

Correction du TD d'application



I Rails de LAPLACE inclinés

Un barreau métallique de masse m glisse sans frottement mécanique sur deux rails conducteurs, séparés d'une distance a et inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale. Les rails sont fermés sur une résistance R , et un champ magnétique uniforme \vec{B} , dirigé selon la verticale ascendante, règne entre eux. On repère par $x(t)$ la position du barreau le long des rails.

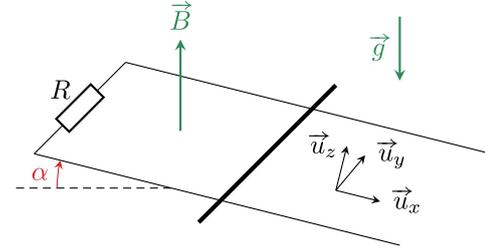


FIGURE I4.1 – Schéma des rails.

- 1 En appliquant la loi de LENZ, donner le sens du courant i qui circule dans le circuit. La force de LAPLACE accélère-t-elle ou freine-t-elle la chute du barreau? Pourrait-il s'immobiliser?

Réponse

La cause du phénomène d'induction est la glissade du barreau sur les rails, dans la direction $+\vec{u}_x$. Le courant induit qui circule dans le circuit génère une force de LAPLACE induite, dont la loi de LENZ indique qu'elle s'oppose au mouvement : elle **freine le barreau**, donc est dirigée selon $-\vec{u}_x$. On en déduit que le sens réel du courant lorsqu'il traverse le barreau mobile est selon $-\vec{u}_y$, comme indiqué Figure I4.2.

Le barreau ne peut cependant pas s'arrêter : s'il venait à s'arrêter, alors il n'y aurait plus de variations de flux donc plus d'induction... et plus de force de LAPLACE induite pour le retenir, si bien que son poids l'entraînerait à nouveau. Il va atteindre une **vitesse limite**.

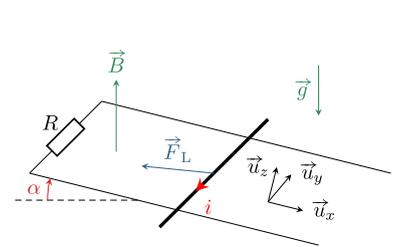


FIGURE I4.2

- 2 Exprimer la force de LAPLACE \vec{F}_L qui s'exerce sur le barreau mobile en fonction de i , a , B et α .

Réponse

On choisit i positif dans le sens précédent. Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= i(-a\vec{u}_y) \wedge \vec{B} \quad \text{avec} \quad \vec{B} = B(-\sin(\alpha)\vec{u}_x + \cos(\alpha)\vec{u}_z) \\ &\Leftrightarrow \boxed{\vec{F}_L = -iaB(\cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{u}_z)} \end{aligned}$$

- 3 En exploitant la conservation de la puissance, obtenir une relation en i , R , a , B , α et la vitesse v du barreau.

Réponse

La puissance reçue par le barreau de la force de LAPLACE est

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}}^r = \vec{F}_L \cdot v\vec{u}_x = -iaBv \cos(\alpha)$$

Avec le circuit équivalent de la Figure I4.3 et la LdM $e = Ri$, on trouve $\mathcal{P}_{\text{fem}}^f = ei$. Par conservation de la puissance :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{Lap}}^r + \mathcal{P}_{\text{fem}}^f &= 0 \Leftrightarrow -iaBv \cos(\alpha) = Ri^2 \\ &\Leftrightarrow \boxed{Ri = aBv \cos(\alpha)} \end{aligned} \tag{I4.1}$$

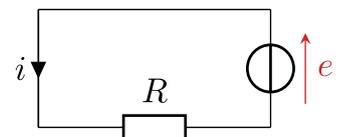


FIGURE I4.3

- 4 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par v et la résoudre, sachant que le barreau est lâché en $x = 0$ sans vitesse initiale. Justifier que le mouvement présente un régime transitoire de durée caractéristique τ à déterminer.

Réponse

On étudie le mouvement du barreau dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Bilan des forces :

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin(\alpha)\vec{u}_x - \cos(\alpha)\vec{u}_z)$

Force de LAPLACE $\vec{F}_L = -iaB(\cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{u}_z)$

Réaction normale $\vec{R} = R\vec{u}_z$

PFD : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_L + \vec{R}$

sur \vec{u}_x : $m\frac{dv}{dt} = mg\sin(\alpha) - iaB\cos(\alpha)$

avec (I4.1) $m\frac{dv}{dt} = mg\sin(\alpha) - \frac{(aB\cos(\alpha))^2}{R}v(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{(aB\cos(\alpha))^2}{mR}v(t) = g\sin(\alpha)$$

Canonique

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = g\sin(\alpha)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{mR}{(aB\cos(\alpha))^2}}$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre, et on sait que τ est la durée du régime transitoire. On résout :

