

Chute d'un arbre

N.B. : Dans ce problème, les vecteurs unitaires sont notés avec un chapeau ($\|\hat{u}_z\| = 1$). Les autres vecteurs restent notés avec des flèches. Dans tout le problème, le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\hat{u}_z$ est uniforme et le référentiel terrestre galiléen. On prendra $g = 1 \times 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Le problème est composé de deux parties indépendantes.

A

 Chute d'un arbre mort

Un bûcheron assimilé à un point matériel B de masse m souhaite abattre un arbre mort assimilé à un cylindre homogène de masse M avec $M > m$, de hauteur H et de section droite carrée de côté $2a$ représenté sur la figure 1.1.

Il tire pour cela sur un câble fixé en C à l'arbre, de longueur $BC = \ell$ et de masse négligeable, afin de faire tourner l'arbre autour de l'axe (O, \hat{u}_y) dirigé par le vecteur $\hat{u}_y = \hat{u}_z \wedge \hat{u}_x$.

L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où l'arbre commence à tourner, les actions de contact qu'il subit se limitent à une force $\vec{R}_1 = T_1\hat{u}_x + N_1\hat{u}_z$ appliquée au point O et satisfaisant aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement f . De même les actions du sol sur le bûcheron sont décrites par une force $\vec{R}_2 = T_2\hat{u}_x + N_2\hat{u}_z$ appliquée au point B et satisfaisant aux lois de Coulomb avec le même coefficient de frottement f . Les composantes T_1 , N_1 , T_2 et N_2 ont des valeurs algébriques. Le câble est supposé tendu. On note \vec{F} la force exercée par le câble sur l'arbre au point C , supposée parallèle au câble et F sa norme. Les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique autour de (O, \hat{u}_y) et on note α l'angle (positif) entre \vec{BO} et \vec{BC} .

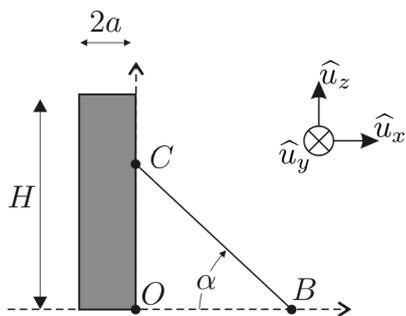


Figure 1.1: Modélisation d'un arbre mort et du bûcheron

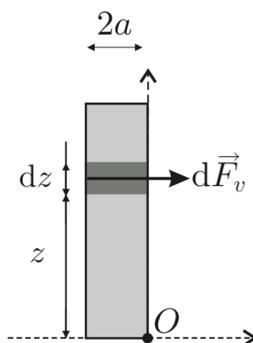


Figure 1.2: Modélisation d'un arbre vivant

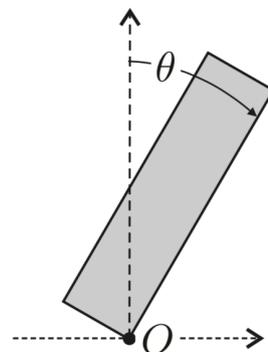


Figure 1.3: Angle repérant la chute d'un arbre vivant

1. Le bûcheron est supposé ne pas glisser dans la situation initiale décrite par la figure 1.1. Exprimer N_2 et T_2 en fonction de F , α , m et g .

En déduire l'expression de la valeur maximale F_{max} de F en fonction de f , m , g et α .

2. L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure 1.1. Exprimer N_1 et T_1 en fonction de F , α , M et g . En déduire que pour $0 \leq F \leq F_{max}$ le glissement n'est pas possible en O .

3. Exprimer le moment Γ_g du poids de l'arbre par rapport à l'axe (O, \hat{u}_y) dans la situation initiale décrite par la figure 1.1.

