

Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont interdites

Au programme

Cristallographie et induction chapitres 1 à 3.

Sommaire

E1	Oxyde de zirconium solide	2
E2	Les phénomènes d'induction – questions de cours	4
E3	Rails de LAPLACE inclinés	6



Aucune impasse tolérée : il est obligatoire de faire de la cristallographie et de l'induction.

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendrez soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- | | |
|---|---|
| ◇ A : application numérique mal faite ; | ◇ Q : question mal ou non indiquée ; |
| ◇ N : numéro de copie manquant ; | ◇ C : copie grand carreaux ; |
| ◇ P : prénom manquant ; | ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ; |
| ◇ E : manque d'encadrement des réponses ; | ◇ H : homogénéité non respectée ; |
| ◇ M : marge non laissée ou trop grande ; | ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ; |
| ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ; | ◇ R : schéma moche fait sans règle ; |
| ◇ L : absence de connecteur logique ($\Leftrightarrow$) ; | ◇ φ : loi physique fondamentale brisée. |

Exemple application numérique

$$n = \frac{PV}{RT} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. : $n = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol}$

~~$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8,32 \cdot 300} = 0,56$$~~

/41 E1 Oxyde de zirconium solide

Les piles à combustible à oxyde solide permettent d'avoir en contact deux phases solide et gazeuse, ce qui supprime les problèmes liés à la gestion de trois phases, notamment la corrosion. Les électrodes sont poreuses de façon à permettre un transport rapide des gaz. Un matériau de choix pour l'électrolyte est l'oxyde de zirconium, appelé zircone, stabilisé à l'yttrium.

La zircone peut être assimilée à un cristal ionique formé de cations Zr^{4+} et d'anions O^{2-} de rayons respectifs r_+ et r_- . Les cations sont distribués aux nœuds d'un réseau cubique faces centrées (CFC).

- /2 1 Rappel ce qu'est le modèle des sphères dures.

Réponse

Le modèle des sphères dures consiste à considérer les entités monoatomiques (atomes ou ions) comme des sphères impénétrables ① et indéformables. ①

- /4 2 Représenter la maille conventionnelle d'une structure CFC de cations. Indiquer le nombre de cations en propre par maille en détaillant le calcul.

Réponse

On a 8 atomes aux sommets, et 6 atomes au centre des faces (voir Figure D11.1). Les premiers sont partagés entre huit mailles, les seconds entre 2 mailles, d'où

$$N = 6 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{8} \Leftrightarrow N = 4 \text{ cations par maille}$$

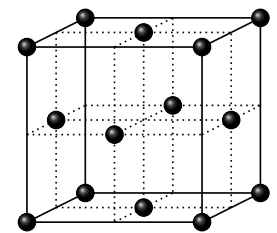


FIGURE D11.1 – ①+①

- /9 3 Définir puis démontrer la compacité d'une telle structure dans le cas d'une maille métallique. Donner sa valeur numérique avec 2 chiffres significatifs. Commenter.

Réponse

La compacité est le rapport du volume occupé par les entités sur le volume d'une maille ①. Pour une CFC, on a tangence sur les **diagonales des faces** ①, soit :

$$\begin{aligned} r + 2r + r &= a\sqrt{2} \Leftrightarrow 2r\sqrt{2} = a \\ \Rightarrow C &= \frac{NV_1}{V} = \frac{4 \times \frac{4}{3}\pi r^3}{16\sqrt{2}r^3} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74 \end{aligned}$$

C'est la compacité maximale pour une structure de sphères dures identiques. ① Il reste donc **26% de vide** qui peut être occupé par d'autres entités plus petites. ①

- /4 4 Indiquer et représenter où se situent les sites tétraédriques de cette maille. Combien y en a-t-il ?

Réponse

Dans la CFC, les sites tétraédriques (sites T) sont **au centre des huit cubes d'arête $a/2$** ①. Il y en a donc **8 par maille** ① (voir Figure D11.2).

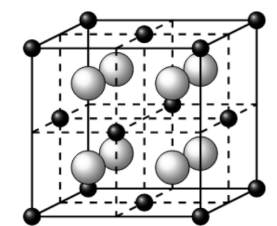


FIGURE D11.2 – ①+①

- /4 5 Exprimer le rayon maximal r_- de la particule sphérique pouvant s'insérer dans ces sites sans induire de déformation en fonction du paramètre de maille a et de r_+ . La condition de contact sera énoncée en français et représentée schématiquement.

