

Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont autorisées

Au programme

Toute l'optique.

Sommaire

E1	Étude optique de l'œil (<i>D'après e3a PSI 2025</i>)	2
E2	Fibre optique (<i>D'après IESEA 2025</i>)	4
P1	Système afocal (<i>D'après ENAC 2025</i>)	7
P2	Profondeur de champ d'un viseur	9

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit **ni vue ni corrigée**.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des **connecteurs logiques**.

Vous prendrez soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ◇ A : application numérique mal faite ; ◇ N : numéro de copie manquant ; ◇ P : prénom manquant ; ◇ E : manque d'encadrement des réponses ; ◇ M : marge non laissée ou trop grande ; ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ; ◇ L : absence de connecteur logique (\Leftrightarrow) ; | <ul style="list-style-type: none"> ◇ Q : question mal ou non indiquée ; ◇ C : copie grand carreaux ; ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ; ◇ H : homogénéité non respectée ; ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ; ◇ R : schéma moche fait sans règle ; ◇ φ : loi physique fondamentale brisée. |
|---|---|

Exemple application numérique

$n = \frac{PV}{RT}$

avec

$$\begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. : $n = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol}$

~~$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8,32 \cdot 300} = 0,56$$~~

/43 E1 Étude optique de l'œil (D'après e3a PSI 2025)

L'œil est l'organe de la vision. Il capte la lumière et transforme celle-ci en signaux électriques transmis au cerveau *via* le nerf optique. La cornée est la membrane transparente par laquelle la lumière entre dans l'œil. Ce dernier est de forme approximativement sphérique avec un diamètre typique d'environ 25 mm. Il est maintenu dans la cavité orbitaire par un ensemble de muscles qui assurent aussi son mouvement. La Figure D1.1 donne une représentation simplifiée de l'œil.

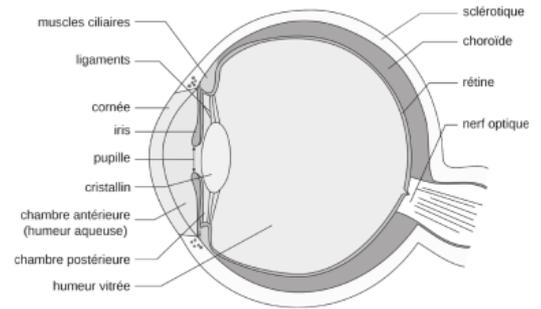


FIGURE D1.1 – Représentation de l'œil.

La forme de la cornée permet la focalisation de la lumière sur la rétine, partie interne photosensible de l'œil. La mise au point s'effectue à l'aide du cristallin qui a la forme d'une lentille biconvexe. Sous l'action des muscles ciliaires, la courbure du cristallin est modifiée, si besoin, de façon à pouvoir former une image nette.

- /2 1 Rappelez où doit se former l'image pour qu'elle soit vue nette. Comment appelle-t-on le processus par lequel le cristallin permet cette netteté ?

Réponse

Pour être nette, l'image doit se former sur la rétine ①. Ce processus est appelé *accommodation* ①.

- /3 2 La constitution de l'œil présente des analogies avec celle d'un appareil photographique. Regroupe dans un tableau trois éléments de l'œil et de l'appareil photographique pouvant être mis en correspondance.

Réponse

Œil	Appareil photo.	
Iris/pupille	Diaphragme	①
Cornée+cristallin	Objectif lentille convergente	①
Rétine	Capteur photosensible/écran	①

- /5 3 En assimilant l'œil emmétrope (c'est-à-dire l'œil sans défaut) au repos à un ensemble {lentille-écran} distants de 17 mm, donner la valeur correspondante de la vergence de l'œil.

Réponse

L'œil au repos n'accommodant pas, il voit net des objets qui sont à l'infini ①. Leur image se forme donc dans le plan focal image de la lentille ①, confondu avec l'écran ; ainsi

$$f'_{\text{repos}} = 17 \text{ mm} = 17 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \text{soit} \quad V_{\text{repos}} = \frac{1}{f'}$$

$$\text{A.N. : } V_{\text{repos}} = 59 \delta$$

- /6 4 Dans quel sens la vergence doit-elle évoluer lorsque l'objet observé se rapproche ? Dans quel sens la courbure du cristallin est-elle modifiée lors de l'accommodation ? Comment appelle-t-on le point le plus proche que l'œil peut voir en accommodant ? Ce point est typiquement situé à 25 cm devant l'œil emmétrope. Trouver alors la valeur de la vergence de l'œil dans ce cas de figure.

Réponse

En utilisant la relation de conjugaison de DESCARTES, on a

$$V = \frac{1}{OF'} = \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} \Leftrightarrow \frac{1}{OA'} = V + \frac{1}{OA}$$

puisque l'on souhaite que l'image se forme toujours sur l'écran, c'est-à-dire pour que $\overline{OA'}$ soit constant. Or, si l'objet se rapproche, alors $|\overline{OA}|$ diminue, mais comme $\overline{OA} < 0$, on a \overline{OA} qui augmente ; alors $\frac{1}{\overline{OA}}$ diminue ① : il faut donc que **V augmente** ①, donc le cristallin doit être **plus courbé** ①.

Le point le plus proche que l'œil peut voir en accommodant est le **punctum proximum** ① (PP).

Avec la relation de conjugaison précédente, on trouve donc

$$V_{\text{acco}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{OA'} = 17 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \overline{OA} = -25 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases}$$

A.N. : $V_{\text{acco}} = 63 \delta$

La myopie est un défaut de la vision caractérisé par une perception floue d'objets éloignés. L'image de ces derniers se forme en avant de la rétine lorsque l'œil est au repos.

- /13 [5] Un œil myope possède un *punctum remotum* situé à 2,0 m. Faire un schéma synoptique, puis un schéma montrant la marche de rayons lumineux incidents sur l'ensemble {lentille correctrice – œil} et faisant apparaître les points particuliers du système. En supposant les lentilles accolées, quelle est la vergence de la lentille correctrice à utiliser ? Commenter son signe.

