

Correction du TD



I Vitesse du son

- 1 Donner l'expression de la célérité c du son dans un fluide en fonction de la masse volumique ρ du fluide et du coefficient d'incompressibilité χ , homogène à l'inverse d'une pression.

Réponse



Données

c est une vitesse, ρ une masse volumique et χ une grandeur relative à la pression. On nous donne $\dim \chi = \dim P^{-1}$ avec P une pression.



Résultat attendu

On cherche c en fonction de ρ et χ , soit

$$c = \rho^\alpha \chi^\beta$$

avec α et β à déterminer.



Outil

Une pression est une force surfacique, c'est-à-dire une force répartie sur une surface. On a donc

$$\dim P = \frac{\dim F}{L^2}$$

De plus, la force de pesanteur s'exprime $F = mg$, avec g l'accélération de la pesanteur : ainsi,

$$\dim F = \dim m \cdot \dim g = M \cdot L \cdot T^{-2}$$



Application

On commence par déterminer la dimension de c . En tant que vitesse, on a

$$\dim c = L \cdot T^{-1}$$

On exprime ensuite les dimensions de ρ et χ . D'une part,

$$\dim \rho = M \cdot L^{-3}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \dim \chi &= \frac{L^2}{\dim F} \\ \Leftrightarrow \dim \chi &= \frac{L^2}{M \cdot L \cdot T^{-2}} \\ \Leftrightarrow \dim \chi &= L \cdot M^{-1} \cdot T^2 \end{aligned}$$

L'expression recherchée revient à résoudre

$$L \cdot T^{-1} = (M \cdot L^{-1})^\alpha (L \cdot M^{-1} \cdot T^2)^\beta$$

En développant, on trouve un système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} 1 = -3\alpha + \beta \\ -1 = 2\beta \\ 0 = \alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, on peut exprimer c tel que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi}}$$



II Faire cuire des pâtes

Sur une facture d'électricité, on peut lire sa consommation d'énergie électrique exprimée en kWh (kilowatt-heure).

- 1 Quelle est l'unité SI associée ? Que vaut 1 kWh dans cette unité SI ?

Réponse

**Donnée**

Consommation électrique en kWh.

Résultat attendu

Unité associée en unités SI.

**Outil**

Toute énergie s'exprime en joules (J), et les **puissances** sont des **énergies par unité de temps**. Notamment pour les watts on a $1 \text{ W} = 1 \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$.

**Application**

On a directement

$$1 \text{ kWh} = 1 \times 10^3 \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{h}$$

Avec l'évidence que $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, finalement

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$



- 2 Sachant que la capacité thermique massique de l'eau est $c = 4,18 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et que le prix du kilowatt-heure est de $0,16 \text{ €}$, évaluer le coût du chauffage électrique permettant de faire passer 1 L d'eau de 20°C à 100°C .

Réponse**Données**

Notre objet d'étude est l'eau. On a :

- ◇ $V_{\text{eau}} = 1 \text{ L}$;
 - ◇ $T_i = 20^\circ\text{C}$;
 - ◇ $T_f = 100^\circ\text{C}$;
 - ◇ $c = 4,18 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- De plus, on nous donne
- ◇ $1 \text{ kWh} = 0,16 \text{ €}$.

Résultat attendu

On cherche à monter 1 L d'eau de 20 à 100°C et d'en calculer le coût en euros.

**Outil**

On doit donc trouver le coût en énergie et le convertir en euro. On cherche pour ça une loi reliant l'énergie consommée avec les données du problème, sachant que **pour l'eau**, $1 \text{ L} = 1 \text{ kg}$.

**Application**

L'énergie à apporter Q se déduit de la dimension de la capacité thermique massique : $\dim c = \dim Q \cdot \text{M}^{-1} \cdot \Theta^{-1}$. En appelant m la masse du volume d'eau, par cette analyse dimensionnelle on a

$$Q = mc\Delta T$$

On a donc

$$Q = 3,3 \times 10^5 \text{ J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 1 \text{ kg} \\ c = 4,18 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \\ \Leftrightarrow c = 4,18 \times 10^3 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \\ \Delta T = 80 \text{ K} \end{cases}$$

et pour utiliser le coût en euros, on la converti en kWh :

$$Q_{\text{€}} = 9,3 \times 10^{-2} \text{ kWh} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ €}$$



- 3 Si la plaque chauffe avec une puissance de $\mathcal{P} = 1200 \text{ W}$, combien de temps faudra-t-il pour chauffer ce litre d'eau ?