Réponse

À la limite où l'anion occupe le site T sans déformer la structure de cations, le contact anion-cation se fait sur la **grande diagonale du petit cube** ① d'arête $a/2$ (voir Figure D11.3), soit

$$r_+ + r_- \leq \frac{1}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow r_- \leq \frac{a\sqrt{3}}{4} - r_+$$

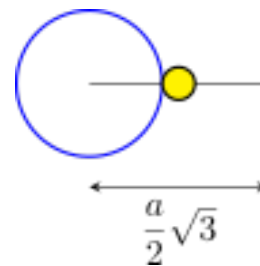


FIGURE D11.3 –
①

Les anions occupent tous les sites tétraédriques de la maille CFC formée par les cations.

- /3 ⑥ Déterminer le nombre d'anions contenus dans cette maille. En déduire la formule de la zircone. Indiquer une autre manière de trouver cette formule à partir d'une caractéristique globale des cristaux ioniques.

Réponse

Les sites T appartiennent en propre à la maille, il y a donc autant d'anions que de sites, c'est-à-dire **8 anions par maille** ①. Il y a donc deux fois plus d'anions O^{2-} que de cations Zr^{4+} . La formule avec les plus petits entiers naturels est donc ZrO_2 . ① On trouve la même formule en observant que le cristal doit être **neutre** ①, donc il doit y avoir 2 fois plus d'anions que de cations.

- /5 ⑦ Définir et donner, en justifiant, la coordinence des anions par rapport aux cations, et des cations par rapport aux anions.

Réponse

La coordinence d'une entité est son nombre de plus proches voisins ① (PPV). Ici, un anion est dans un site T ①, donc entouré de 4 cations PPV, donc la coordinence des **anions par rapport aux cations est de 4** ①. Un cation au centre d'une face, lui, est entouré de 8 petits cubes d'arête $a/2$ ①, au centre desquels se trouvent les anions : la coordinence des **cations par rapport aux anions est de 8**. ①

- /3 ⑧ Définir puis exprimer la masse volumique de la zircone en fonction de a , de M_{Zr} la masse molaire du zirconium, de M_O la masse molaire de l'oxygène et du nombre d'AVOGADRO.

Réponse

La masse volumique est le rapport de la masse des entités *en propre* sur le volume de la maille ①. Ainsi,

$$\rho = \frac{① N_{Zr} m_{Zr} + N_O m_O}{a^3} \Leftrightarrow \rho = \frac{① 4M_{Zr} + 8M_O}{N_A a^3}$$

La formule de l'oxyde d'yttrium est Y_2O_3 .

- /2 ⑨ En déduire la charge du cation yttrium.

Réponse

L'oxygène se trouve toujours sous la forme d'anions O^{2-} . Par neutralité de la structure, on a donc

$$2z + 3 \times (-2) \stackrel{①}{=} 0 \Leftrightarrow z = 3 \quad \text{soit} \quad Y^{3+} ①$$

- /2 ⑩ Le dopage consiste à substituer dans la maille élémentaire de l'oxyde de zirconium une fraction molaire x des cations Zr^{4+} par des cations yttrium. Expliquer pourquoi l'électronéutralité de la structure n'est alors pas respectée.

Réponse

Si la substitution se fait le plus simplement possible, un cation Zr^{4+} est remplacé par un cation Y^{3+} : ① tout se passe donc comme si le cristal avait perdu une charge $+$, et donc qu'il s'est chargé négativement. ①

- /3 ⑪ Proposer une modification de la formule chimique impliquant le nombre y d'anions O^{2-} présents dans la zircone dopée à l'oxyde d'yttrium, au moyen de x , pour rétablir cette équilibre.

Réponse

En fonction de x et y , la formule chimique de la structure s'écrit $Zr_{1-x}Y_xO_y$. ① La neutralité impose

$$4(1-x) + 3x - 2y = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = 2 - \frac{x}{2}}$$

Ainsi, au cours du processus de substitution, certains sites tétraédriques de l'alliage se vident de leurs ions O^{2-} pour préserver la neutralité de la structure. ① On vérifie par ailleurs qu'avec $x = 0$, c'est-à-dire sans dopage, on retrouve bien $y = 2$.