Solution particulière constante $\frac{1}{\tau}v_p = g\sin(\alpha) \Leftrightarrow v_p = g\tau\sin(\alpha) = \frac{Rmg\sin(\alpha)}{(aB\cos(\alpha))^2}$

Solution homogène $v_h(t) = Ae^{rt} \Rightarrow r + \frac{1}{\tau} = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{\tau} \Leftrightarrow v_h(t) = Ae^{-t/\tau}$

Solution générale $v(t) = v_h(t) + v_p \Leftrightarrow v(t) = Ae^{-t/\tau} + g\tau\sin(\alpha)$

Condition initiale $v(0) = 0$: $0 = A + g\tau\sin(\alpha) \Leftrightarrow A = -g\tau\sin(\alpha)$

Solution finale

$$\boxed{v(t) = \frac{Rmg\sin(\alpha)}{(aB\cos(\alpha))^2} (1 - e^{-t/\tau})}$$



5 En déduire $x(t)$.

Réponse

On primitive $x(t) = \frac{Rmg\sin(\alpha)}{(aB\cos(\alpha))^2} (t + \tau e^{-t/\tau} + B)$

Condition initiale $x(0) = 0 = \frac{Rmg\sin(\alpha)}{(aB\cos(\alpha))^2} (0 + \tau + B) \Leftrightarrow B = -\tau$

Ainsi

$$\boxed{x(t) = \frac{Rmg\sin(\alpha)}{(aB\cos(\alpha))^2} (t + \tau (e^{-t/\tau} - 1))}$$



6 Les rails ont une longueur totale L . Déterminer l'énergie électrique totale transmise à la résistance R lors du mouvement du barreau sur les rails, en supposant le temps de chute très grand devant τ . Interpréter.

Réponse

Par conservation de la puissance électromécanique, la puissance reçue par la résistance R est égale à l'opposé de la puissance reçue par le barreau de la part de la force de LAPLACE :

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}}^f + \mathcal{P}_{\text{fem}}^f = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}_{\text{Lap}}^r + \mathcal{P}_J^r = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}_J^r = -\mathcal{P}_{\text{Lap}}^r$$

En supposant le temps de chute très grand devant τ , on peut considérer qu'à tout instant, $v \approx v_p$; la force de LAPLACE est donc constante. Pour trouver l'énergie, on détermine le travail de la force de LAPLACE :

$$\mathcal{W}_{\text{Lap}}^r = \int \vec{F}_L \cdot d\vec{OM} = (\vec{F}_L \cdot \vec{u}_x) \int_0^L dx = -\frac{(aB\cos(\alpha))^2}{R}v(t)L$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{W}_{\text{Lap}}^r = -\frac{(aB\cos(\alpha))^2}{R} \frac{Rmg\sin(\alpha)}{(aB\cos(\alpha))^2} L = -mgL\sin(\alpha)$$

Ainsi

$$\mathcal{W}_J^r = -\mathcal{W}_{\text{Lap}}^r \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_J^r = mgL\sin(\alpha)}$$





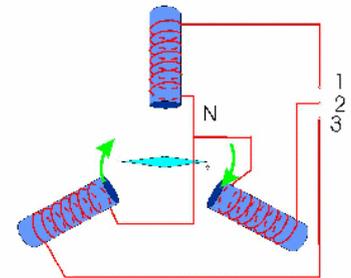
II Moteur synchrone

Considérons un modèle simple de moteur synchrone. Le rotor, de moment magnétique \vec{m} , tourne avec la même vitesse angulaire ω constante que le champ magnétique \vec{B} qui l'entraîne. On néglige tout frottement interne au moteur. On s'intéresse à l'angle interne du moteur θ orienté de \vec{m} vers \vec{B} et au couple $\vec{\Gamma}$ exercé par le champ sur le moment magnétique. On prendra $B = 0,2\text{T}$, $m = 8\text{A}\cdot\text{m}^2$ et une fréquence de rotation de 50 tours par seconde.

- 1 Proposer un dispositif simple permettant de réaliser le champ magnétique tournant.

Réponse

On peut utiliser deux bobines dont les axes forment un angle de $\pi/2$, alimentées par des courants déphasés de la même valeur. Cependant, EDF fournit un courant triphasé, c'est-à-dire trois sorties (les phases), déphasées de $2\pi/3$ les unes par rapport aux autres : la solution technologique la plus simple consiste donc à utiliser trois bobines dont les axes se coupent en un même point et inclinées de $2\pi/3$ les unes par rapport aux autres, comme indiqué ci-contre



- 2 Que vaut θ si le moteur fonctionne à vide ?

Réponse

Dans tout l'exercice, on utilisera les notations de la Figure I4.4. Appliquons le théorème du moment cinétique au rotor dans le référentiel du stator, supposé galiléen. Lorsque le moteur tourne à vide, il n'est soumis qu'au couple magnétique $\vec{\Gamma}$, soit

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Régime permanent $\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{m} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

On en déduit que \vec{m} et \vec{B} sont colinéaires, soit que $\theta = 0$.