Réponse**Données**

On utilise une plaque chauffante de puissance $\mathcal{P} = 1200 \text{ W}$.

Résultat attendu

On cherche la durée que cette plaque prendrait pour transférer l'énergie calculée précédemment.



**Outil**

Une puissance est une énergie par unité de temps, et $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$.

Application

On en déduit

$$\mathcal{P} = \frac{Q}{\Delta t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q = 3,3 \times 10^5 \text{ J} \\ \mathcal{P} = 1200 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad \Delta t = \frac{Q}{\mathcal{P}} = 2,8 \times 10^2 \text{ s}$$



III TAYLOR meilleur que James BOND ?

À l'aide d'un film sur bande magnétique et en utilisant l'analyse dimensionnelle, le physicien Geoffrey TAYLOR a réussi en 1950 à estimer l'énergie $\mathcal{E}$ dégagée par l'explosion nucléaire du test TRINITY de 1945, valeur pourtant évidemment classifiée. Le film permet d'avoir accès à l'évolution du rayon $R(t)$ du « nuage » de l'explosion au cours du temps. Nous supposons que les grandeurs influant sur ce rayon sont le temps t , l'énergie $\mathcal{E}$ de l'explosion et la masse volumique ρ de l'air.

- 1 Quelles sont les dimensions de ces grandeurs ?

Réponse

On a directement $\dim R = L$, $\dim t = T$, $\dim \rho = M \cdot L^{-3}$ et $\dim \mathcal{E} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$.

- 2 Chercher une expression de R sous la forme $R = k \times \mathcal{E}^\alpha t^\beta \rho^\gamma$, avec k une constante adimensionnée.

Réponse**Données**

On nous donne la formule $R = k \times \mathcal{E}^\alpha t^\beta \rho^\gamma$ et que $\dim k = 1$.

Résultat attendu

On cherche α , β et γ tels que $R = k \times \mathcal{E}^\alpha t^\beta \rho^\gamma$

**Outils**

$$\diamond \dim \mathcal{E} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2};$$

$$\diamond \dim t = T;$$

$$\diamond \dim \rho = M \cdot L^{-3}.$$

**Application**

$\dim R = L$, donc on a

$$L = (M \cdot L^2 \cdot T^{-2})^\alpha T^\beta (M \cdot L^{-3})^\gamma$$

Soit

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 3\gamma \\ 0 = -2\alpha + \beta \\ 0 = \alpha + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \alpha = \beta/2 \\ \alpha = 1/5 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha = 1/5 \\ \gamma = -1/5 \\ \beta = 2/5 \end{cases}$$

Soit

$$R = k \times \mathcal{E}^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}$$

- 3 L'analyse du film montre que le rayon augmente au cours du temps comme $t^{2/5}$. Exprimer alors $\mathcal{E}$ en fonction de R , ρ et t .

Réponse

On isole simplement en mettant la relation à la puissance 5 : $\mathcal{E} = k^{-5} R^5 t^{-2} \rho$.

- 4 En estimant que $R \approx 70 \text{ m}$ après $t = 5 \text{ ms}$, sachant que la masse volumique de l'air vaut $\rho \approx 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et en prenant $k \approx 1$, calculer la valeur de $\mathcal{E}$ en joules puis en kilotonnes de TNT (une tonne de TNT libère $4,18 \times 10^9 \text{ J}$).

Réponse

On fait une simple application numérique :

$$\mathcal{E} = 8,0 \times 10^{13} \text{ J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 1 \\ R = 70 \text{ m} \\ t = 5 \times 10^{-3} \text{ s} \\ \rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{cases}$$

En équivalent tonne de TNT, on trouve :

$$\underline{\mathcal{E}} = 19 \text{ kT de TNT}$$

**Remarque**

En réalité, l'explosion aura été estimée à $[21 ; 24]$ kT de TNT des années plus tard, connaissant la composition de la bombe. Cependant, l'analyse dimensionnelle marche très bien, même si le $k \approx 1$ n'était pas évident. Voir le billet de blog de [Science Étonnante](#) joint à sa vidéo sur l'analyse dimensionnelle – que je vous recommande aussi.