Réponse

Pour que l'image d'un objet à l'infini se forme sur la rétine de l'œil myope sans qu'il n'accomode, il faut que la lentille rajoutée \mathcal{L}_1 forme l'image au *remotum* :

$$\overline{AB} \xrightarrow[\text{O}_1]{\mathcal{L}_1} \overline{A_1B_1} \xrightarrow[\text{O}_2]{\mathcal{L}_2} \overline{A'B'}$$

$-\infty \xrightarrow{\text{O}_1} A_1 = F'_1 \xrightarrow{\text{O}_2} A' = E$
 $\text{O}_1 \xrightarrow{\text{O}_2} A_1 = R \xrightarrow{\text{O}_2} A' = E$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} \quad \text{or} \quad \text{O}_1 = \text{O}_2 \quad \text{et} \quad R = F'_1$$

$$\Leftrightarrow V_1 = \frac{1}{\overline{O_2R}} \quad \text{avec} \quad \overline{O_2R} = -2,0 \text{ m}$$

A.N. : $V_1 = -0,50 \delta$

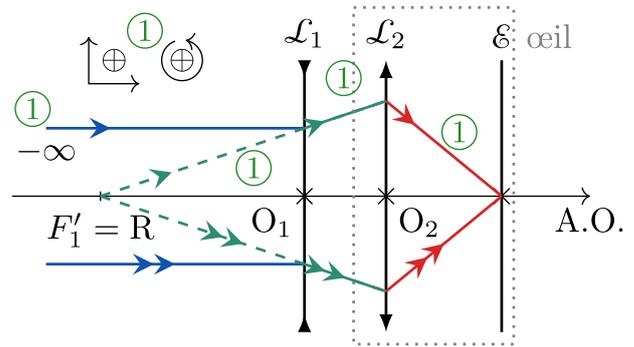


FIGURE D1.2 – Correction myopie.

$V_1 < 0$: la lentille correctrice doit en effet être **divergente** pour contre-balancer la sur-convergence du cristallin au repos.

Les cônes sont les cellules photoréceptrices permettant la perception de la couleur. Ils sont concentrés dans la zone centrale de la rétine avec une densité typique de $\sigma = 2,0 \times 10^5$ cellules/mm². On modélise toujours l'œil, emmétrope, par un ensemble {lentille mince – écran} distants de 17 mm.

- /8 [6] Qu'appelle-t-on *pouvoir séparateur* de l'œil ? Donner une estimation, en radians, du pouvoir séparateur de l'œil en supposant que celui-ci est lié à la distance ℓ entre deux cônes voisins, en vous appuyant sur un schéma.

Réponse

Le pouvoir séparateur de l'œil est caractérisé par l'angle qui doit séparer deux points à l'infini pour qu'ils soient distingués, c'est-à-dire que leurs images se forment sur des cônes différents.

En faisant l'approximation des petits angles, on trouve l'angle de séparation entre deux cônes vus depuis le centre optique du cristallin par :

$$\alpha_{\text{lim}} \approx \tan(\alpha_{\text{lim}}) = \frac{\ell}{d}$$

avec ℓ la distance entre 2 cônes et d la distance lentille-écran.

On estime celle-ci grâce à la densité de cônes σ sur la rétine de surface S . En effet, on construit la surface S en multipliant le nombre de cônes N par la surface ℓ^2 occupée par un cône, et la densité surfacique de cônes σ comme le nombre N de cônes divisé par la surface totale :

$$S = N\ell^2 \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{N}{S} \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$$

Ainsi,

$$\alpha_{\text{lim}} = \frac{1}{d\sqrt{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma = 2,5 \times 10^5 \text{ mm}^{-2} \\ d = 17 \text{ mm} \end{cases}$$

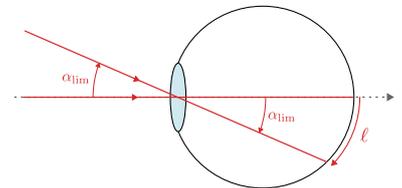


FIGURE D1.3 – Résolution

$$\text{A.N. : } \alpha_{\text{lim}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1,3 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

- /6 7 La lumière est diffractée lorsqu'elle passe à travers la pupille. L'image d'un point objet à l'infini correspond alors à une tache sur la rétine. Si l'on tient compte du diamètre de la pupille (dont vous estimerez la valeur), peut-on conclure que le pouvoir séparateur est déterminé par la diffraction ?

Réponse

Le demi-angle au sommet θ de la tache principale de diffraction est donné par la relation

$$\theta \approx \frac{\lambda}{a}$$

et l'angle apparent de la tache totale due à la diffraction est 2θ . ① En prenant une ouverture de pupille $a \approx 2,5 \text{ mm}$ ①, et pour une longueur d'onde visible moyenne $\lambda \approx 600 \text{ nm}$ ①, on obtient

$$2\theta \approx 4,8 \times 10^{-4} \text{ rad} > \alpha_{\text{lim}}$$

Ainsi, le pouvoir séparateur de l'œil n'est pas limité par la diffraction. ①

/36 E2 Fibre optique (D'après IESEA 2025)

Une fibre optique est constituée de deux cylindres coaxiaux, d'axe (O_z). Le cylindre de rayon a , appelé cœur, est constitué d'un milieu d'indice n_1 , tandis que le cylindre de rayon b ($b > a$), appelé gaine, est constitué d'un milieu d'indice n_2 dans la zone $a < r < b$.

Un rayon incident venant de l'air dont on prendra l'indice égal à 1 arrive en O à l'interface air/cœur sous un angle d'incidence θ_0 avec $0 \leq |\theta_0| < \pi/2$.

Pour les questions suivantes, indiquer la ou les bonnes réponses clairement et en toutes lettres (« Réponse X »), en justifiant entièrement votre choix.

- /6 1 En exprimant mathématiquement la condition de réflexion totale, montrer qu'elle ne se réalise à l'interface cœur/gaine que si :

A) $n_1 > n_2$

B) $n_1 < n_2$

Quand cette condition est remplie, on dit que :

C) le cœur est plus réfringent que la gaine

D) le cœur est moins réfringent que la gaine

Réponse

Réponses A et C.

Au point d'incidence entre le cœur et la gaine, on a la relation de SNELL-DESCARTES :

$$n_1 \sin(i_1) \stackrel{\textcircled{1}}{=} n_2 \sin(i_2)$$

À la limite de la réfraction, on a $i_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ①. Ainsi, on a réflexion totale si

On dit alors que le cœur est **plus réfringent** que la gaine ①.

$$n_1 \sin(i_1) > n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{=1} \quad \left. \begin{array}{l} 0 < \sin(i_1) < 1 \\ \text{car } i_1 \in [0; \frac{\pi}{2}[\end{array} \right\} \quad \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow n_1 > n_2 \quad \textcircled{1}$$

- /8 2 Réaliser un schéma détaillé représentant la marche du rayon dans la fibre. Une attention particulière sera portée au sens de comptage positif des angles.