/44 E2 | Les phénomènes d'induction – questions de cours



Chaque sous-exercice est indépendant des autres.

II/A Couple sur un aimant

Soit un aimant de moment magnétique $\vec{\mu}$ plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ dans le plan de ce moment magnétique. On appelle θ l'angle orienté de $\vec{\mu}$ à $\vec{B}$.

- /4 ① Faire un schéma de la situation, et établir entièrement le système d'étude.

On étudie l'aimant, caractérisé par un moment $\vec{\mu}$, dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}$ dans le plan de l'aimant ①. On utilise le référentiel du laboratoire supposé galiléen, avec une base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ orthonormée directe ①. On appelle θ l'angle orienté de $\vec{\mu}$ à $\vec{B}$, compté positivement dans le sens direct.

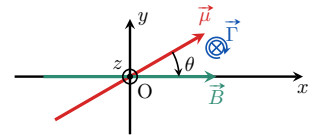


FIGURE D11.4 – ①+①

- /5 ② Exprimer le couple de LAPLACE subi par $\vec{\mu}$ en fonction de θ . En déduire les positions d'équilibre de $\vec{\mu}$.

Réponse

$$\vec{\mu} = \mu (\cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y) \quad \text{et} \quad \vec{B} = B \vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{\Gamma} \stackrel{\text{①}}{=} \vec{\mu} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\Gamma} \stackrel{\text{①}}{=} -\mu \sin \theta \vec{u}_z}$$

$$\vec{\Gamma} \stackrel{\text{①}}{=} \vec{0} \Leftrightarrow \sin \theta_{\text{eq}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_{\text{eq}} = 0 \\ \text{ou} \text{①} \\ \theta_{\text{eq}} = \pi \end{cases}$$

- /4 ③ En étudiant dans quel sens le couple de LAPLACE tend à faire tourner $\vec{\mu}$ en cas de petites perturbations, appuyé par 2 schémas, déterminer laquelle des deux positions d'équilibre est stable, et laquelle est instable.

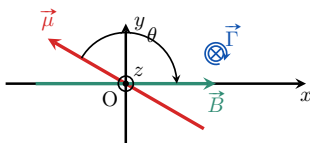
Réponse

FIGURE D11.5 – ①

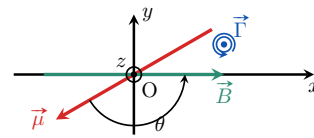


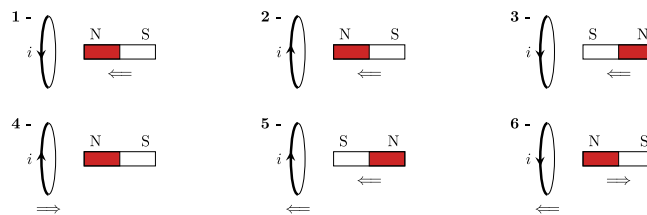
FIGURE D11.6 – ①

Une déviation vers le haut donne un mouvement de rotation dans le sens horaire, et une déviation vers le bas le fait en sens direct, peu importe la position d'équilibre : ① ainsi, $\theta_{\text{eq}} = \pi$ est **instable** et $\theta_{\text{eq}} = 0$ est **stable** ①



II/B Modération de LENZ

Dans chacun des circuits ci-contre, la spire circulaire et/ou l'aimant droit sont déplacés dans le sens indiqué par la double flèche.



- /9 [4] Énoncer la loi de LENZ. Indiquer alors le signe du courant i apparaissant dans la spire pendant le déplacement, en justifiant en français et par un schéma pour chaque situation particulière. On pourra raisonner par symétrie quand elle est bien mentionnée.

Réponse

L'induction modère, par ses conséquences, les causes qui lui ont donné naissance. ①

Les lignes de champ vont du Nord vers le Sud. On doit déterminer le sens de variation du champ vu par la spire : le champ induit atténue cette variation. On en déduit le signe réel de i par la règle de la main droite.

- ①1) $\vec{B}_{\text{aimant}}$ augmente vers la gauche : $\vec{B}_{\text{induit}}$ est vers la droite, donc issu de $i > 0$.