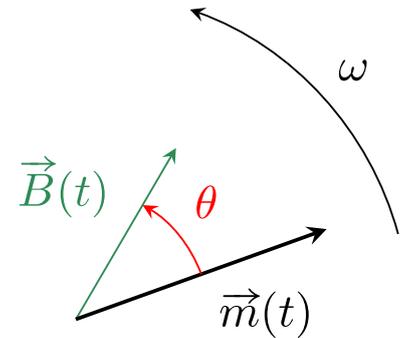


FIGURE I4.4

- 3 Le moteur doit entraîner une charge mécanique qui exerce un couple résistant $\Gamma_r = 0,65\text{N}\cdot\text{m}$. Calculer l'angle interne et la puissance mécanique fournie par le moteur. D'où provient cette puissance ?

Réponse

Toujours permanent :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{0} = \vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}_r \Rightarrow mB \sin(\theta) = \Gamma_r$$

$$\Leftrightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{\Gamma_r}{mB}\right) \quad \text{A.N. : } \theta = 24^\circ$$

L'angle θ est bien positif, d'une part car il est défini de \vec{m} vers \vec{B} , et d'autre part car le couple résistant a forcément pour effet de retarder le rotor par rapport au champ. De façon générale, lorsque le moteur entraîne une charge, le moment magnétique suit le champ mais avec un angle interne d'autant plus grand que le couple résistant est important.

La puissance fournie par le moteur vaut

$$\mathcal{P} = \Gamma_r \omega \Leftrightarrow \mathcal{P} = mB\omega \sin(\theta) \quad \text{A.N. : } \mathcal{P} = 205\text{W}$$

- 4 La vitesse de rotation dépend-elle de la charge ? Quel est le couple maximal que peut fournir ce moteur ?

Réponse

La question précédente montre que $mB \sin(\theta) = \Gamma_r$, c'est-à-dire que la charge mécanique entraînée (décrite par Γ_r) n'a d'influence que sur l'angle interne θ , mais pas sur la vitesse de rotation. C'est d'ailleurs un des avantages de la

machine synchrone par rapport à la machine asynchrone (voir Exercice II). Le couple maximal que peut fournir le moteur est obtenu pour $\sin(\theta) = 1$, soit

$$\Gamma_{\max} = mB \quad \text{A.N. : } \Gamma_{\max} = 1,6 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Au-delà de cette valeur, le couple exercé par le champ sur le rotor est trop faible pour le mettre en mouvement.



III Haut parleur « de LAPLACE »

On s'intéresse dans cet exercice à un modèle très simplifié de haut-parleur, dans une configuration proche des rails de LAPLACE où la membrane du haut-parleur est fixée solidairement à la tige mobile, qui est également reliée élastiquement à un bâti. La tige mobile a pour longueur $AA' = a$, et sa position est repérée par son abscisse x , dont l'origine correspond à la position de repos. Les frottements de l'air sur la membrane se traduisent par une force de frottement linéaire $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$. Le système est forcé électriquement par la tension de commande u_0 . On note R la résistance électrique de l'ensemble, et on néglige l'auto-induction.

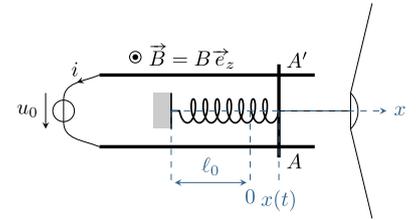


FIGURE I4.5

- 1 Exprimer la f.é.m. induite en fonction de \dot{x} .

Réponse

Le champ magnétique est uniforme à l'échelle du circuit. Les variations de flux proviennent de la variation de surface du circuit, dû au mouvement de la tige mobile. Notons S_0 l'aire entourée par le circuit lorsque $x = 0$. On a alors :

$$\vec{S}(t) = (S_0 + ax(t))\vec{e}_z \Rightarrow \phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = (S_0 + ax(t))B$$

FARADAY

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \Leftrightarrow e(t) = -aB\dot{x}(t)$$

- 2 Écrire les équations électrique et mécanique.

Réponse

Pour établir l'équation mécanique, appliquons le PFD à l'ensemble {tige+membrane} dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Bilan des forces :

- ◇ Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
- ◇ Réaction normale $\vec{N} = N\vec{e}_z$ sans frottements
- ◇ Frottements visqueux $\vec{f} = -\alpha\vec{v}(t) = -\alpha\dot{x}(t)\vec{e}_x$
- ◇ LAPLACE $\vec{F}_{\text{Lap}} = i\vec{AA}' \wedge \vec{B} = iaB(\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z) = iaB\vec{e}_x$
- ◇ Rappel du ressort $\vec{F}_r = -k[(\ell_0 + x(t)) - \ell_0]\vec{e}_x = -kx(t)\vec{e}_x$

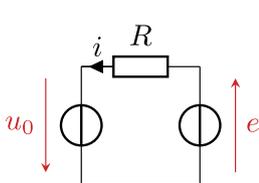
PFD :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f} + \vec{F}_{\text{Lap}} + \vec{F}_r$$

sur \vec{u}_x

$$m\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x}(t) - kx(t) + iaB$$

Équation mécanique



On écrit l'équation électrique en se basant sur un schéma électrique équivalent. On a la tension de commande u_0 , la résistance R du circuit et la fem d'induction e . Avec une loi des mailles, on obtient

$$u_0 + e = Ri \Leftrightarrow u_0 - aB\dot{x}(t) = Ri \quad \text{Équation électrique}$$

- 3 Découpler ces équations pour aboutir à une unique équation différentielle portant sur la position x de la tige mobile. Quel type d'équation obtient-on ? L'analyser physiquement : comment se traduisent les phénomènes d'induction ? Commenter leur signe.