Réponse

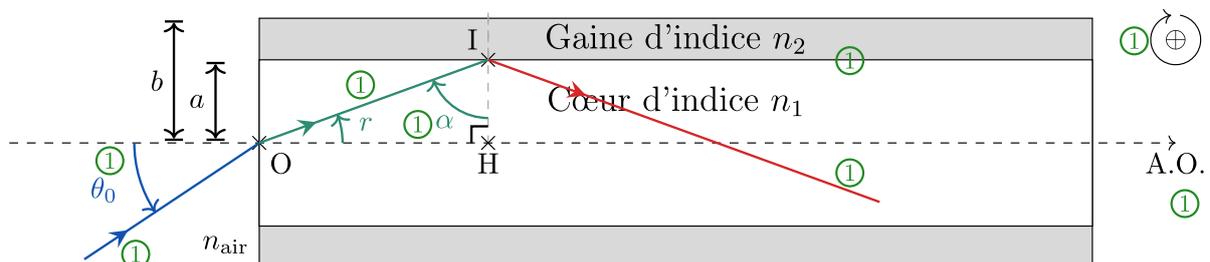


FIGURE D1.4 – Schéma d'une fibre optique à saut d'indice.

$$A) \Delta t' = \frac{n_1 \cdot L}{c} \cdot \sqrt{\frac{n_1^2}{n_1^2 - \sin^2(\theta_0)}}$$

$$B) \Delta t' = \frac{L}{c \cdot \sin(|\theta_0|)}$$

$$C) \Delta t' = \frac{L}{n_1 \cdot c \cdot \cos(|\theta_0|)}$$

$$D) \Delta t' = \frac{n_1 \cdot L}{c \cdot \cos(|\theta_0|)}$$

Réponse

Réponse A.

Pour ce rayon, sa distance parcourue L' est la somme des hypoténuses de chaque triangle rectangle formé par le rayon et l'axe optique. On peut « déplier » ces triangles dans le « monde miroir », en continuant le dessin du rayon réfléchi en ligne droite. On voit alors que la distance parcourue L' est l'hypoténuse du triangle de longueur L et d'angle r , tel que

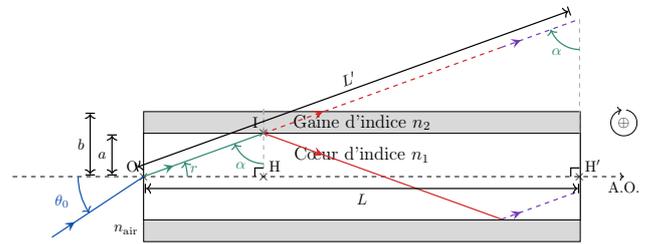


FIGURE D1.5 – Détermination de L' . ①

$$\cos(r) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{L}{L'} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \sin^2(r)} = \frac{L}{L'}$$

$$\stackrel{\textcircled{1}}{\Leftrightarrow} \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta_0)}{n_1^2}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{L}{L'} \Leftrightarrow L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta_0)}{n_1^2}}} = L \sqrt{\frac{n_1^2}{n_1^2 - \sin^2(\theta_0)}}$$

D'où la durée

$$\Delta t' = \frac{L'}{v} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{n_1 L}{c} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_1^2 - \sin^2(\theta_0)}}$$

- /6 6 En entrée de la fibre, on place une diode laser qui émet des impulsions lumineuses. L'impulsion lumineuse est transportée par un faisceau lumineux conique convergent, d'axe de symétrie parallèle à (O_z) , de demi-angle au sommet $|\theta_0|$. Ce faisceau est entièrement guidé dans le cœur. On appelle T la durée qui doit séparer deux impulsions successives pour qu'elles ne se superposent pas à la sortie de la fibre. Faire un schéma expliquant la situation, puis montrer qu'elle s'exprime :

$$A) T > \frac{L}{n_1 \cdot c} \cdot \left(\frac{1}{\cos(|\theta_0|)} - 1 \right)$$

$$B) T > \frac{n_1 \cdot L}{c} \cdot \left(\frac{1}{\cos(|\theta_0|)} - 1 \right)$$

$$C) T > \frac{n_1 \cdot L}{c} \cdot \left(\sqrt{\frac{n_1^2}{n_1^2 - \sin^2(\theta_0)}} - 1 \right)$$

$$D) T > \frac{L}{c} \cdot \left(\frac{1}{\sin(|\theta_0|)} - 1 \right)$$

Réponse

Réponse C. Les impulsions en entrée sont envoyées avec une période T .

Chacune va être étalée de la durée $\delta t \stackrel{\textcircled{1}}{=} \Delta t' - \Delta t$. Pour pouvoir les distinguer, il ne faut pas de recouvrement des paquets étalés : ainsi, il faut qu'on ait $T > \delta t$, soit

$$T > \frac{n_1 \cdot L}{c} - \frac{n_1 L}{c} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_1^2 - \sin^2(\theta_0)}}$$

$$\Leftrightarrow T > \frac{\textcircled{1} n_1 \cdot L}{c} \cdot \left(\sqrt{\frac{n_1^2}{n_1^2 - \sin^2(\theta_0)}} - 1 \right)$$

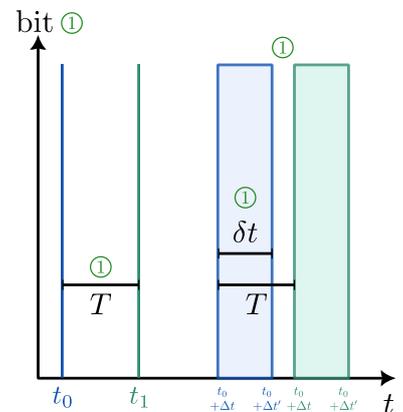


FIGURE D1.6 – Étalement des impulsions.

- /2 7 Le débit maximal D_{\max} de cette fibre optique est le nombre maximum d'impulsions qu'elle peut transmettre par seconde. Son expression est :

A) $D_{\max} = \frac{c}{L} \cdot \frac{\sin(|\theta_0|)}{1 - \sin(|\theta_0|)}$

B) $D_{\max} = \frac{n_1 \cdot c}{L} \cdot \frac{\cos(|\theta_0|)}{1 - \cos(|\theta_0|)}$

C) $D_{\max} = \frac{c}{n_1 \cdot L} \cdot \frac{\cos(|\theta_0|)}{1 - \cos(|\theta_0|)}$

D) $D_{\max} = \frac{c}{n_1 \cdot L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{n_1^2}{n_1^2 - \sin^2(\theta_0)} - 1}}$

Réponse

Réponse D. Par construction, on a donc

$$D_{\max} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{T_{\min}} \Leftrightarrow D_{\max} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{c}{n_1 \cdot L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{n_1^2}{n_1^2 - \sin^2(\theta_0)} - 1}}$$



/43 P1 Système afocal (D'après ENAC 2025)

On étudie un système optique formé de deux lentilles minces, de même axe optique et qu'on suppose utilisées dans les conditions de GAUSS. On note respectivement \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 ces deux lentilles. Pour chacune (avec $k = 1$ ou 2), on note O_k son centre optique, V_k sa vergence, f'_k sa distance focale image, F_k et F'_k ses foyers principaux, respectivement objet et image. L'axe optique est orienté suivant l'ordre de positionnement des lentilles, la lumière rencontre successivement \mathcal{L}_1 puis \mathcal{L}_2 , la distance algébrique $d = \overline{O_1O_2}$ est donc positive.