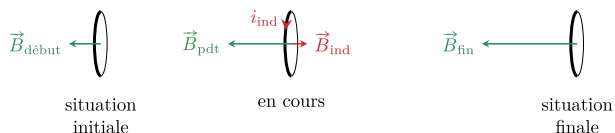


FIGURE D11.7 – Situation 1. ①

- ①2) Même situation physique, convention opposée : $i < 0$.
 ①3) Cette fois $\vec{B}_{\text{aimant}}$ augmente vers la droite : $\vec{B}_{\text{ind}}$ est vers la gauche. Sens réel du courant opposé : $i < 0$. Voir Figure D11.8.

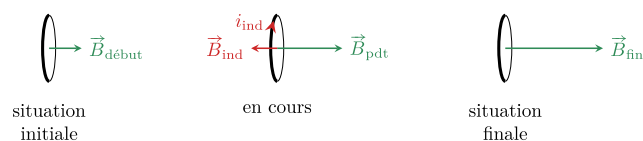


FIGURE D11.8 – Situation 3.

- ①4) Pareil qu'à la question 2 : $i < 0$.
 ①5) Pas de mouvement relatif donc pas de variation de champ donc pas d'induction : $i = 0$.
 ①6) Mouvement relatif amplifié. Ici, le champ **diminue** vers la gauche, donc le champ induit le **renforce** ; ainsi $i < 0$.

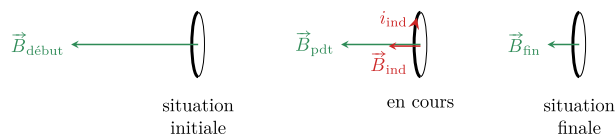


FIGURE D11.9 – Situation 6. ①

II/C Loi de FARADAY

On considère un circuit carré de côté a et de résistance totale R , situé dans un plan orthogonal à un champ magnétique uniforme mais **variable** $\vec{B}(t) = B_0 e^{-t/\tau} \vec{u}_z$ avec B_0 et τ strictement positifs.

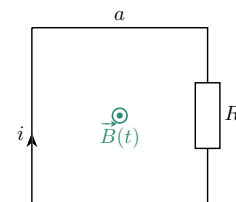


FIGURE D11.10

- /9 [5] Quelle est l'origine de l'induction ? Recopier la Figure D11.10 sur votre copie et complétez-le afin d'exprimer l'intensité i du courant représenté sur le schéma. Vérifier que son signe soit en accord avec la loi de LENZ.

Réponse

Le flux à travers le circuit de surface $S = a^2$ est variable puisque le champ magnétique l'est ①. Il y a donc un phénomène d'induction. On a alors :

$$\phi_S(\vec{B}) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{B}(t) \cdot \vec{S} = -B_0 a^2 e^{-t/\tau} \quad \text{soit} \quad e \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{d\phi}{dt} \Leftrightarrow e \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{B_0 a^2}{\tau} e^{-t/\tau} < 0$$

Circuit fermé $\Rightarrow \quad e = Ri \Leftrightarrow i \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{B_0 a^2}{R\tau} e^{-t/\tau} < 0$

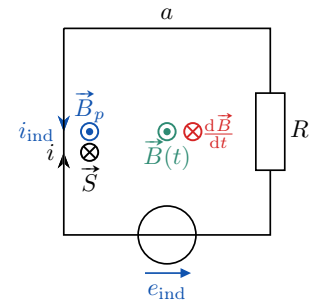


FIGURE D11.11 – ①+①

L'intensité représentée est donc **négative**. En effet, le champ magnétique induit réel doit s'opposer à la diminution du champ extérieur $\frac{d\vec{B}}{dt}$ ①, en créant un champ magnétique positif selon $\vec{u}_z$: ① le sens réel du courant donné par la main droite est l'opposé de celui représenté ; il est représenté par i_{ind} sur la Figure D11.11.

- /2 6 Quel autre paramètre peut-on faire varier pour avoir induction ? Citer et décrire un exemple de système présentant de l'induction dans ce cas.

Réponse

On peut faire varier la surface ①. Les rails de LAPLACE générateurs sont un exemple ①. La déformation d'une spire verticale traversée par le champ magnétique terrestre en est un autre (manipulation de TP avec le galvanomètre)

II/D Inductance propre

- /4 7 Définir ce qu'est le flux propre d'un circuit. Comment se définit l'auto-inductance ? Quelles sont ses propriétés ?

