begin{aligned}\vec{\mu} \wedge \vec{B} &= iS(\cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y) \wedge B\vec{u}_x \\ \Leftrightarrow \vec{\mu} \wedge \vec{B} &= -iSB \sin(\theta) \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \vec{\mu} \wedge \vec{B} &= -iLdB \sin(\theta) \vec{u}_z = \vec{\Gamma}_{\text{Lap}} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

♥ Implication I2.2 : Puissance du couple de LAPLACE

La puissance du couple de LAPLACE correspondante est :

$$\mathcal{P}_{L,\omega} = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{\omega}$$

avec $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire de rotation.Pour un circuit de vitesse de translation $\vec{v}$ et de vitesse angulaire $\vec{\omega}$, on aura

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} + \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{\omega}$$

II/A) 2 Effet sur un aimant

Propriété I2.3

Par analogie avec la spire, on a aussi qu'un aimant de moment magnétique $\vec{\mu}$ soumis à un champ magnétique $\vec{B}$ subit un couple de forces :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

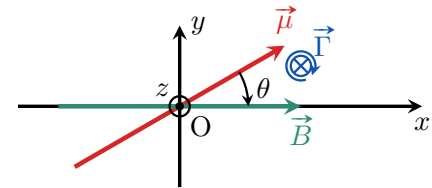


FIGURE I2.7

♥ Application I2.1 : Oscillations d'un aimant

- 1) Exprimer le couple de LAPLACE subit par $\vec{\mu}$ en fonction de θ .
- 2) En déduire les positions d'équilibre de $\vec{\mu}$.
- 3) Étudier la stabilité de ces positions d'équilibre à l'aide de 2 schémas.
- 4) Déterminer l'équation du mouvement de l'aimant et donner sa période autour de l'équilibre stable.

$$1) \quad \vec{\mu} = \mu (\cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y) \quad \text{et} \quad \vec{B} = B \vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Gamma} = -\mu_0 \sin \theta \vec{u}_z}$$

$$2) \quad \vec{\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \sin \theta_{\text{eq}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_{\text{eq}} = 0 \\ \text{ou} \\ \theta_{\text{eq}} = \pi \end{cases}$$

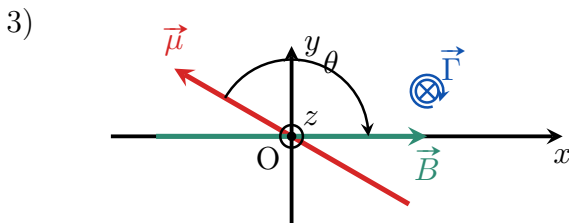


FIGURE I2.8

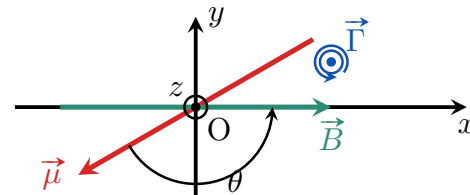


FIGURE I2.9

- ◇ En $\theta_{\text{eq}} = \pi$, une déviation vers le haut force une rotation en sens horaire et inversement vers le bas, qui écarte donc l'aimant de sa position d'équilibre : elle est **instable**.
- ◇ De même, en $\theta_{\text{eq}} = 0$, une petite déviation vers le haut donne un mouvement de rotation dans le sens horaire et inversement, le ramenant à sa position d'équilibre : elle est **stable**.

$$4) \quad \frac{d\mathcal{L}_z}{dt} \stackrel{\text{TMC}}{=} J\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_z = \Gamma \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\mu B}{J} \sin \theta = 0}$$

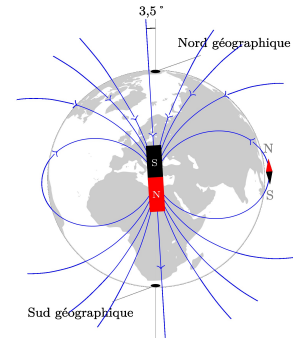
$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{\mu B}{J} \Leftrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mu B}}} \quad \text{pour } \theta \approx 0$$

Important I2.1 : Action d'un champ sur un aimant

Du fait des petites vibrations (qui rendent la position $\theta = \pi$ non durable) et des frottements qui arrêtent sa course, **un aimant tend à s'aligner sur le champ magnétique**, et ce d'autant plus vite que le champ $\vec{B}$ est intense.

On peut donc pleinement expliquer l'alignement d'une boussole à la surface de la Terre, toujours en modélisant son champ magnétique par un aimant : l'aiguille aimantée de moment magnétique $\vec{\mu}$ s'oriente spontanément sur le champ magnétique terrestre.

On notera bien que dans ce cas, la boussole pointe bien vers le Nord géographique, mais qu'il correspond au pôle Sud magnétique de l'aimant par lequel on représente la Terre².



II/A) 3 Effet moteur d'un champ magnétique tournant

Si un aimant a tendance à s'orienter sur un champ magnétique, on peut utiliser ce couple pour forcer la rotation continue d'un aimant grâce à un **champ tournant** : c'est le principe du **moteur synchrone**.

Définition I2.1 : Champ magnétique tournant

Un champ tournant est un champ de **norme constante**, mais dont la **direction tourne** à vitesse angulaire constante.