4. Soit Γ_B le moment par rapport à l'axe (O, \hat{u}_y) exercé par le bûcheron sur l'arbre via le câble. Quelle est la valeur minimale de Γ_B permettant à l'arbre de pivoter autour de l'axe (O, \hat{u}_y) ?
5. En supposant F constant, justifier (*avec ou sans calculs, mais rigoureusement*) qu'il existe une valeur optimale α_m de l'angle α .

On suppose que, quel que soit l'angle α , l'action du bûcheron est telle que l'on est à la limite du glissement : F prend la valeur F_{max} (qui dépend de α).

6. Montrer que le moment Γ_B par rapport à l'axe (O, \hat{u}_y) exercé par le bûcheron via le câble s'écrit $\Gamma_B = \frac{mg\ell}{\phi(\alpha)}$ avec $\phi(\alpha) = \frac{1}{f \sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}$ ($\alpha \in]0, \pi/2[$). En déduire l'expression de α_m en fonction f . Vérifier que $\alpha_m = \frac{\pi}{4}$ pour $f = 1$.
7. On donne $M = 1 \times 10^3$ kg, $H = 2 \times 10^1$ m, $a = 0,5$ m, $m = 1 \times 10^2$ kg et $f = 1$. Calculer la force F_{max} et la longueur de corde ℓ nécessaires pour initier la rotation de l'arbre en prenant $\alpha = \alpha_m = \pi/4$.

On suppose que l'arbre a commencé sa rotation autour de l'axe (O, \hat{u}_y) , repérée par l'angle θ que fait \overrightarrow{OC} avec (O, \hat{u}_z) .

8. Après avoir fait une figure représentant la situation et faisant apparaître les différents paramètres, exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_p de l'arbre en fonction de M , g , H , a et θ . Esquisser l'allure de la courbe $E_p(\theta)$. Le bûcheron opère de manière quasi-statique c'est-à-dire sans communiquer d'énergie cinétique à l'arbre. À partir de quel angle θ_s peut-il lâcher le câble ?

B Chute d'un arbre vivant sous l'effet du vent

Dans cette partie, on s'intéresse à la chute d'un arbre vivant, de hauteur H , sous l'effet d'un coup de vent violent. On **néglige le rôle du poids** de l'arbre : son mouvement résulte uniquement d'une compétition entre l'action du sol via les racines et l'action du vent. Il convient de décrire l'action d'un vent soufflant dans la direction \hat{u}_x sur une tranche d'arbre (supposé vertical à ce stade) comprise entre z et $z + dz$, figure 1.2, par une force élémentaire de la forme $d\vec{F}_v = 2aC_x\rho_a U^2 dz \hat{u}_x$ où ρ_a est la masse volumique de l'air et C_x un coefficient aérodynamique positif supposé constant.

9. Proposer un ordre de grandeur de la vitesse U pour un vent violent. Connaissez-vous un autre modèle pour la force exercée par le vent sur la tranche d'arbre ?
10. L'arbre étant vertical, exprimer le moment total Γ_v des actions du vent par rapport à l'axe (O, \hat{u}_y) en fonction de C_x , ρ_a , a , H et U .
11. Lorsque l'arbre commence à pencher, on repère son mouvement par l'angle θ représenté sur la figure 1.3. Le moment Γ_v varie en fonction de θ et on constate que $\Gamma_v(\theta)$ est proportionnel à $(\cos \theta)^n$ avec n entier. Proposer une valeur de l'entier n en justifiant votre réponse.

Dans toute la suite, on omet la dépendance de Γ_v en θ car celui-ci reste inférieur à 10° .

L'action du sol sur l'arbre est décrite par un moment résistant Γ_r par rapport à l'axe (O, \hat{u}_y) , qui met en jeu des phénomènes complexes comme l'élasticité des racines, un déracinement partiel, l'entraînement de la terre, etc. Des essais de traction via un câble comme dans la partie A ont permis de relever les variations de Γ_r (en $10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$) en fonction de θ (en degrés) de la figure 1.4 dans le domaine $\theta > 0$ auquel on se limite. Cette figure fait notamment apparaître une variation brutale au voisinage de $\theta = 0$ que l'on modélise par une discontinuité telle que $\Gamma_r(0) = 0$ et $\Gamma_r(0_+) = \Gamma_0$. Par ailleurs, au-delà d'un certain angle θ_c , l'arbre est totalement déraciné, de telle sorte que $\Gamma_r = 0$.