Réponse

Le flux propre ϕ_p d'un circuit est le flux de son propre champ magnétique $\vec{B}_p$ à travers sa surface. ① L'auto-inductance est le facteur de proportionnalité entre le flux propre et le courant à l'origine de son champ propre :

$$\phi_p(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} Li(t) \quad \text{avec} \quad L > 0 \quad \text{et} \quad L \quad \text{ne dépend que de forme et taille circuit} \quad \textcircled{1}$$

- /7 8 Représenter le champ propre $\vec{B}_p$ créé dans un solénoïde traversé par une intensité $i(t)$, et rappeler son expression. En déduire l'expression de son flux propre puis de son auto-inductance. Application numérique pour une bobine de TP, avec $N = 1000$ spires de rayon $a = 3$ cm et de longueur $\ell = 10$ cm, avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

Réponse

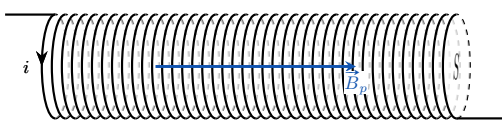


FIGURE D11.12 – ①

Le champ propre dans un solénoïde est

$$\vec{B}_p(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \vec{u}_z$$

et $\vec{S}$ et $\vec{B}_p$ respectent la règle de la main droite à partir de i , donc

Pour N spires :

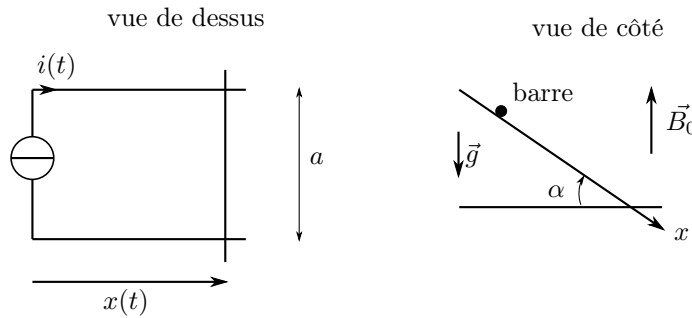
$$\begin{aligned} \phi_p &\stackrel{\textcircled{1}}{=} N \times \vec{B}_p \cdot \vec{S} \quad \text{avec} \quad \vec{S} \stackrel{\textcircled{1}}{=} S \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \phi_p &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S i(t) \quad \Leftrightarrow L \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 \end{aligned}$$

$$\text{A.N. : } L \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} 3,5 \times 10^2 \text{ mH}$$

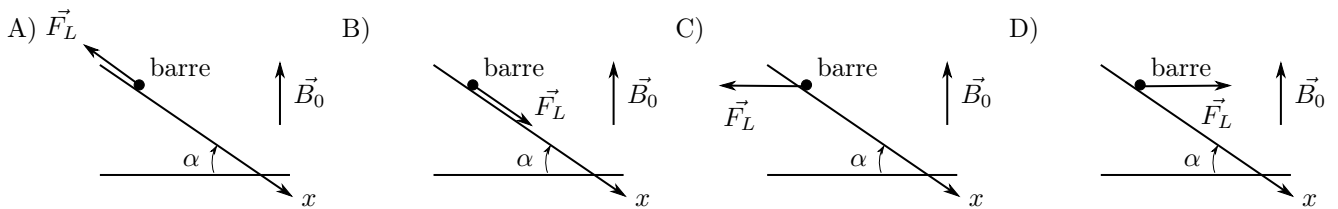
/15 E3 Rails de LAPLACE inclinés

Indiquer la ou les bonnes réponses, en justifiant tout votre raisonnement. Une réponse sans justification ou avec une justification fausse ne rapportera aucun point.

Soient deux rails rigides, parallèles, distants de a , faisant un angle α avec le plan horizontal, conducteurs, de résistance négligeable, baignant dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$ vertical. Les rails sont reliés à une source de courant délivrant une intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Une barre conductrice de résistance négligeable, de masse m peut glisser sans frottement sur les rails en restant perpendiculaire aux rails. La barre est lâchée sans vitesse initiale depuis la position $x(t=0) = x_0$.



