Fiches – numéro 5

Utiliser la calculatrice pour analyser des données

Sommaire

I Fonctions de base

I/A Calcul numérique

Application F5.1 : Calcul numérique

1) **Mettez votre calculatrice en écriture scientifique (3 chiffres après la virgule)**, puis calculer les fractions suivantes à l'aide de la calculatrice (attention à vos parenthèses) :

$$\frac{7}{3\times 5}+4 \quad \text{et} \quad \frac{2}{9\times 8+5}$$

$$\frac{67}{15} = 4{,}467 \quad \text{et} \quad \frac{2}{77} = 2{,}597\times 10^{-2}$$

2) Le rayon de BOHR a_0 (caractéristique de la taille d'un atome) est donné par la formule :

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{aligned} e &= 1{,}60\times 10^{-19}\,\mathrm{C}\\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} &= 9{,}00\times 10^{9}\,\mathrm{USI} = 9{,}00\times 10^{9}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}\\ \hbar &= 5\times 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}\\ m_e &= 9{,}11\times 10^{-31}\,\mathrm{kg}\end{aligned}\right.$$

Déterminer l'unité de $1/(4\pi\varepsilon_0)$ en newtons, mètres et coulombs, ainsi que la valeur de a_0.

$$\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] = \left[\frac{\hbar^2}{a_0 m_e e^2}\right] = \frac{(\mathrm{J{\cdot}s})^2}{\mathrm{m{\cdot}kg{\cdot}C^2}} = \frac{(\mathrm{N{\cdot}m})^2\mathrm{s}^2}{\mathrm{m.kg{\cdot}C^2}} = \frac{\mathrm{N^2{\cdot}m^2}}{\mathrm{N{\cdot}C^2}} \Leftrightarrow \boxed{\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right] = \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}}$$

$$\text{A.N. : } \underline{a_0 = 1{,}19\times 10^{-9}\,\mathrm{m}}$$

Astuce : stockage de valeurs (toutes calculatrices)

Lorsqu'une expression mathématique est lourde à taper, il peut devenir indispensable d'utiliser les caractères alphabétiques pour stocker des valeurs. Ainsi, la lecture des valeurs est claire, comme pour les A.N. écrites, la modification d'une d'entre elle également, et il en est de même pour l'expression en elle-même.

Stockage de valeurs

Depuis le menu de calculs de base, entrer une valeur suivie d'une flèche → (soit avec une touche spécifique, soit avec la touche `STO` *via* la touche `shift`) et d'une lettre, accessible par `ALPHA` puis une touche.

$\mathtt{1{,}6\times 10^{-19}\to E}$

$\mathtt{9{,}00\times 10^{9}\to P}$

$\mathtt{9{,}11\times 10^{-31}\to M}$

$\mathtt{5\times 10^{-34}\to J}$

$\mathtt{\dfrac{P^{-1}H^2}{ME^2}\to A}$

I/B Utilisation des angles

Lorsque l'on travaille avec les fonctions trigonométriques (cos, sin, tan...), il faut être très vigilant-e à l'unité des angles utilisée par votre calculatrice.

Remarque F5.1 : Unité des angles

Dans la suite, on distinguera les degrés par ° et les radians par rad, mais ça ne sera pas à écrire dans la calculatrice !

Casio

Dans le mode `RUN`, on choisit entre degrés et radians en allant dans le mode `SET UP`.

TI

Dans le menu `MODE`, on choisit entre degrés et radians en allant sur la troisième ligne.

Numworks

Dans le menu `Paramètres`, on choisit entre degrés et radians en choisissant l'unité de l'angle.

Utilisation des angles

1) Mettez-vous en radians. Vérifier alors que

$$\cos(\pi\,\text{rad}) = -1 \quad \text{et} \quad \cos(180°) \approx -0{,}5985$$

2) Mettez-vous en degrés. Vérifier alors que

$$\cos(\pi\,\text{rad}) \approx 0{,}9985 \quad \text{et} \quad \cos(180°) = -1$$

3) Faire les applications numériques suivantes :

$$\tan(2\,\text{rad}) \quad \text{et} \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\,\text{rad}\right) - \sin(10°)$$

$$\tan(2\,\text{rad}) \approx -2{,}185$$
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\,\text{rad}\right) - \sin(10°) \approx 7{,}635 \times 10^{-2}$$

4) Calculer n tel que :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} D_m = 5{,}85° \\ A = \pi/2\,\text{rad} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{n = 1{,}09}$

I/C Résolution des équations d'ordre 2

I/C) 1 En réels

Casio

Dans le mode `EQUA`, on sélectionne le type de l'équation à résoudre. Il y a :

- `SIML` (bouton `F1`) pour résoudre un système d'équations à plusieurs inconnues ;
- `POLY` (bouton `F2`) pour résoudre une équation polynômiale ;
- `SOLV` (bouton `F3`) pour résoudre une équation plus complexe.