Dans le domaine $0 < \theta \leq \theta_c$, on modélise les mesures expérimentales de Γ_r par un polynôme du deuxième degré de la forme :

$$\Gamma_r = \Gamma_0 \left(\beta + 4 \frac{\theta}{\theta_c} - 5 \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) \quad \text{avec} \quad \Gamma_0 < 0 \quad (1.1)$$

12. Quelles valeurs doit-on donner aux paramètres θ_c et β afin qu'ils rendent compte des mesures de la figure 1.4. Exprimer l'angle θ_m pour lequel Γ_r atteint sa valeur minimale et la valeur Γ_m de ce minimum. Vérifier la cohérence entre les résultats expérimentaux et les valeurs de θ_m/θ_c et Γ_m/Γ_0 issues du modèle.

Du point de vue de sa dynamique, l'arbre est désormais assimilé à une barre mince en rotation autour de l'axe (O, \hat{u}_y) avec un moment d'inertie J , soumis au moment constant Γ_v et au moment $\Gamma_r(\theta)$ décrit par le modèle de l'équation (1.1). Initialement l'arbre est au repos en $\theta = 0$ en présence d'un vent de vitesse U indépendante du temps et on s'interroge sur son évolution. On définit le paramètre $p = \Gamma_v/|\Gamma_0|$.

13. Discuter *graphiquement* selon la valeur de p la possibilité pour l'arbre de rester en équilibre en $\theta = 0$. Cet équilibre est-il stable ? Discuter *graphiquement* selon la valeur de p l'existence et la stabilité de positions d'équilibre en $\theta_e \neq 0$. Dans le cas où il existe une position d'équilibre stable inférieure à θ_c , expliquer sans calculs pourquoi on ne peut néanmoins pas être certain que l'arbre résiste au vent.

On se propose de trancher cette question. Les conditions initiales restent $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$.

14. Montrer que la vitesse angulaire de l'arbre se met sous la forme $\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = |\Gamma_0| \theta P(u)$ où $P(u)$ est un trinôme du second degré pour la variable réduite $u = \theta/\theta_c$ que l'on explicitera en fonction de l'unique paramètre $p = \Gamma_v/|\Gamma_0|$. En déduire, en précisant soigneusement le raisonnement adopté, la valeur minimale p_c de p permettant au vent de déraciner l'arbre. Calculer la vitesse minimale U_c du vent permettant de déraciner l'arbre correspondant au graphe de la figure 1.4 sachant que $H = 20 \text{ m}$ et $a = 0,5 \text{ m}$. On prendra $C_x = 0,5$ et $\rho_a = 1 \text{ kg/m}^3$.

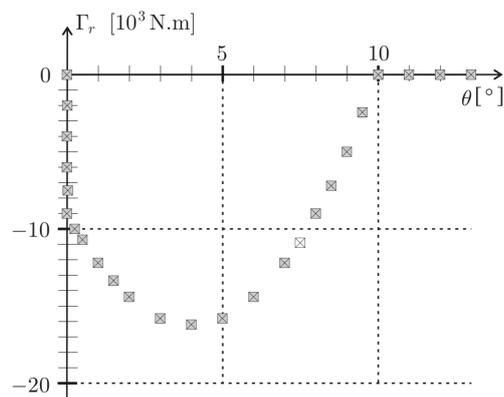


Figure 1.4: Mesures du moment résistant. La taille des carrés représente l'incertitude de mesure.

On se place désormais dans le cas $p = \frac{4}{3}$.

15. Déterminer les bornes du mouvement de l'arbre. En réalité l'arbre finit par atteindre une position θ_∞ où il reste immobile. Interpréter qualitativement ce résultat.