Dans tout l'exercice, on choisit les lentilles de sorte que $V_2 > 0$ et $V_1 < 0$.



Pour les questions suivantes, indiquer la ou les bonnes réponses clairement et en toutes lettres (« Réponse X »), en justifiant entièrement votre choix.

/10 1 On souhaite former un système afocal. Rappeler sa définition. Indiquer la ou les réponses correctes pour que ce soit possible :

- A) Il suffit que $V_2 > V_1$;
- B) Il faut nécessairement que $|V_1| < |V_2|$;
- C) Il faut nécessairement que $V_1 < -V_2$;
- D) Aucune condition sur les vergences n'est nécessaire, seules comptent le positions des lentilles.

Réponse

Réponse C.

Un système est afocal lorsque l'image d'un objet à l'infini se forme à l'infini. $\textcircled{1}$ Dans ce cas, l'objet intermédiaire est sur le plan focal image de la première lentille, mais également sur le plan focal objet de la seconde ; alors $F'_1 = F_2$ $\textcircled{1}$ ce que l'on montre avec un schéma optique.

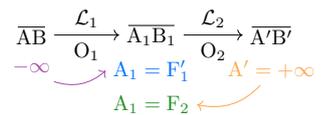


FIGURE D1.7 - $\textcircled{1} + \textcircled{1}$

On trouve alors $d = \overline{O_1O_2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1O_2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} f'_1 + f'_2$ (D1.1)

Ainsi $d > 0 \Leftrightarrow \underbrace{f'_2}_{>0} > \underbrace{-f'_1}_{>0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'_2} < \frac{1}{-f'_1}$ car $(\cdot)^{-1}$ décroissante sur \mathbb{R}^*

$\Leftrightarrow V_2 < -V_1 \Leftrightarrow V_1 < -V_2$ (D1.2)



/2 2 Quelle condition la distance entre les lentilles doit-elle vérifier pour que le système soit afocal ?

- A) $d = \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$
- B) $d = \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)$
- C) $d = (V_1 + V_2)^{-1}$
- D) $d = (V_2 - V_1)^{-1}$

Réponse

Réponse B. On a vu que $d \stackrel{\textcircled{1}}{=} f'_1 + f'_2$, soit

$$d \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}$$



/10 3 Dans tout la suite de l'exercice, les lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont choisies positionnées de façon à former un système afocal noté (Σ) . On l'utilise pour former l'image d'un objet transversal, placé à une distance finie devant la lentille \mathcal{L}_1 . Dans cette situation, on peut affirmer que :

- A) L'image est plus petite que l'objet et elle est de même sens que l'objet ;
 B) L'image est plus petite que l'objet et elle est de sens inverse à celui de l'objet ;
 C) L'image est plus grande que l'objet et elle est de sens inverse à celui de l'objet ;
 D) Le grandissement transversal du système dépend de la position de l'objet, donc les caractéristiques (taille et sens) de l'image dépendent de cette position.
 E) Aucune de ces réponses n'est correcte.

Réponse

Réponse E. On garde les notations introduites avec le schéma synoptique précédent. Ici, les relations de DESCARTES n'aboutissent que difficilement au résultat puisqu'on ne connaît ni la position de l'objet initial ni celle de l'objet intermédiaire : le grandissement au centre est alors difficile à transformer. Ce qui nous intéresse ici, c'est d'exprimer les grandissements en fonction des distances focales, sur lesquelles nous avons des informations. On écrit donc les relations aux foyers :

$$\begin{aligned} \gamma_1 \triangleq \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{F_1 O}}{\overline{F_1 A}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{f_1'}{\overline{F_1 A}} \quad \text{et} \quad \gamma_2 \triangleq \frac{\overline{A' B'}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{F_2 A'}}{\overline{F_2 O}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{\overline{F_2 A'}}{f_2'} \\ \Rightarrow \gamma_\Sigma \triangleq \frac{\overline{A' B'}}{\overline{AB}} &= \gamma_1 \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{f_1' \overline{F_2 A'}}{f_2' \overline{F_1 A}} \end{aligned} \quad (\text{D1.3})$$

$$\text{Or,} \quad -f_1'^2 = \overline{F_1' A_1} \cdot \overline{F_1 A} \stackrel{\textcircled{1}}{\text{et}} \quad -f_2'^2 = \overline{F_2' A'} \cdot \underbrace{\overline{F_2 A_1}}_{=\overline{F_1' A_1} \textcircled{1}}$$

$$\text{En divisant :} \quad \Leftrightarrow \frac{\overline{F_2' A'} \textcircled{1}}{\overline{F_1 A}} = \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \quad (\text{D1.4})$$

$$(\text{D1.4}) \text{ dans } (\text{D1.3}) : \quad \Leftrightarrow \gamma_\Sigma = -\frac{f_1'}{f_2'} \cdot \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\gamma_\Sigma \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{f_2' \textcircled{1}}{f_1'} = -\frac{V_1}{V_2}} \quad (\text{D1.5})$$

$$\text{Or, d'après } (\text{D1.2}), \quad -\frac{V_1}{V_2} > 1 \Leftrightarrow \boxed{\gamma_\Sigma > 1} \quad (\text{D1.6})$$

On a donc une image **plus grande** que l'objet ($|\gamma_\Sigma| > 1$) et **dans le même sens** ($\gamma_\Sigma > 0$). 1

/8 4 On appelle point double le point D de l'axe optique qui est sa propre image par le système optique. Que vérifie la distance $\overline{F_1 D}$ pour le système (Σ) ?

- A) $\overline{F_1 D} = \frac{f_1'^2 f_2' + f_1'}{f_2'^2 - 2}$;
 B) $\overline{F_1 D} = -\frac{2f_1'^2(f_2' + f_1')}{f_2'^2 + f_1'^2}$;
 C) $\overline{F_1 D} = \frac{f_1' f_2'^2 + f_1'^2}{f_2' f_2' + f_1'}$;
 D) $\overline{F_1 D} = -\frac{2f_1'^2}{f_2' - f_1'}$.