/2 [1] Quelle est la résultante des forces de LAPLACE $\vec{F}_L$ s'exerçant sur la barre mobile ?



Réponse

Réponse C. Par définition, $d\vec{F}_L \stackrel{(1)}{=} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_0$. Cette force est orthogonale à la barre et à $\vec{B}_0$. Elle est donc horizontale, orientée vers la gauche. (1)

/4 [2] Donner l'expression de la puissance $\mathcal{P}_L$ des actions de LAPLACE.

- A) $\mathcal{P}_L = B_0 i a \dot{x}$ B) $\mathcal{P}_L = -B_0 i a \dot{x}$ C) $\mathcal{P}_L = -B_0 i a \cos(\alpha) \dot{x}$ D) $\mathcal{P}_L = 0$

Réponse

Réponse C)

$$\mathcal{P}_L \stackrel{(1)}{=} \vec{F}_L \cdot \vec{v} \stackrel{(1)}{=} (\vec{F}_L \cdot \vec{e}_x) \dot{x}$$

Or, $\vec{F}_L \stackrel{(1)}{=} -i B_0 a \vec{n}$ avec $\vec{n}$ vecteur unitaire associé à l'axe horizontal vers la droite

$$\Rightarrow \mathcal{P}_L \stackrel{(1)}{=} -B_0 i a \cos(\alpha) \dot{x}$$

/5 [3] Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$?

- A) $m\ddot{x} = mg \sin(\alpha) - B_0 i a \cos(\alpha)$ B) $m\ddot{x} = mg \cos(\alpha) - B_0 i a \cos(\alpha)$
C) $m\ddot{x} = mg \cos(\alpha) - B_0 i a$ D) $m\ddot{x} = mg \sin(\alpha) - B_0 i a$

Réponse

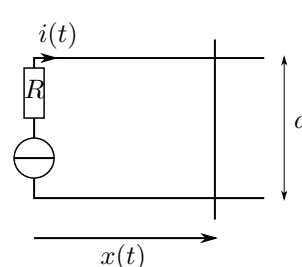
Réponse A. On étudie la barre en translation selon $\vec{e}_x$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. (1)

La barre est soumise au poids, à la résultante des forces de Laplace et à la réaction normale au niveau des rails.

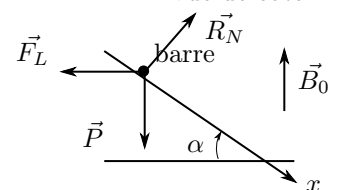
(1) On fait un schéma (1). On applique le PFD projeté selon $\vec{e}_x$:

$$m \vec{a} \stackrel{(1)}{=} \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Rightarrow m \ddot{x} \stackrel{(1)}{=} mg \sin(\alpha) - B_0 i a \cos(\alpha)$$

vue de dessus



vue de côté



/4 [4] Exprimer $x(t)$.

$$\begin{aligned} \text{A) } x(t) &= \frac{1}{2}g \sin(\alpha)t^2 + \frac{B_0 a}{m\omega^2} \cos(\alpha) I_0 \cos(\omega t) + x_0 & \text{B) } x(t) &= \frac{1}{2}g \cos(\alpha)t^2 + \frac{B_0 a}{m} \cos(\alpha) I_0 \cos(\omega t) + x_0 \\ \text{C) } x(t) &= \frac{1}{2}g \sin(\alpha)t^2 + \frac{B_0 a}{m} \cos(\alpha) I_0 (\cos(\omega t) - 1) + x_0 & \text{D) } x(t) &= \frac{1}{2}g \sin(\alpha)t^2 + \frac{B_0 a}{m\omega^2} \cos(\alpha) I_0 (\cos(\omega t) - 1) + x_0 \end{aligned}$$

Réponse

Réponse D. On utilise l'expression de $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Par intégration avec la CI $\dot{x}(t=0) = 0$ ① :

$$\dot{x}(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} g \sin(\alpha)t - \frac{B_0 I_0 a \cos(\alpha)}{m\omega} \sin(\omega t)$$

On intègre encore une fois avec la CI $x(t=0) = x_0$ ① pour obtenir la

$$x(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{g \sin(\alpha)}{2} t^2 + \frac{B_0 I_0 a \cos(\alpha)}{m\omega^2} (\cos(\omega t) - 1) + x_0$$