Formulaire

Lois de Coulomb : un solide en contact quasi-ponctuel sur un support subit de la part du support des actions de contact équivalentes à une force \vec{F} que l'on peut décomposer en une composante normale \vec{N} et une composante tangentielle \vec{T} .

En l'absence de glissement, on a $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$ où f est le coefficient de frottement.

En présence de glissement, la composante tangentielle \vec{T} est dirigée dans la direction opposée à celle du vecteur-vitesse de glissement et on a $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

Dermographe

I Le dermographe, machine à tatouer électrique

Un tatouage est un dessin décoratif ou symbolique permanent effectué sur la peau. Il est pratiqué depuis plusieurs milliers d'années dans le monde entier. Ötzi (≈ 3500 avant Jésus-Christ), l'homme des glaces, découvert gelé dans les Alpes italo-autrichiennes, arbore par exemple des tatouages supposés thérapeutiques. En Égypte, en Chine et en Océanie, on a également découvert de nombreuses momies portant des tatouages.

Le tatouage peut être défini comme l'introduction de pigments ou de substances possédant un pouvoir chromatique à la limite entre l'épiderme et le derme (en moyenne à 1 mm de profondeur) dans le but d'en obtenir un dessin permanent. Les techniques d'introduction des pigments sont nombreuses et ont évolué au cours du temps. Ce sujet s'intéresse au dermographe, machine à tatouer électrique qui fait son apparition à la fin du XIX^e siècle et qui est toujours utilisée aujourd'hui.

Le dermographe est composé de plusieurs éléments :

- une partie mobile attachée au support via une lame métallique à l'origine d'un couple de rappel ;
- des bobines avec des noyaux ferromagnétiques, générant un champ magnétique.

Il est par ailleurs alimenté par un générateur, généralement contrôlé par le tatoueur via une pédale.

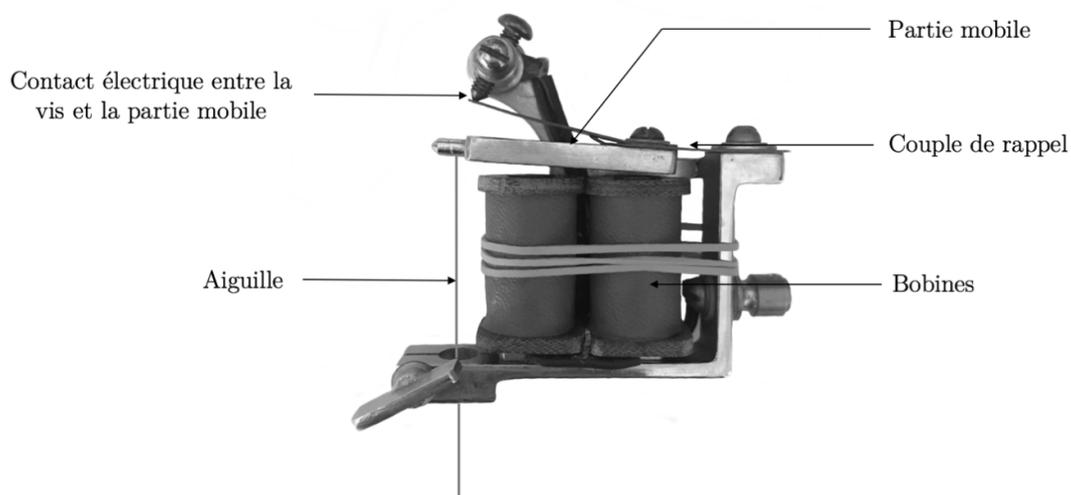


Figure 2.1: Dermographe

Le principe du dermographe repose sur l'alternance entre deux phases. Dans un premier temps, la partie mobile est en contact avec la vis. Ce contact permet de fermer le circuit électrique alimenté par le générateur et formé par les bobines, la partie mobile et le support. Si le générateur fonctionne, un courant circule dans le circuit et en particulier dans les bobines. Un champ magnétique est alors créé par les bobines, ce qui génère une force sur la partie mobile, vers le bas.