Choisir ici le mode `POLY`. On peut ensuite choisir le degré de l'équation (2 ou 3). Dans notre cas, choisir 2. On est alors invité-e à rentrer les coefficients a, b et c de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Une fois cela fait, presser `SOLV` (bouton `F1`). On obtient alors les deux solutions de l'équation.

TI

Aller dans `Apps`. Choisir `PlySmlt2` (bouton 4) puis `Poly Root Finder` (bouton 1). Choisir ensuite l'ordre 2 et presser `ENTER` et `NEXT`. L'équation s'affiche alors sous la forme $a2 * x^2 + a1 * x + a0 = 0$. Renseigner alors les coefficients $a2$, $a1$ et $a0$. Presser `SOLVE` pour obtenir les deux solutions de l'équation.

Numworks

Aller dans le menu `Équations`. Ajouter une équation, et choisir le modèle d'équation voulu. Compléter les coefficients. Choisir `résoudre l'équation`.

I/C) 2 En complexes

Casio

Dans le menu polynômial `POLY`, degré ? → 2 puis `shift` → `setup` → `complex mode a+ib`.

TI

Dans le menu où l'on choisit l'ordre, sélectionner `a+ib`.

Numworks

Dans les paramètres, mettre la forme complexe en algébrique.

Application F5.2 : Équations d'ordre 2

Donner les solutions des équations suivantes :

$$2x^2+3=0 \quad ; \quad 3x^2=2x+1 \quad ; \quad x^2+x+1=0$$
$$x=\pm 1{,}22\mathrm{i} \quad ; \quad x_1=1 \quad \text{et} \quad x_2=-0{,}33 \quad ; \quad x_\pm=-0{,}5\pm 0{,}87\mathrm{i}$$

II Régression linéaire

II/A Exemple linéaire : la loi d'Ohm

La tension et l'intensité sont mesurées au travers d'une résistance de $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$ d'après le constructeur.

I (en A)	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060
U (en V)	10,1	20,0	29,8	40,2	50,0	60,1

TI 83+

- ◇ Appuyer sur `stats`.
- ◇ Dans le menu `EDIT` choisir `1 : Editer`.
- ◇ Entrer les deux séries de données : l'abscisse dans la première colonne `L1`, et l'ordonnée dans la seconde colonne `L2`.
- ◇ Dans le menu `graph stats`, choisir la première ligne.
- ◇ Choisir `Aff` pour afficher, puis le premier type, la liste `L1` pour `ListeX` et la liste `L2` pour `ListeY`.
- ◇ Appuyer sur `graphe` pour afficher le nuage de points.
- ◇ Pour déterminer les coefficients a, b et r ou r^2, retourner dans `stats` puis aller dans le menu `CALC` et choisir `4 : RegLin(ax+b)`. Appuyer sur `ENTER`.

r non indiqué

- ◇ Appuyer sur `2nde` puis `catalog`.
- ◇ Choisir `Diagnostic On` ou `corelAff` selon la langue, appuyer deux fois sur `ENTER`.

Tracer la courbe

- ◇ Aller dans `f(x)`, appuyer sur `var`.
- ◇ Choisir `5 : Statistiques`.
- ◇ Dans le menu `EQ` choisir `1`, puis `ENTER`.
- ◇ Aller dans `graphe` pour voir la droite.

Casio 35+

- ◇ Aller dans le mode `STAT`.
- ◇ Entrer les deux séries de données dans `List1` et `List2`.
- ◇ Appuyer sur `GRAPH` puis `SET`.
- ◇ Choisir le type de graphique `GraphType : Scatter`. Mettre `List1` dans `XList` pour l'abscisse et `List2` dans `YList` pour l'ordonnée.
- ◇ Appuyer sur `ENTER`, et appuyer sur `GRAPH 1` pour visualiser le nuage de points.
- ◇ Appuyer sur `CALC` puis `X` puis sur `ax+b` pour obtenir une régression linéaire $y = ax + b$.

◇ Une fenêtre `LinearReg` affiche la pente a, l'ordonnée à l'origine b et le coefficient de corrélation r^2.

◇ Pour visualiser la droite, choisir `DRAW` en bas à droite.

Attention !

Il est plus que courant d'inverser les deux listes !

Numworks

◇ Aller dans le mode `Régressions`

◇ Rentrer les séries de données en `X1` et `Y1`.

◇ Aller dans le menu `Graphiques`, puis `Régression` (à côté de `Naviguer` en haut de la fenêtre)

◇ Choisir le modèle `Affine` (ou `Linéaire`)

◇ Observer la droite, puis vous avez deux choix :

1) Retourner dans `Régression` et lire l'équation de la droite, en déduire a et b **si la régression est validée** (voir plus loin) ;
2) Aller dans le menu `Stats` à côté de `Graphique`, et déplacer le curseur sur la liste `Y1` puis vers le bas pour une meilleure lecture des paramètres.