Réponse

On obtient une équation sur $x(t)$ en éliminant i dans l'équation mécanique grâce à l'équation électrique. Ainsi :

$$i = \frac{u_0}{R} - \frac{aB}{R}\dot{x}(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x}(t) - kx(t) + \frac{aBu_0}{R} - \frac{(aB)^2}{R}\dot{x}(t)$$

Canonique

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{m} \left(\alpha + \frac{(aB)^2}{R} \right) \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = \frac{aBu_0}{mR}$$

Oscillateur amorti

Lorsque l'on remplace i dans l'expression de la force de LAPLACE, on voit que celle-ci compte deux contributions : un **terme de forçage constant**, qui change la position d'équilibre de la tige, et un **terme analogue à une force de frottement fluide**, proportionnelle à $\dot{x}(t)$. Le fait de trouver un terme de frottement (donc avec un signe $-$) est **cohérent avec la loi de LENZ** : l'induction a pour conséquence un freinage qui s'oppose au mouvement de la tige, source de l'induction.



4 Procéder à un bilan de puissance du système et interpréter physiquement chaque terme.

Réponse

On effectue un bilan de puissance en multipliant le PFD (pas sous forme canonique) par $v = \dot{x}$ et la LdM par i :

$$m\dot{x}\ddot{x} = -\alpha\dot{x}^2 - kx\dot{x} + iaB\dot{x} \quad \text{et} \quad u_0i - aB\dot{x}i = Ri^2$$

Première équation \Rightarrow

$$iaB\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) + \alpha\dot{x}^2$$

On remplace :

$$\underbrace{u_0i}_{\mathcal{P}_{\text{gén}}^f} = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\mathcal{E}_p^{\text{el}}} \right) + \underbrace{\alpha\dot{x}^2}_{\mathcal{P}_f^f} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J^r} \Leftrightarrow \mathcal{P}_{\text{gén}}^f = \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} + \underbrace{\mathcal{P}_f^f}_{P_{\text{utile}}^f} + \mathcal{P}_J^r$$

Ainsi, la **puissance fournie par le générateur** sert à **modifier l'énergie mécanique** de la partie mobile, dont une partie est « perdue » par frottements fluides : c'est ici la **puissance utile de l'émission de l'onde sonore**. Enfin, une partie est perdue (réelle perte), **dissipée par effet JOULE**.



Correction du TD d'entraînement



I Oscillateur amorti par induction *inspiré oral banque PT*

Considérons une barre de masse m et de longueur a , suspendue à deux ressorts conducteurs identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$. La barre, les ressorts et le support forment un circuit fermé.

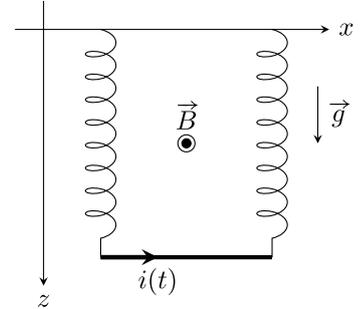


FIGURE I4.1

1 Établir l'équation différentielle sur la position $z(t)$ de la barre.

Réponse

Équation mécanique

On étudie le mouvement de la barre dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Bilan des forces :

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
Forces de rappel, sommées	$\vec{F}_r = -2k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_k = -2k(z(t) - \ell_0)\vec{u}_z$
Force de LAPLACE	$\vec{F}_{\text{Lap}} = ia\vec{u}_x \wedge B_0\vec{e}_y = iaB_0\vec{u}_z$
PFD :	$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{F}_{\text{Lap}}$

sur \vec{u}_z :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - 2k(z - \ell_0) + iaB_0$$

(I4.1)

Équation électrique

On représente le circuit équivalent Figure I4.2, avec une résistance R qui modélise celle de la barre et des ressorts, avec un générateur induit de f.é.m. $e(t)$.