Réponse

Réponse D. On a alors $A = D$ et $A' = D$ 1, donc en remplaçant dans (D1.4) :

$$\frac{\overline{F_2 D} \textcircled{1}}{\overline{F_1 D}} = \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \Leftrightarrow \overline{F_1 D} = \frac{f_1'^2}{f_2'^2} \overline{F_2 D} \quad (\text{D1.7})$$

$$\text{Or} \quad \overline{F_2 D} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \overline{F_2 O_2} + \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 F_1} + \overline{F_1 D} = -f_2' - d - f_1' + \overline{F_1 D} \\ = f_1' + f_2' \text{ d'après } (\text{D1.1})$$

$$\Leftrightarrow \overline{F_2 D} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -2(f_2' + f_1') + \overline{F_1 D} \quad (\text{D1.8})$$

$$\begin{aligned} (\text{D1.8}) \rightarrow (\text{D1.7}) \quad \overline{F_1 D} &= -2 \frac{f_1'^2}{f_2'^2} (f_1' + f_2') + \frac{f_1'^2}{f_2'^2} (f_1' + f_2') \overline{F_1 D} & \Leftrightarrow \overline{F_1 D} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -2f_1'^2 \frac{f_1' + f_2'}{f_2'^2 - f_1'^2} \\ &\Leftrightarrow \overline{F_1 D} \left(1 - \frac{f_1'^2}{f_2'^2}\right) = -2 \frac{f_1'^2}{f_2'^2} (f_1' + f_2') & \Leftrightarrow \overline{F_1 D} = -2f_1'^2 \frac{f_1' + f_2'}{(f_2' - f_1')(f_2' + f_1')} \left. \vphantom{\overline{F_1 D}} \right) = (f_2' - f_1')(f_2' + f_1') \\ &\Leftrightarrow \overline{F_1 D} \left(\frac{f_2'^2 - f_1'^2}{f_2'^2}\right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -2 \frac{f_1'^2}{f_2'^2} (f_1' + f_2') & \Leftrightarrow \boxed{\overline{F_1 D} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{2f_1'^2}{f_2' - f_1'}} \end{aligned} \quad (\text{D1.9})$$

/7 [5] Le rapport des distances algébriques de D aux centres optiques des lentilles vérifie :

- A) $\frac{\overline{O_2D}}{\overline{O_1D}} = \frac{f'_2}{f'_1}$; B) $\frac{\overline{O_2D}}{\overline{O_1D}} = -\frac{f'_2}{f'_1}$; C) $\frac{\overline{O_2D}}{\overline{O_1D}} = \frac{f'_1}{f'_2}$; D) $\frac{\overline{O_2D}}{\overline{O_1D}} = -\frac{f'_1}{f'_2}$.

Réponse

Réponse A.

On exprime $\overline{O_1D}$ en passant par F'_1 :

$$\begin{aligned} \overline{O_1D} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \overline{O_1F_1} + \overline{F_1D} \\ \Leftrightarrow \overline{O_1D} &= -f'_1 - \frac{2f_1'^2}{f'_2 - f'_1} \quad \left. \begin{array}{l} \overline{O_1F_1} = -f'_1 \\ \text{(D1.9)} \end{array} \right\} \text{factorisation} \\ \Leftrightarrow \overline{O_1D} &= -f'_1 \left(1 + \frac{2f_1'}{f'_2 - f'_1} \right) \\ \Leftrightarrow \overline{O_1D} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} -f'_1 \frac{f'_2 - f'_1 + 2f'_1}{f'_2 - f'_1} \quad \left. \right\} \text{même dénominateur} \\ \Leftrightarrow \overline{O_1D} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} -f'_1 \frac{f'_2 + f'_1}{f'_2 - f'_1} \quad \text{(D1.10)} \end{aligned}$$

On exprime $\overline{O_2D}$ en passant par F'_2 :

$$\begin{aligned} \overline{O_2D} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2D} \\ \Leftrightarrow \overline{O_2D} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} f'_2 + \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \overline{F_1D} \quad \left. \begin{array}{l} \overline{O_2F'_2} = f'_2 \\ \text{(D1.7)} \end{array} \right\} \text{factorisation et (D1.9)} \\ \Leftrightarrow \overline{O_2D} &= f'_2 \left(1 - \frac{2f_2' f_1'}{f_1'^2 (f'_2 - f'_1)} \right) \\ \Leftrightarrow \overline{O_2D} &= f'_2 \frac{f'_2 - f'_1 - 2f'_2}{f'_2 - f'_1} \quad \left. \right\} \text{même dénominateur} \\ \Leftrightarrow \overline{O_2D} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} -f'_2 \frac{f'_2 + f'_1}{f'_2 - f'_1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\overline{O_2D}}{\overline{O_1D}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{f'_2}{f'_1}$$

/6 [6] DB' est l'image d'un objet transversal DB situé en D. Que peut-on dire de ce couple objet/image ?

- A) L'image se superpose exactement à l'objet puisqu'elle est au point double; B) $\frac{\overline{DB'}}{\overline{DB}} = -\frac{f'_2}{f'_1}$;
 C) $\frac{\overline{DB'}}{\overline{DB}} = -\frac{f'_1}{f'_2}$; D) Il est impossible qu'un objet soit situé en D pour ce système puisque D est entre les deux lentilles.

Réponse

Réponse B. D'après (D1.5), avec $A = A' = D$:

$$\gamma_\Sigma \triangleq \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{f'_2}{f'_1} \Leftrightarrow \frac{\overline{DB'}}{\overline{DB}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{f'_2}{f'_1}$$

L'image est au même endroit que l'objet par définition du point double, par contre elle ne se superpose pas exactement à l'objet puisqu'elle est plus grande d'après (D1.6) ($\gamma_\Sigma > 1$). $\textcircled{1}$ Par contre, D est bien virtuel pour la lentille \mathcal{L}_1 ; d'après (D1.10) :

$$\overline{O_1D} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \underbrace{-f'_1}_{>0} \frac{\overbrace{f'_2 + f'_1}^{=d>0}}{\underbrace{f'_2 - f'_1}_{>0}} \quad \text{soit} \quad \overline{O_1D} \stackrel{\textcircled{1}}{>} 0$$

mais la réponse D est ambiguë : on ne peut pas *physiquement* y placer un objet, sous-entendu réel, par contre on peut y placer un objet virtuel. $\textcircled{1}$ pour une bonne remarque.

/58 P2 Profondeur de champ d'un viseur

Un viseur à frontale fixe est un instrument qui permet de déterminer simplement la position d'une objet (ou une image), réel ou virtuel. Le principe en est le suivant :

- ◇ On observe l'objet étudié à travers le viseur.
- ◇ Dès que ce dernier apparaît de manière nette, on sait qu'il se situe dans le plan focal objet de la lentille de visée. On en déduit sa position.
- ◇ La notion de profondeur de champ est primordiale lors de la conception d'un viseur. Si cette dernière est élevée, la mesure sera peu précise car une large plage de position de l'objet donneront une image quasiment nette. Il convient donc d'obtenir une profondeur de champ petite par rapport à la distance focale de la lentille de visée pour réaliser un viseur performant.