Dans un second temps, la partie mobile se décolle de la vis de contact, ouvrant le circuit. La force magnétique disparaît et la force de rappel ramène la partie mobile vers la position de contact. L'aiguille, accrochée à l'extrémité de la partie mobile, aura donc un mouvement périodique de haut en bas et de bas en haut.

A Champ magnétique créé par une bobine

On considère dans un premier temps une bobine assimilée à un solénoïde infini d'axe (Oz) , avec un nombre de spires par unité de longueur n et parcourue par un courant d'intensité i permanente. On se place dans l'approximation des régimes quasi stationnaires.

1. En utilisant un schéma, déterminer à l'aide d'une étude de symétrie la direction du champ magnétique \vec{B} créé par le courant circulant dans la bobine et déterminer les variables dont il dépend à l'aide d'une étude d'invariances.
2. Rappeler l'expression du champ magnétique \vec{B} régnant dans la bobine longue en fonction des données du problème.
3. En déduire l'expression de l'inductance propre L_p de la bobine de rayon R et de longueur L
4. Tracer l'allure des lignes de champ magnétique pour une bobine infinie, puis pour une bobine de longueur finie. Décrire brièvement les variations du champ magnétique dans les deux cas.

Dans la suite, on suppose que la partie mobile se situe toujours dans une zone où le champ peut être considéré comme uniforme.

B Fonctionnement du dermographe simplifié

Afin d'en simplifier l'étude, on s'intéresse, dans cette sous-partie, à une version modifiée du dermographe.

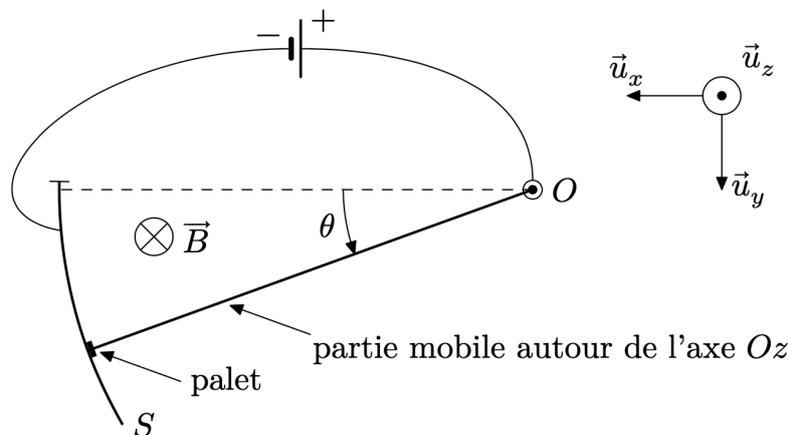


Figure 2.2: Modélisation simplifiée du dermographe

On modélise le contact par un arc de cercle conducteur avec lequel la partie mobile peut être en contact via un palet à son extrémité. Au point $S(\theta_S = \pi/60)$, l'arc de cercle se termine. On admet que tant que le contact est assuré, la partie mobile est parcourue par un courant d'intensité I et qu'elle se déplace dans une zone de champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B\vec{u}_z$, avec $B > 0$. Elle est soumise à un couple de rappel de moment $\vec{\Gamma} = -K\theta\vec{u}_z$.

Il est rappelé que différentes valeurs numériques utiles sont disponibles en fin d'énoncé.

On suppose que l'action du poids est négligeable devant les autres actions mécaniques et que les forces de frottement sont négligeables devant les autres forces mises en jeu. Par ailleurs, on néglige les effets d'induction liés au mouvement de la partie mobile dans le champ magnétique extérieur.

5. Recopier sur la copie le schéma de la figure 2.2 en indiquant le sens du courant électrique dans la partie mobile, ainsi que la force s'exerçant sur celle-ci lorsqu'elle est parcourue par un courant. Donner le nom de cette force.