Compte-tenu de l'orientation, on a

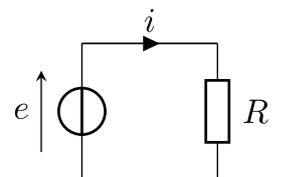


FIGURE I4.2

Flux :	$\phi = \iint (B_0\vec{e}_y) \cdot (dS\vec{e}_y) = B_0az(t)$
FARADAY :	$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0a \frac{dz}{dt}$
Loi des mailles :	$e = Ri \Leftrightarrow Ri = -B_0a \frac{dz}{dt}$

(I4.2)

Découplage

(I4.2) dans (I4.1) :

$$m\ddot{z}(t) = mg - 2k(z - \ell_0) - \frac{(B_0a)^2}{R}\dot{z}(t)$$

Canonique :

$$\Leftrightarrow \ddot{z}(t) + \frac{(aB_0)^2}{mR}\dot{z}(t) + \frac{2k}{m}z(t) = g + \frac{2k}{m}\ell_0$$

$$\text{Oscillateur amorti : } \Leftrightarrow \boxed{\ddot{z}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = g + \omega_0^2 \ell_0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \\ Q = \frac{mR}{(aB_0)^2} \sqrt{\frac{2k}{m}} \end{cases} \quad (\text{I4.3})$$



2 Réaliser et interpréter le bilan de puissance.

Réponse

$$(\text{I4.1}) \times \dot{z} : \quad m\ddot{z}(t)z(t) = mg\dot{z}(t) - 2k(z - \ell_0)\dot{z}(t) + iaB_0\dot{z}(t)$$

$$(\text{I4.2}) \times i : \quad Ri^2 = -B_0ia\dot{z}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{On combine :} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_z^2 \right) &= \frac{d}{dt} \left(mgz(t) - 2 \times \frac{1}{2} k (z(t) - \ell_0)^2 \right) - Ri^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} m v_z^2}_{=\varepsilon_c} + \underbrace{mgz(t)}_{=\varepsilon_p} - \underbrace{k(z(t) - \ell_0)^2}_{=\varepsilon_{\text{el}}} \right) = - \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} \end{aligned}$$

On reconnaît à gauche la dérivée de l'énergie mécanique de la barre. Le bilan de puissance indique que **l'énergie mécanique de la barre ne peut que diminuer** (dérivée négative) et que cette diminution est due à la **dissipation par effet JOULE**.



3 À l'instant $t = 0$, on écarte la barre de sa position initiale d'une distance b . Déterminer $z(t)$ et $i(t)$.

Réponse

On résout l'équation différentielle (I4.3) avec les conditions initiales données :

Forme générale

$$\text{Solution particulière constante} \quad \omega_0^2 z_p = g + \omega_0^2 \ell_0 \Leftrightarrow z_p = \frac{g + \omega_0^2 \ell_0}{\omega_0^2} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}$$

$$\begin{aligned} \text{Solution homogène } z_h(t) = Ae^{rt} &\Rightarrow r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \\ &\Rightarrow \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) \end{aligned}$$

Si la résistance du circuit est suffisamment faible, on peut supposer $Q > 1/2$ c'est-à-dire $\Delta < 0$; on aura donc des racines complexes conjuguées et donc un régime pseudo-périodique avec des oscillations amorties. On trouve :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \Leftrightarrow r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$$

avec τ le temps caractéristique d'amortissement et Ω la pseudo-pulsation. Ainsi, en réinjectant dans $z_h(t)$, on trouve

$$z_h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

$$\text{Solution générale} \quad \boxed{z(t) = z_p + z_h(t) = \ell_0 + \frac{mg}{2k} + e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))}$$

Conditions initiales

$$\text{À } t = 0 : \quad z(0) = \ell_0 + \frac{mg}{2k} + A = \ell_0 + b \Leftrightarrow A = b$$

$$\text{À } t = 0 : \quad \dot{z}(0) = -\frac{b}{\tau} + B\Omega = 0 \Leftrightarrow B = \frac{b}{\Omega\tau}$$

$$\text{Solution finale} \quad \boxed{z(t) = \ell_0 + \frac{mg}{2k} + be^{-t/\tau} \left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau} \right]}$$

On obtient $i(t)$ en réutilisant (I4.2) :

$$\begin{aligned} i(t) = -\frac{B_0 a}{R} \dot{z}(t) &\Leftrightarrow i(t) = -\frac{B_0 a}{R} be^{-t/\tau} \left[\left(-\Omega \sin(\Omega t) + \frac{1}{\tau} \cos(\Omega t) \right) - \frac{1}{\tau} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau} \right) \right] \\ &\Leftrightarrow i(t) = -\frac{B_0 a}{R} be^{-t/\tau} \left[-\Omega \sin(\Omega t) - \frac{1}{\Omega\tau^2} \sin(\Omega t) \right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow i(t) = \frac{B_0 a}{R} b \left(\Omega - \frac{1}{\Omega \tau^2} \right) \sin(\Omega t) e^{-t/\tau}$$

Remarque

De gros calculs pour peu d'intérêt physique si l'on s'arrête ici... et l'énoncé original demandait en plus de prendre en compte l'auto-induction !