II/A Réalisation d'un viseur élémentaire

On souhaite observer, à l'œil, l'image d'un objet A au travers d'une lentille de visée L_v de distance focale f'_v . On considère dans toute la suite du problème que l'œil peut être modélisé par un écran (la rétine), placé dans le plan focal image d'une lentille convergente (le cristallin, noté L_c , de distance focale f'_c et de diamètre D). Les deux lentilles sont séparées d'une distance Δ .

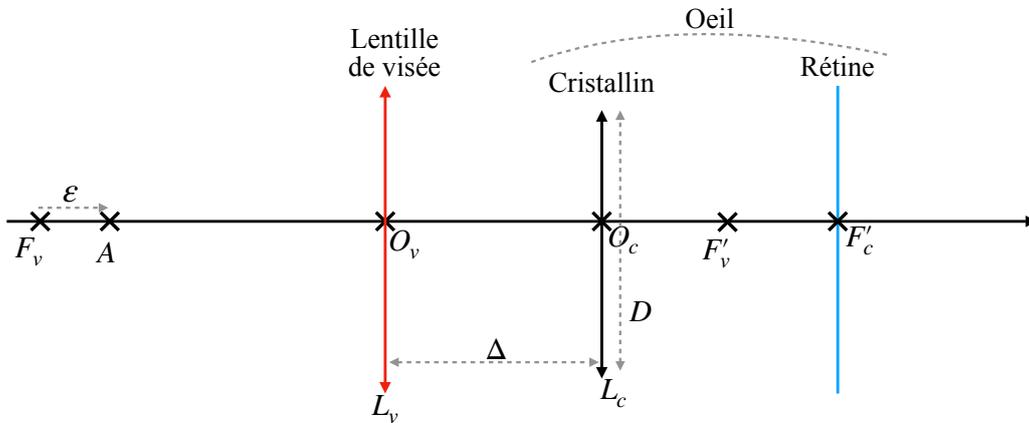
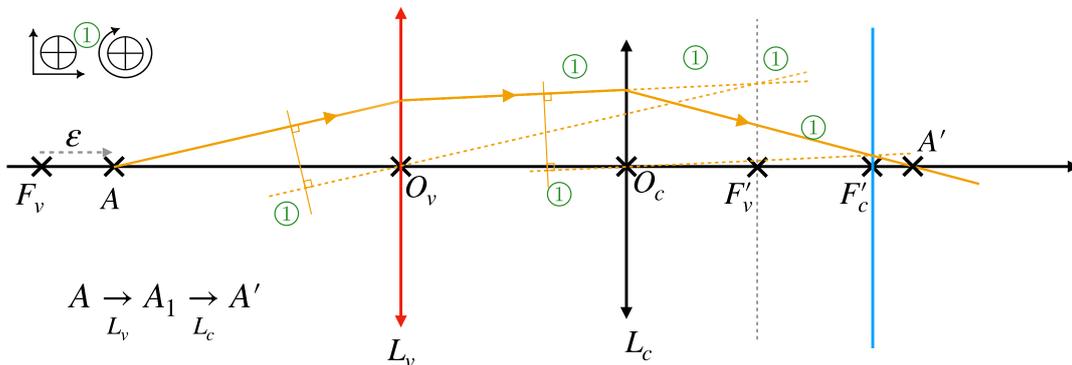


FIGURE D1.8

On note A_1 l'image de A par la première lentille L_v puis A' , l'image de A_1 par la deuxième lentille L_c .

- /7 [1] Reproduire le schéma de l'énoncé (en y conservant les proportions), puis à l'aide d'une construction géométrique, placer l'image finale A' . Il n'est pas nécessaire de placer l'image intermédiaire A_1 .

Réponse



- /4 [2] Où serait situé A' si l'objet A était confondu avec le foyer objet F'_v ? Quel serait l'intérêt de cette configuration ?

Réponse

On représente la situation par un schéma synoptique ①. Si l'objet est confondu avec le foyer objet de la lentille de visée, alors l'image intermédiaire A_1 est à l'infini ① et l'image finale A se trouve dans le plan focal du cristallin ①, c'est à dire au niveau de la rétine : cela permet à l'œil de ne pas accommoder ①.

$$A \xrightarrow{L_v} A_1 \xrightarrow{L_c} A'$$

$A = F'_v \quad A_1 = \infty \quad A' = F'_c$

- /7 [3] En considérant la position de A telle qu'indiquée sur la Figure D1.8, exprimer la distance $\overline{O_v A_1}$ en fonction de $\overline{O_v A}$, f'_v et ε . En déduire la nature de l'image A_1 . Quel est le nom usuel de ce dispositif optique ?

Réponse

En appliquant la relation de DESCARTES à la lentille de visée, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{O_v F'_v}} &= \frac{1}{\overline{O_v A_1}} - \frac{1}{\overline{O_v A}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{O_v A_1}} &= \frac{1}{\overline{O_v F'_v}} + \frac{1}{\overline{O_v A}} = \frac{\overline{O_v A} + \overline{O_v F'_v}}{\overline{O_v A} \cdot \overline{O_v F'_v}} \\ \Leftrightarrow \overline{O_v A_1} &= \frac{f'_v \cdot \overline{O_v A}}{f'_v \cdot \overline{O_v A} + \overline{O_v A}} \Leftrightarrow \boxed{\overline{O_v A_1} = \frac{f'_v \cdot \overline{O_v A}}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Or, $\overline{O_v A} < 0$ mais $f'_v > 0$ et $\varepsilon > 0$ sur le schéma, donc $\overline{O_v A_1} < 0$ ① : l'image est **virtuelle** ①. C'est ce qu'on appelle communément une **loupe** ①.

/6 4 Exprimer les distance algébriques $\overline{F'_v A_1}$ puis $\overline{F_c A_1}$ et enfin, exprimer la distance δ entre l'image finale A' et l'écran en fonction de $\varepsilon, \Delta, f'_c$ et f'_v .