Par le couple de LAPLACE, un **aimant** soumis à ce champ tournera en régime stationnaire à la **même vitesse** angulaire ω .

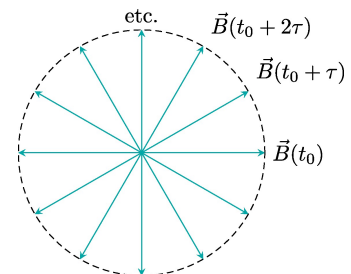


FIGURE I2.10 –
Champ magnétique tournant.

Exemple I2.1 : Champ tournant

Pour réaliser un champ tournant, on peut utiliser deux bobines identiques, de courants déphasés de $\pi/2$:

$$i_1(t) = I_0 \cos(\omega t) \\ \text{et} \quad i_2(t) = I_0 \cos(\omega t - \pi/2) = I_0 \sin \omega t$$

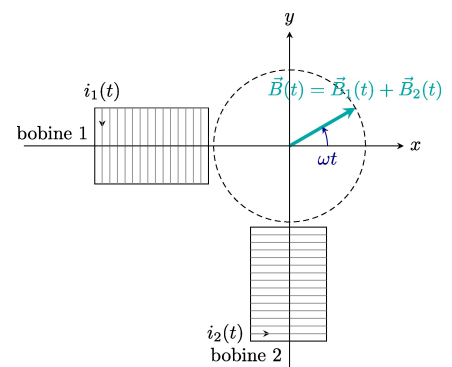
Ainsi, proche de l'axe des bobines on aura des champs

$$\vec{B}_1(t) = kI_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(t) = kI_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

Soit $\vec{B} = kI_0(\cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y) = kI_0\vec{u}_r$

qui est bien un champ tournant.

Il est également possible de faire un champ tournant à l'aide de trois bobines, décalées de $2\pi/3$: c'est ce qu'on appelle un courant **triphase**, et c'est ce qui est utilisé dans le transport d'électricité de manière industrielle.



2. Le Nord magnétique reste au Nord ! On parle ici du pôle sud de l'aimant.

II/B Aspect énergétique

♥ Outils I2.1 : Dérivée vectorielle rotation

Soit $\vec{A}$ un vecteur uniforme en rotation autour d'un axe $\vec{e}_z$ à vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z$. On a :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

Démonstration I2.4 : Dérivée vectorielle rotation

Soit, en toute généralité, $\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta$ un vecteur uniforme en coordonnées polaires. Alors :

Dérivée explicite

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= A_r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + A_\theta \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} &= A_r \dot{\theta}\vec{e}_\theta - A_\theta \dot{\theta}\vec{e}_r \end{aligned}$$

Produit vectoriel

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{A} &= \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge (A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta) \\ \Leftrightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{A} &= A_r\dot{\theta}\vec{e}_\theta - A_\theta\dot{\theta}\vec{e}_r = \frac{d\vec{A}}{dt} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

♥ Propriété I2.4 : Énergie potentielle magnétique

Le couple de LAPLACE est **conservatif**, et s'associe à une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Démonstration I2.5 : Énergie potentielle magnétique

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} &\triangleq \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega} dt \\ \Leftrightarrow \delta\mathcal{W} &= (\vec{\mu} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{\omega} dt \\ \Leftrightarrow \delta\mathcal{W} &= \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{\mu})}_{=\frac{d\vec{\mu}}{dt}} dt \cdot \vec{B} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Alternance du} \\ \text{produit mixte} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \delta\mathcal{W} &= \frac{d\vec{\mu}}{dt} dt \cdot \vec{B} \\ \Leftrightarrow -d\mathcal{E}_p^{\text{mag}} &= d(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_p^{\text{mag}} &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Application I2.2 : Oscillations par énergie

Retrouver les résultats de la section II/A) 2 en utilisant l'énergie potentielle magnétique.

On calcule les dérivées spatiales de l'énergie potentielle magnétique :

$$\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos(\theta) \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_p^{\text{mag}}}{d\theta} = \mu B \sin(\theta) \Rightarrow \frac{d^2\mathcal{E}_p^{\text{mag}}}{d\theta^2} = \mu B \cos(\theta)$$

$$\text{Soit} \quad \left. \frac{d\mathcal{E}_p^{\text{mag}}}{d\theta} \right|_{\theta_{\text{eq}}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_{\text{eq}} = 0 \\ \text{ou} \\ \theta_{\text{eq}} = \pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p^{\text{mag}}}{d\theta^2} \right|_{\theta_{\text{eq}}=0} = \mu B > 0 & \text{stable} \\ \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p^{\text{mag}}}{d\theta^2} \right|_{\theta_{\text{eq}}=\pi} = -\mu B < 0 & \text{instable} \end{cases} \quad \blacksquare$$

$$\text{De plus,} \quad \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \mu B \cos(\theta) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow J\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\mu B \sin(\theta) = 0 \stackrel{\dot{\theta} \neq 0}{\Leftrightarrow} \ddot{\theta} + \frac{\mu B}{J} \sin(\theta) = 0 \quad \blacksquare$$