★★ **II Moteur asynchrone**

Le bobinage du rotor d'une machine asynchrone peut être modélisé par une spire unique de résistance R , d'inductance L et de surface S tournant à vitesse angulaire constante ω autour d'un axe (Ox) . La normale \vec{n} à la spire est contenue dans le plan (yz) . Cette spire est plongée dans un champ \vec{B} généré par le stator, localement uniforme, contenu dans le plan (Oyz) , de norme constante, tournant à vitesse angulaire constante ω' autour de (Ox) . Ce dispositif est utilisé en moteur électrique : le champ magnétique entraîne le rotor.

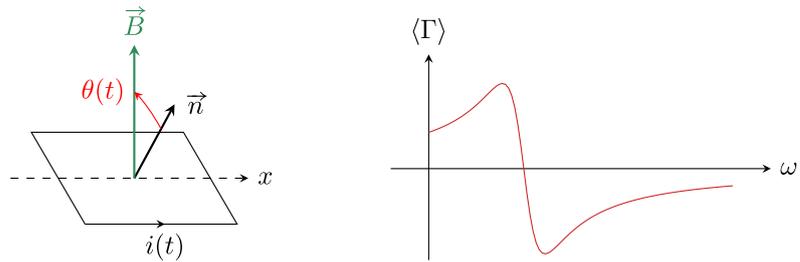


FIGURE I4.3 – Photo, schéma de principe et allure de $\langle \Gamma \rangle$.

1 Expliquer **qualitativement** pourquoi la spire tourne. Les deux vitesses ω et ω' peuvent-elle être identiques ?

Réponse

Supposons la spire immobile. Du fait de la rotation du champ tournant, le flux magnétique au travers de la spire varie. Il y a donc un phénomène d'induction, qui génère un courant dans la spire. Ce courant a pour conséquence l'apparition d'un moment magnétique qui tend à s'aligner avec le champ. Comme le champ tourne, la spire tourne également.

On peut donner une vision équivalente à partir de la loi de LENZ : l'effet du courant induit est de **diminuer les variations de flux magnétique** au travers de la spire, et donc de chercher à donner à la spire une **orientation constante** par rapport au champ \vec{B} . Comme le champ tourne, la spire tourne également.

Les deux vitesses de rotation ne peuvent pas être égales. Si tel était le cas, en se plaçant dans le référentiel de la spire, le champ magnétique serait fixe et de norme constante, et il ne pourrait donc plus y avoir d'induction. La spire ralentirait alors en raison des frottements... ce qui impliquerait de nouveau un phénomène d'induction.

2 Pour simplifier, on suppose qu'à l'instant initial \vec{n} et \vec{B} sont colinéaires et de même sens selon \vec{e}_z . Exprimer l'angle θ en fonction de $\Omega = \omega' - \omega$. Que représente physiquement la vitesse de glissement Ω ?

Réponse

À l'instant t , \vec{n} forme avec \vec{e}_z un angle ωt et \vec{B} un angle $\omega' t$. L'angle θ vaut donc

$$\theta(t) = \omega' t - \omega t \Leftrightarrow \theta(t) = \Omega t$$

La vitesse de glissement Ω est la vitesse angulaire à laquelle \vec{n} et \vec{B} se décalent l'un par rapport à l'autre.

3 Établir l'équation différentielle régissant l'évolution du courant dans le rotor en fonction de Ω .

Réponse

On représente le circuit électrique équivalent Figure I4.4. Il n'y a pas de couplage inductif à prendre en compte. Le sens de $i(t)$ et de $e(t)$ doit être le même pour appliquer la loi de FARADAY (convention générateur).

On calcule la fém induite :

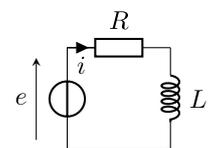


FIGURE I4.4

$$\phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\theta) = BS \cos(\Omega t)$$

FARADAY
$$e = -\frac{d\phi}{dt} = BS\dot{\theta}(t) \sin(\theta) \Leftrightarrow e = BS\Omega \sin(\Omega t)$$

Loi des mailles
$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} \Leftrightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{BS}{L}\Omega \sin(\Omega t)}$$
 (I4.4)

- 4 On se place en régime permanent. Déterminer la pulsation du courant dans la bobine et résoudre l'équation différentielle obtenue précédemment à l'aide de la représentation complexe. Écrire la solution comme une somme de sinus et cosinus.

Réponse

L'équation différentielle décrit un circuit en forçage harmonique, de pulsation Ω : la pulsation du courant dans la bobine en régime permanent est donc également Ω . On veut passer en complexe, mais il faut faire attention au $\sin(\Omega t)$: **passer en complexes demande d'avoir des cosinus**. Or,

$$\sin(\Omega t) = \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{donc} \quad e^{j(\Omega t - \pi/2)} = -je^{j\Omega t}$$

Ainsi, (I4.4) en \mathbb{C}
$$j\Omega \underline{I}e^{j\Omega t} + \frac{R}{L}\underline{I}e^{j\Omega t} = -j\Omega \frac{BS}{L}e^{j\Omega t}$$