Situation initiale

6. Initialement ($t = 0^-$), le générateur n'est pas branché et la partie mobile est au repos. Quelle est alors la position de la partie mobile ? Justifier la réponse.

Mise sous tension (contact assuré)

On considère dans cette partie le cas où le contact entre le palet et l'arc est assuré.

7. On met le générateur sous tension à $t = 0^+$. Effectuer un bilan des actions mécaniques sur la partie mobile.
8. Montrer que θ satisfait l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A$ et exprimer ω_0 et A en fonction de J , K , I , B et L .
9. Par une analyse dimensionnelle, vérifier l'homogénéité de l'expression trouvée pour A .
10. Résoudre l'équation différentielle pour déterminer l'expression de $\theta(t)$ tant que le contact est assuré.
11. Lorsqu'on insère un matériau ferromagnétique dans une bobine, on modifie l'expression du champ créé en le multipliant par μ_r , perméabilité magnétique relative du milieu. En reprenant l'expression du champ magnétique créé par la bobine infinie parcourue par le courant d'intensité I , et sachant qu'on ajoute un matériau de perméabilité magnétique $\mu_r = 500$, quelle doit être la valeur maximale du coefficient de rappel K pour qu'il puisse ne plus exister de contact entre la partie mobile et l'arc conducteur ?

Vérifier que la valeur donnée dans l'énoncé satisfait à cette condition, sachant que l'intensité circulant généralement dans les dermatographes est d'environ 1 A et que les bobines ont un nombre de spires par unité de longueur $n = 2 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$

12. Déterminer l'expression puis la valeur de l'instant t_1 pour lequel la partie mobile quitte l'arc conducteur.

Rupture du contact fermant le circuit

On pose $t' = t - t_1$. À $t' = 0$, la partie mobile quitte l'arc conducteur, ce qui annule la force magnétique.

13. Déterminer la nouvelle équation différentielle satisfaite par θ . La résoudre pour déterminer $\theta(t')$ tant que le contact est rompu.
14. On admet que la valeur de l'angle maximal atteint par la partie mobile est de 0,096 rad. En déduire l'amplitude verticale du mouvement de l'aiguille.

Résumé

15. Parmi les 4 courbes de la figure 2.3, choisir, en justifiant, celle représentant θ en fonction du temps. Les courbes ont parfois été tracées en accentuant fortement les caractéristiques : en réalité, les deux phases sont moins différenciées.