Réponse

Les distances demandées sont exprimées par rapport aux foyers, on peut alors utiliser la relation de conjugaison de NEWTON, que l'on va appliquer aux deux lentilles. On obtient pour la première :

$$\overline{F_v A} \cdot \overline{F'_v A_1} \stackrel{\text{①}}{=} -f'^2_v \Leftrightarrow \boxed{\overline{F'_v A_1} \stackrel{\text{①}}{=} -\frac{f'^2_v}{\varepsilon}}$$

La deuxième distance est obtenue à l'aide de la relation de CHASLES :

$$\overline{F_c A_1} \stackrel{\text{①}}{=} \overline{F_c O_c} + \overline{O_c O_v} + \overline{O_v F'_v} + \overline{F'_v A_1} \Leftrightarrow \boxed{\overline{F_c A_1} \stackrel{\text{①}}{=} f'_c - \Delta + f'_v - \frac{f'^2_v}{\varepsilon}}$$

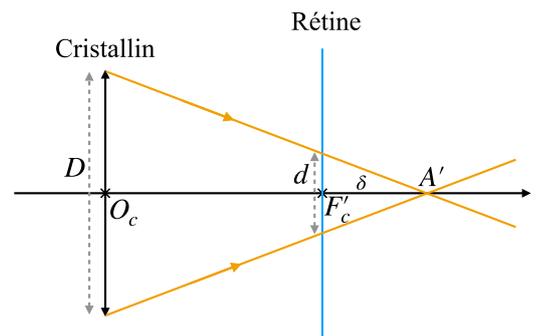
Finalement, la relation de conjugaison appliquée à la deuxième lentille indique

$$\begin{aligned} \overline{F_c A_1} \cdot \overline{F'_c A'} &= -f'^2_c \Leftrightarrow \delta \stackrel{\text{①}}{=} -\frac{f'^2_c}{\overline{F_c A_1}} \\ \Leftrightarrow \delta &= -\frac{f'^2_c}{f'_c - \Delta + f'_v - \frac{f'^2_v}{\varepsilon}} \Leftrightarrow \boxed{\delta \stackrel{\text{①}}{=} \frac{f'^2_c \varepsilon}{f'^2_v - (f'_v + f'_c - \Delta)\varepsilon}} \end{aligned}$$

On s'intéresse alors à la taille de la tâche formée par les rayons lumineux issus de A , au niveau de la rétine. Cette dernière, de diamètre d , est représentée sur le schéma ci-contre.

Dans toute la suite du problème, on considère que la limite de netteté est atteinte lorsque $d = d_{\max} \approx 6 \mu\text{m}$, qui correspond à la distance moyenne entre deux cônes (cellule photo-sensible au niveau de la rétine).

Au delà, l'image de A cessera d'apparaître ponctuelle.



/2 5 Exprimer le diamètre d en fonction de δ, f'_c et D .

Réponse

Le théorème de THALÈS indique dans les deux triangles semblables du schéma :

$$\frac{d \stackrel{\text{①}}{}}{D} = \frac{\delta}{f'_c + \delta} \Rightarrow \boxed{d \stackrel{\text{①}}{=} D \cdot \frac{\delta}{f'_c + \delta}}$$

On considère dans toute la suite que les distances ε et δ sont petites par rapport aux autres distances horizontales en jeu.

/4 6 Justifier alors que les résultats obtenus aux questions précédentes peuvent se simplifier selon :

$$\delta \approx \left(\frac{f'_c}{f'_v}\right)^2 \varepsilon \quad \text{et} \quad d = \frac{D}{f'_c} \delta \tag{D1.1}$$

Réponse

$\delta \ll f'_c$ ① donc $f'_c + \delta \approx f'_c$ au dénominateur du diamètre d , ce qui donne le deuxième résultat ①.

Pour le premier, on remarque que $\varepsilon \ll f'_v$ ① donc $\varepsilon \cdot f'_v \ll f'^2_v$, et de même pour Δ ① : ainsi, $(f'_v + f'_c - \Delta)\varepsilon \ll (f'_v)^2$ d'où le résultat ①.

/4 7 Dédire de ce qui précède l'expression de ε_{\max} , le maximum que peut prendre l'écart entre F_v et A tel que l'image de A semble rester ponctuelle.

Définir ce qu'est la profondeur de champ P d'un viseur. En raisonnant par symétrie autour de la position F_v , exprimer P en fonction de ε_{\max} puis en fonction de d_{\max} , D , f'_c et f'_v .

Réponse

On peut combiner les résultats précédents pour obtenir :

$$d = \frac{D f'_c}{f'_c f'_v} \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon_{\max} = \frac{D f'_v}{D f'_c} \varepsilon$$

La profondeur de champ est distance entre les deux positions extrêmes de l'objet qui en feront une image ponctuelle

①. Par symétrie, on a donc : $P = 2\varepsilon_{\max} = 2 \frac{d_{\max} f'_v}{D f'_c}$



- /3 8 Réaliser l'application numérique pour la profondeur de champ sachant que $D \approx 2,0$ mm, $f'_c \approx 20$ mm et $f'_v \approx 20$ cm. Conclure quant à la précision de viseur étudié.

Réponse

On obtient $P \approx 12$ mm ①, pour une distance de visée de 20 cm, soit une précision relative de 6% ① au viseur élémentaire : ce n'est franchement pas très précis! ① Il est sûrement possible de faire mieux.



II/B Réalisation d'un viseur amélioré

On considère alors un viseur à frontale fixe, constitué d'une lunette, constituée d'un objectif (L_{ob}) et d'un oculaire (L_{oc}), à l'extrémité de laquelle on fixe une lentille de visée (toujours notée L_v) (aussi appelée bonnette). La lunette envoyant l'image de l'objet observé à l'infini, l'observation se fait encore une fois à l'œil (toujours modélisé par une lentille L_c et un écran), sans besoin d'accommoder. L'ensemble est représenté sur le schéma ci-dessous.