On simplifie par $e^{j\Omega t}$
$$\Leftrightarrow \frac{jL\Omega + R}{L}\underline{I} = -j\Omega \frac{BS}{L}$$

$$\Leftrightarrow \underline{I} = -\frac{j\Omega BS}{R + jL\Omega}$$

Dénominateur réel
$$\Leftrightarrow \underline{I} = \frac{-j\Omega BS(R - jL\Omega)}{R^2 + L^2\Omega^2} = -\frac{\Omega BS}{R^2 + L^2\Omega^2}(jR + L\Omega)$$

Ainsi
$$\underline{I}e^{j\Omega t} = -\frac{\Omega BS}{R^2 + L^2\Omega^2}(jR + L\Omega)(\cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t))$$

Soit
$$i(t) = \text{Re}(\underline{I}e^{j\Omega t}) \Leftrightarrow \boxed{i(t) = -\frac{\Omega BS}{R^2 + L^2\Omega^2}(L\Omega \cos(\Omega t) - R \sin(\Omega t))}$$

- 5 En considérant le moment magnétique \vec{m} de la spire, calculer le couple auquel elle est soumise. En déduire le couple moyen $\langle \Gamma \rangle$ s'exerçant sur la bobine.

Réponse

$$\vec{m}(t) = i(t)S\vec{n}(t) \quad \text{donc} \quad \vec{\Gamma}(t) = \vec{m}(t) \wedge \vec{B} = \|\vec{m}\|\|\vec{B}\|\sin(\theta(t))\vec{u}_x$$

$$\Leftrightarrow \vec{\Gamma}(t) = i(t)BS \sin(\Omega t)\vec{e}_x$$

Ainsi
$$\Gamma = i(t)BS \sin(\Omega t) \Leftrightarrow \boxed{\Gamma = -\frac{\Omega(BS)^2}{R^2 + L^2\Omega^2}(L\Omega \cos(\Omega t) - R \sin(\Omega t)) \sin(\Omega t)}$$

Moyennes
$$\left\langle \sin^2(\Omega t) = \frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{et} \quad \langle \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) \rangle = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle \Gamma \rangle = \frac{R\Omega(BS)^2}{2(R^2 + L^2\Omega^2)}}$$

- 6 L'allure de la courbe représentant $\langle \Gamma \rangle$ en fonction de ω est donnée ci-dessus. Le moteur peut-il démarrer seul ?

Réponse

Lorsque la vitesse de rotation est nulle, $\omega = 0$ et $\Omega = \omega'$. Le couple moyen exercé sur le rotor est donc non-nulé : le moteur asynchrone est donc en mesure de démarrer seul.

- 7 Le moteur doit entraîner une charge mécanique exerçant un couple résistant Γ_r connu. Justifier graphiquement qu'un ou deux points de fonctionnement, c'est-à-dire une ou deux vitesses de rotation ω , sont possibles. En raisonnant en termes de stabilité par rapport à Γ_r , justifier qu'un de ces deux points de fonctionnement n'est pas utilisable en pratique : lequel et pourquoi ?

Réponse

En régime permanent, le couple moteur moyen $\langle G \rangle$ doit compenser le couple résistant. Le point de fonctionnement du moteur asynchrone correspond donc à la (aux) vitesse(s) de rotation ω telle(s) que $\langle G \rangle = \Gamma_r$.

Les deux cas sont représentés Figure I4.5 : le(s) point(s) de fonctionnement sont situés aux intersections des courbes. Dans tous les cas, la charge est entraînée à une vitesse de rotation ω légèrement inférieure à ω' (qui se trouve pour $\langle \Gamma \rangle = 0$ car alors $\Omega = 0$.)

Dans le premier cas, un seul point de fonctionnement est possible.

Dans le second cas, deux points de fonctionnement sont envisageables. Celui à plus basse vitesse de rotation est instable : si le couple résistant augmente par exemple sous l'effet d'une perturbation, alors d'après la loi du moment cinétique la vitesse de rotation du moteur diminue. . . mais dans ce cas le couple moteur moyen diminue aussi. Le moteur ne peut donc plus entraîner la charge et décroche. Au contraire, pour le point de fonctionnement à plus haute vitesse de rotation, le couple moteur augmente si ω diminue, ce qui permet de compenser la perturbation.

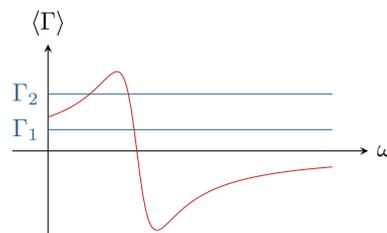


FIGURE I4.5

III Pendule pesant conducteur avec induction

On considère un pendule rigide OA, homogène, de masse m et de longueur ℓ , libre de tourner autour d'un axe vertical (Oz) passant par une de ses extrémités. On note J son moment d'inertie par rapport à cet axe. Le centre de masse G de la tige est situé en son milieu. Le pendule est repéré par l'angle qu'il forme avec la verticale.