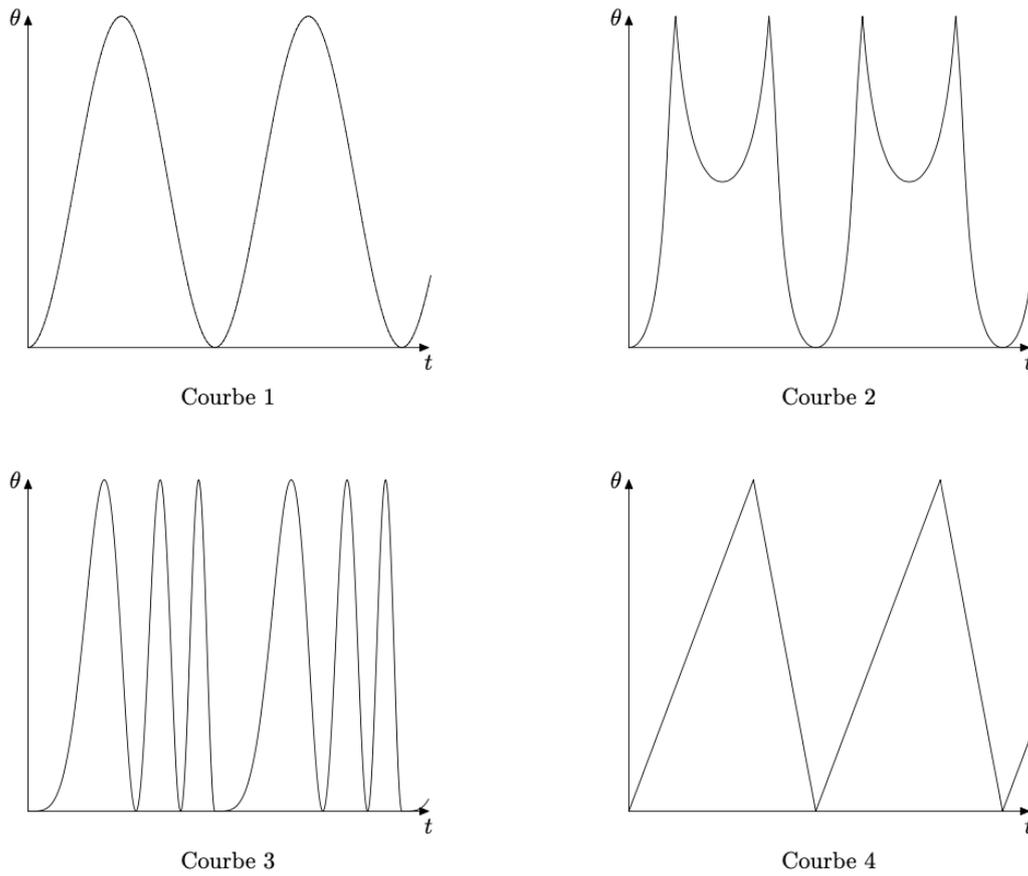


Figure 2.3: Profils de θ en fonction du temps

Pendule non linéaire

I La balançoire

Un enfant faisant de la balançoire (figure 3.1) est modélisé par une masse ponctuelle m située en M et suspendue en O par une corde de masse négligeable et de longueur l . Le champ de pesanteur \vec{g} , de norme g , est supposé uniforme. L'angle que fait la corde de suspension avec la verticale est noté θ . Les vecteurs unitaires \vec{u}_r , \vec{u}_θ et $\vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$ tels que définis sur la figure 3.2 définissent un trièdre orthonomé direct lié à la balançoire.

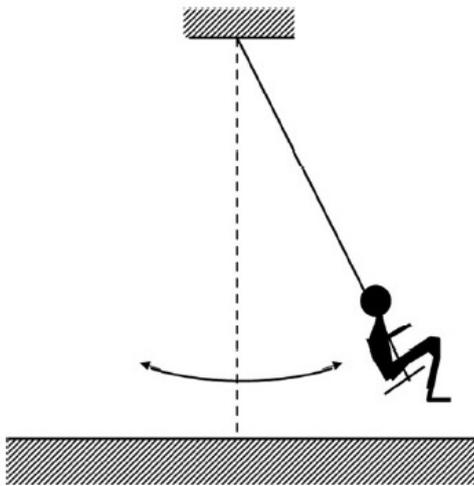


Figure 3.1: Enfant assis sur sa balançoire.

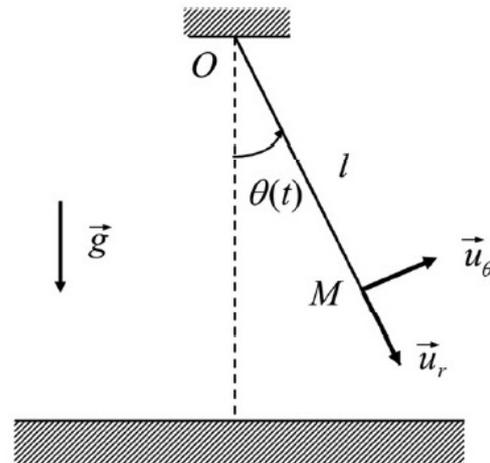


Figure 3.2: Schématisation de la balançoire et base polaire associée.

Dans toute la suite du problème, les mouvements de la balançoire et de l'enfant seront étudiés dans le plan de la figure 3.2. De plus, les parties B et C sont indépendantes.