Application F5.3 : Régression linéaire simple

1) Tracer le graphe de la tension en fonction de l'intensité sur votre calculatrice.
2) Réaliser la régression linéaire. Relever les valeurs des coefficients de régression a et b ainsi que le coefficient de corrélation linéaire r et le coefficient de détermination r^2.

$$a = 1001\,\Omega \quad \text{et} \quad b = -6{,}66 \times 10^{-3}\,\text{V}$$
$$r = 0{,}999\,97 \quad \text{et} \quad r^2 = 0{,}999\,94$$

3) Les données suivent-elles bien la loi d'Ohm ? Pourquoi ? Vérifier la valeur de la résistance.

   Les données relevées suivent bien la loi d'Ohm, étant donné l'aspect de la droite de régression.

4) Conclure quant à la valeur constructeur. Quel est l'écart relatif entre la valeur constructeur et la valeur expérimentale de R ? Commenter.

   On obtient donc $R_{\text{reg}} = 1001\,\Omega$: la valeur constructeur est précise. On trouve un écart relatif de :

$$\varepsilon_r = \frac{|R_{\text{const}} - R_{\text{reg}}|}{|R_{\text{const}}|} = \underline{0{,}1\%}$$

   Ce qui est tout à fait satisfaisant.

II/B Exemple non-linéaire : cinétique chimique

Les relations que l'on étudie en science ne sont pas toujours linéaires. Pourtant, il est tout de même possible d'exploiter la méthode de régression linéaire pour s'assurer de la validité du modèle et déterminer des coefficients numériques inconnus. À titre d'exemple, on va étudier l'évolution de la concentration $c(t)$ d'une espèce chimique en solution lors d'une réaction chimique. On obtient les données suivantes :

t (en s)	20	40	60	80	100	120
c (en µmol·L^{-1})	278	192	147	119	100	86

On suppose ici que la forme de cette évolution peut être de deux types :

Ordre 1

$$c(t) = c_0 \mathrm{e}^{-kt}$$

Ordre 2

$$\frac{1}{c(t)} = \frac{1}{c_0} + kt$$

Ces deux modèles sont **non-linéaires**. Afin de vérifier si les données expérimentales vérifient (ou non) l'un de ces modèles à l'aide d'une régression linéaire, il convient de « linéariser » (rendre linéaire) les données.

Ordre 1

$$y = ax + b$$
$$\ln(c(t)) \swarrow \quad -k \swarrow \quad t \searrow \quad \ln(c_0) \searrow$$

soit $y = \ln(c(t))$, $a = -k$, $x = t$, $b = \ln(c_0)$.

Ordre 2

$$y = ax + b$$

soit $y = \dfrac{1}{c(t)}$, $a = k$, $x = t$, $b = \dfrac{1}{c_0}$.

Régression linéaire de données transformées

Plutôt que de calculer les valeurs de $\ln(c)$ et $1/c$ à la main, on peut appliquer des fonctions directement sur les listes de données !

TI 83+

- ◇ Aller sur la case `L3`, puis `ENTER`
- ◇ Entrer la formule (`L3=sin(L2)` ici), puis `ENTER`

Casio 35+

- ◇ Dans menu `RUN`, touche `OPTN` et `LIST`
- ◇ Entrer la formule (`sin(List2)` → `List3` ici), puis `EXE`

Numworks

- ◇ Aller sur le nom de la liste à modifier, par exemple `Y2`.
- ◇ Appuyer sur `OK` puis `Remplir avec une formule`.
- ◇ Choisir `Vide`, puis écrire `sin(Y1)` à l'aide des touches `shift` et `alpha`, puis `OK`.

Attention !

N'allez pas trop vite, vous risqueriez de finir par trier une liste, qui sera ensuite impossible à « dé-trier » !

Application F5.4 : Régression linéaire de données transformées

1) Réaliser les régressions linéaires et donner l'équation de la droite (coefficients a et b) ainsi que la valeur des coefficients de corrélation dans les cas suivants :

   a – c en fonction de t ;

   b – $\ln(c)$ en fonction de t ;

   c – $1/c$ en fonction de t.

   Avec quel modèle les résultats expérimentaux s'accordent-ils le mieux ? Conclure.

Aide

1) $c = f(t)$: $c = -1{,}8.10^{-6}t + 0{,}0003$; $r^2 = 0{,}89$ et $r = -0{,}94$.
2) $\ln(c) = f(t)$: $\ln(c) = -0{,}0115t - 8{,}0597$; $r^2 = 0{,}97$ et $r = -0{,}98$.
3) $1/c = f(t)$: $1/c = 80{,}185t + 1993{,}6$; $r^2 = 0{,}999\,991$ et $r = -0{,}999\,995$.