La tige est en contact en A avec un rail métallique, ce qui forme un circuit électrique. L'ensemble est placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On ne tient compte que de la résistance R de la tige, et on néglige celles du rail et du fil servant à fermer le circuit.

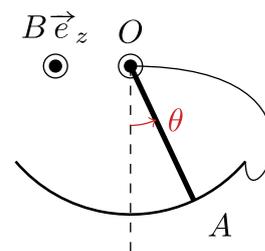


FIGURE I4.6

- 1 Expliquer qualitativement ce qu'il se passe pour la barre.

Réponse

Lorsqu'on lâche la barre, le flux magnétique à travers le circuit varie. Il apparaît donc une fém. induite et un courant électrique induit $i(t)$ dans la barre. Elle est alors soumise à une force de LAPLACE, qui, d'après la loi de LENZ, s'oppose à la variation du flux : les oscillations de la barre seront donc amorties.

- 2 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ avec la verticale.

Réponse

Lors d'une petite variation $d\theta$, la surface balayée est $\frac{1}{2}\ell \cdot \ell d\theta$ (triangle rectangle), et est retirée à la surface entourée par la tige et le fil ; on aura donc

$$d\phi = -\frac{B\ell^2 d\theta}{2} \Rightarrow e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{B\ell^2}{2}\dot{\theta}(t)$$

Loi des mailles

$$e(t) = Ri(t) \Leftrightarrow i(t) = \frac{B\ell^2}{2R}\dot{\theta}(t) \tag{I4.5}$$

LAPLACE :

$$d\vec{F}_L(t) = i(t)dr\vec{u}_r \wedge B\vec{u}_z = -i(t)drB\vec{u}_\theta$$

Moment infinitésimal :

$$d\vec{M}_O(\vec{F}_L) = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_L = -r\vec{u}_r \wedge (i(t)Bdr)\vec{u}_\theta = -i(t)Brdr\vec{u}_z$$

Moment total :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_L) = \int d\vec{M}_O(\vec{F}_L) = -i(t)B \int_0^\ell r dr \vec{u}_z$$

$$\Leftrightarrow \vec{M}_O(\vec{F}_L) = -i(t)\frac{B\ell^2}{2}\vec{u}_z$$

Attention !!

Le moment total n'est pas le moment de la force totale!! C'est évident en se disant qu'un couple c'est précisément le moment de forces dont la résultante est nulle ; si la résultante du moment c'était le moment de la résultante, tous les couples seraient nuls !

Moment du poids

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \frac{\ell}{2}\vec{u}_r \wedge m\vec{g} = -\frac{\ell}{2}mg \sin(\theta)\vec{u}_z$$

TMC sur \vec{u}_z

$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = J\ddot{\theta}(t) = -mg\frac{\ell}{2}\sin(\theta(t)) - i(t)\frac{\ell^2 B}{2} \tag{I4.6}$$

avec (I4.5) :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\ell^4 B^2}{4RJ}\dot{\theta}(t) + \frac{mga}{2J}\sin(\theta(t)) = 0 \tag{I4.7}$$

-
- 3 On suppose les oscillations de petite amplitude. Montrer que si le champ magnétique est suffisamment fort, la tige atteint sa position d'équilibre sans osciller.

— Réponse —

$$\sin(\theta) \approx \theta(t) \Rightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{\ell^4 B^2}{4RJ} \dot{\theta}(t) + \frac{mga}{2J} \theta(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta}(t) + \omega_0^2 \theta(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{2J}} \\ Q = \frac{4RJ}{\ell^4 B^2} \sqrt{\frac{mg\ell}{2J}} = \frac{4R}{B^2} \sqrt{\frac{mgJ}{\ell^7}} \end{cases}$$

Solution générale : $\theta(t) = Ae^{rt} \Rightarrow r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q} (1 - 4Q^2)$

Pas d'oscillation $\Rightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow Q \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4R}{B^2} \sqrt{\frac{mgJ}{\ell^7}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{B^2 \geq 8R \sqrt{\frac{mgJ}{\ell^7}}}$

On a bien que si B est suffisamment grand, le régime est critique ($Q \leq 1/2$) et la barre atteint sa position d'équilibre sans osciller.

-
- 4 Établir un bilan d'énergie et l'analyser qualitativement.

— Réponse —

$$\text{TMC} \times \dot{\theta}(t) \quad J\ddot{\theta}(t)\dot{\theta}(t) = -mg\frac{\ell}{2} \sin(\theta(t))\dot{\theta}(t) - \frac{\ell^4 B^2}{4R} \dot{\theta}^2(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2(t) - mg\frac{\ell}{2} \cos(\theta(t)) \right) = -\frac{\ell^4 B^2}{4R} \dot{\theta}^2(t)$$

Le terme de gauche représente l'énergie mécanique de la barre (cinétique de rotation + potentielle) ; le terme de droite représente la puissance de la force de LAPLACE, assimilable ici à une forme de frottements fluide qui diminue bien l'énergie mécanique de la barre (en cohérence avec le loi de LENZ).