A Mise en équation

Sauf mention contraire dans la suite de l'énoncé, tout frottement dû à la résistance de l'air est négligé.

1. Etablir l'équation différentielle nommée (E) du mouvement vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant 3 méthodes :
 - (a) en appliquant le principe fondamental de la dynamique
 - (b) en appliquant un théorème énergétique
 - (c) en appliquant le théorème du moment cinétique

2. À quelle condition l'enfant assis sur la balançoire sera-t-il assimilé à un oscillateur harmonique ? Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 correspondante.

3. Application numérique : L'enfant part d'un angle $\theta_0 = 30^\circ$ sans vitesse initiale. On donne les valeurs numériques suivantes : $l = 2,5 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $m = 20 \text{ kg}$. Calculer la période T_0 de l'oscillateur harmonique, ainsi que la vitesse maximale v_{max} de l'enfant.

B Etude d'une solution non harmonique

On souhaite obtenir une modélisation plus précise des oscillations en prenant en compte une partie des effets non linéaires. On considère toujours dans cette partie que l'enfant part d'un angle $0 < \theta_0 \ll 1$ et sans vitesse initiale.

- En posant $\sin \theta = \theta - \theta^3/6$, que devient l'équation différentielle (E) du mouvement vérifiée par $\theta(t)$? Cette équation, appelée (E') est-elle encore linéaire ?
- On cherche, pour cette équation différentielle approchée une solution elle-même approchée de la forme

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) + \varepsilon \theta_0 \cos(3\omega t) \quad \text{où} \quad \varepsilon \ll 1 \quad \text{et} \quad \theta_0 \ll 1$$

- En utilisant les approximation proposée par l'énoncé, montrer que le terme $\theta^3/6$ peut se simplifier en

$$\frac{\theta^3}{6} = \frac{\theta_0^3}{24} (3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t))$$

- Démontrer le résultat suivant

$$\forall t : A \cos(\omega t) = B \cos(3\omega t) \quad \Rightarrow \quad A = B = 0$$

- Exprimer en fonction de ω_0 et θ_0 la pulsation fondamentale ω ainsi que le terme ε en injectant l'expression proposée pour $\theta(t)$ dans l'équation (E') et en utilisant l'approximation établie à la question 5a.

$$\text{On montera en particulier que } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{8}\theta_0^2} \text{ et } \varepsilon = \frac{\theta_0^2}{-192 + 27\theta_0^2}.$$

- Par rapport au mouvement harmonique, le signal $\theta(t)$ a-t-il une plus grande ou une plus petite période ?
- Quelle est la pulsation du premier harmonique après le fondamental ?

C Prise en compte des frottements fluides

On prend maintenant en considération les forces de frottement de l'air et on néglige tout effet non linéaire. Le moment de ces forces par rapport à O est égal à $-C \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z$ où C est une constante positive.

- Quelle est la dimension de la constante C ?
- En reprenant les éléments apportés lors de la réponse à la question , établir l'équation différentielle linéaire nommée (E'') à laquelle doit maintenant obéir $\theta(t)$.
- À quelle inégalité doit satisfaire C pour que le mouvement de l'enfant puisse être considéré comme un mouvement oscillatoire dont l'amplitude décroît avec le temps (régime pseudo-périodique) ?
- Montrer, toujours dans le cas du régime pseudo-périodique, que la solution de l'équation (E'') s'exprime sous la forme

$$\theta(t) = A e^{-\frac{C}{2ml^2}t} \cos(\omega t + \phi)$$

avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{C}{4ml^2\omega_0^2}}$ et sans chercher à établir les expression de A et ϕ .

12. L'enfant part d'un angle $\theta_0 = 15^\circ$ sans vitesse initiale. On observe que l'amplitude du mouvement est réduite de moitié après 20 oscillations. Comment se simplifie alors l'expression de ω ?

Application numérique : calculer la valeur de la constante C .

Aide au calcul :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad ; \quad \cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos(3x)}{4}$$