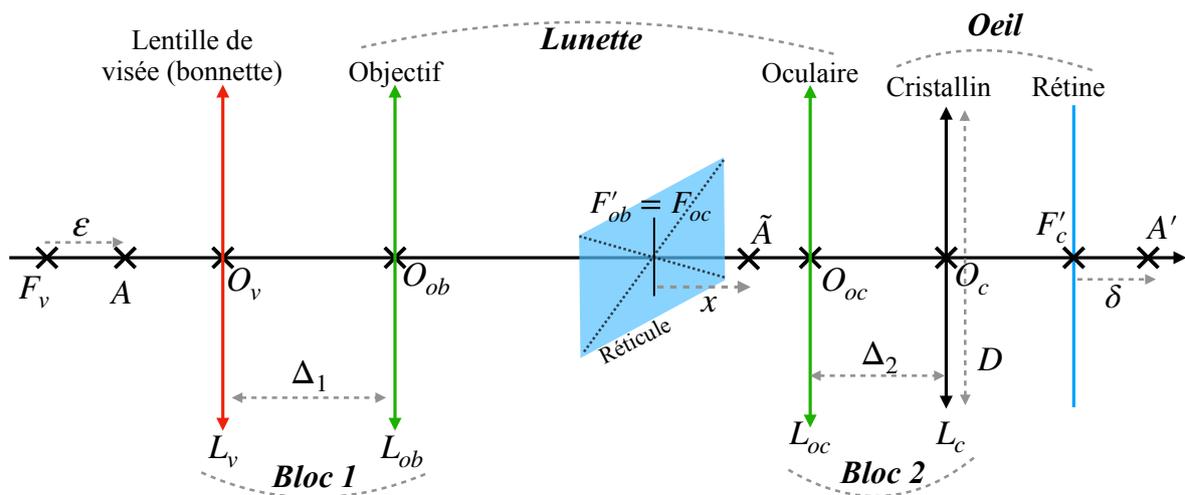


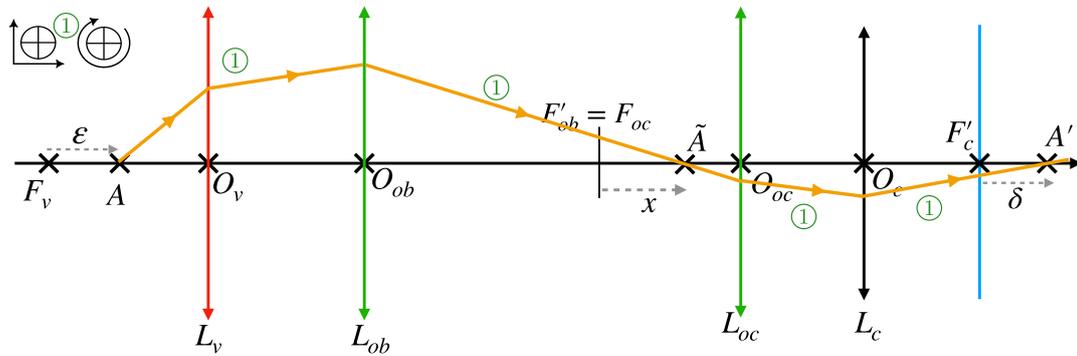
FIGURE D1.9

On remarque qu'il est possible de regrouper la lentille de visée et l'objectif d'un part, puis l'oculaire et le cristallin d'autre part, afin d'obtenir deux blocs similaires. On note \tilde{A} l'image de A par le premier bloc, puis A' , l'image de \tilde{A} par le second.

- /8 9 Reproduire le schéma du viseur amélioré en y plaçant un rayon issu de A , et qui après déviations (approximatives mais physiquement cohérentes) par les lentilles, passe par les points \tilde{A} et A' . En déduire la valeur de δ lorsque $\varepsilon = 0$.

Réponse

Les points \tilde{A} et A' étant déjà placés, on se contente alors d'un tracé approximatif, qui passe par les points souhaités. On remarque toutefois qu'avant de franchir la première lentille des deux blocs, les rayons viennent d'un objet situé après le foyer objet, il vont donc ressortir de manière légèrement divergente, en accord avec ce qui a été observé dans la partie précédente.



On remarque que lorsque $\varepsilon = 0$, l'image intermédiaire \tilde{A} est au foyer objet de l'oculaire ①, ce qui renvoie une image à l'infini que l'œil voit net sans accommoder, c'est-à-dire $F'_c = A'$ ① : on en déduit que $\delta = 0$ ①.

- /4 ⑩ Expliquer, par analogie avec la situation précédente, le rôle de x pour le bloc 1 d'une part et pour le bloc 2 d'autre part. Sans refaire de longs calculs, et en appliquant judicieusement le résultat de l'Équation (D1.1) (côté gauche), établir alors la nouvelle relation entre ε et δ .

Réponse

Il convient ici d'adapter le résultat proposé à chaque bloc de lentilles. On obtient alors pour le viseur amélioré : x joue le rôle de δ pour le bloc 1, mais le rôle de ε pour le bloc 2 ①. Ainsi :

$$\delta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \left(\frac{f'_c}{f'_{oc}} \right)^2 x \quad \text{et} \quad x \stackrel{\textcircled{1}}{=} \left(\frac{f'_{ob}}{f'_v} \right)^2 \varepsilon \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \left(\frac{f'_c}{f'_{oc}} \right)^2 \cdot \left(\frac{f'_{ob}}{f'_v} \right)^2 \varepsilon}$$

- /3 ⑪ En déduire la nouvelle expression pour la profondeur de champ P' en fonction de d_{\max} , D et des quatre distances focales.

Réponse

On obtient encore une fois l'expression de ε_{\max} pour $d = d_{\max}$ d'abord, puis la profondeur de champ en prenant $P' = 2\varepsilon_{\max}$ ensuite, d'où :

$$d_{\max} \stackrel{\textcircled{1}}{=} D \cdot \frac{\delta}{f'_c} \Leftrightarrow \varepsilon_{\max} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{d_{\max}}{D} f'_c \cdot \left(\frac{f'_{oc}}{f'_c} \right)^2 \cdot \left(\frac{f'_v}{f'_{ob}} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P' = 2\varepsilon_{\max} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2 \frac{d_{\max}}{D} f'_c \cdot \left(\frac{f'_{oc}}{f'_c} \right)^2 \cdot \left(\frac{f'_v}{f'_{ob}} \right)^2}$$

- /6 ⑫ Démontrer enfin que la nouvelle profondeur de champ P' peut s'écrire en fonction de l'ancienne selon :

$$P' = P \left(\frac{f'_{oc}}{f'_{ob}} \right)^2$$

Réaliser ensuite l'application numérique. Les lentilles utilisées pour la lunette ont pour distances focales $f'_{oc} \approx 18 \text{ mm}$ et $f'_{ob} \approx 180 \text{ mm}$. Conclure quant à l'intérêt du viseur à frontale fixe.

Réponse

On obtient en réorganisant les termes :

$$P' \stackrel{\textcircled{1}}{=} \underbrace{2 \frac{d_{\max}}{D} \frac{f'_v}{f'_c}}_{=P} \cdot \left(\frac{f'_{oc}}{f'_{ob}} \right)^2 \Leftrightarrow \boxed{P' \stackrel{\textcircled{1}}{=} P \left(\frac{f'_{oc}}{f'_{ob}} \right)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = 12 \text{ mm} \\ f'_{oc} = 18 \text{ mm} \\ f'_{ob} = 180 \text{ mm} \end{cases}$$

A.N. : $P' \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} 0,12 \text{ mm}$

soit 0,06% de la distance de visée ① : une amélioration d'un facteur 100 que le viseur élémentaire ①. La précision d'un tel viseur permet donc d'effectuer des mesures de distances (possiblement avec des objets ou images virtuelles) de manière très précise. ①