

Équations différentielles en sciences physiques

Sommaire

I Introduction	1
II Résolution d'EDLHC (sans second membre)	2
II/A Premier ordre	2
II/B Second ordre harmonique	3
II/C Second ordre amorti	3
III Résolution d'EDLC (avec second membre constant)	5
III/A EDLC d'ordre 1	5
III/B EDLC d'ordre 2	6
IV Conclusion : méthode de résolution ordre 1 et 2	6
V Complément : démonstrations	6
V/A Linéarité pour EDLH	6
V/B $y_h(t)$ pour $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$	7
VI Résolution d'EDLC en RSF	7
VI/A Définition	7
VI/B Réponse d'un système en RSF	7
VI/C En pratique	8

I Introduction

Définition F7.1 : Équation différentielle linéaire

Une équation différentielle (notée ED dans la suite) sur la fonction $y(t)$ est une équation liant $y(t)$ à ses **dérivées**. Elle est dite *linéaire* (notée donc EDL dans la suite) si elle peut s'écrire comme :

$$f_0(t) \cdot y(t) + f_1(t) \cdot \frac{dy}{dt} \Big|_t + \dots + f_N(t) \cdot \frac{d^N y}{dt^N} \Big|_t = g(t) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^N f_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} \Big|_t = g(t)$$

Avec $f_{i \in [1, N]}(t)$ et $g(t)$ des fonctions dépendantes de la variable t (qui n'est pas *forcément* le temps).

Exemple F7.1 : ED linéaire ou non-linéaire

Avec $f_0(t) = t$, $f_1(t) = 1$ et $f_{i \geq 2}(t) = 0$ d'une part, et $g(t) = A$ d'autre part, on obtient :

$$t \cdot y(t) + \frac{dy}{dt} \Big|_t = A$$

Non-linéaire

$$\underbrace{4y^2(t)}_{\text{non-linéaire}} + \frac{dy}{dt} \Big|_t = 0 \quad \text{ou} \quad 4y(t) + \underbrace{y(t) \cdot \frac{dy}{dt} \Big|_t}_{\text{non-linéaire}} = 0$$

Dans la pratique, on rencontrera des équations différentielles particulières en sciences physiques, caractérisées par :

- ◇ **Leur ordre** : c'est le rang maximum de la dérivation portant sur $y(t)$. Cette année, on s'intéresse à des équations d'ordre 1 et 2 seulement.
- ◇ **Leurs coefficients** : les $f_i(t)$ sont des fonctions, mais la plupart du temps ce seront des constantes. On dit alors que l'équation différentielle est à *coefficients constants* (notée EDC dans la suite).
- ◇ **Leur second membre** : dans l'écriture d'une ED, on met tous les termes qui dépendent de y à gauche du signe « = », et tout le reste à droite, c'est le $g(t)$ de la définition. On l'appelle *second membre*.

Définition F7.2 : Équation homogène

On appelle **équation homogène** une équation différentielle **sans second membre** : $g(t) = 0$

$$\sum_i f_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} \Big|_t = \boxed{0}$$

♥ Propriété F7.1 : Linéarité pour une EDL homogène

Soient y_1 et y_2 deux solutions d'une même EDL homogène (notée EDLH dans la suite). Alors, toute combinaison de ces deux solutions est également solution de l'EDLH :

$$\forall (y_1, y_2) \text{ solutions d'une EDLH} \Rightarrow \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \text{ est solution de l'EDLH}$$

Important F7.1 : Solution générale avec second membre

Pour une EDL avec second membre (non homogène), *une* **solution générale** s'obtient par somme de la **solution homogène** y_h et d'une **solution particulière** y_p :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

On cherche toujours une **solution particulière de la même forme que le second membre**.

Attention F7.1 : Solution générale

- 1) Ici, c'est bien la **somme** de y_h et y_p qui est solution, et pas toute autre combinaison $\alpha_1 y_h + \alpha_2 y_p$.
- 2) Avec ceci, on obtient **une** solution de l'EDL, pas **la** solution. Pour obtenir l'**unique** solution, on aura besoin de **condition initiales**.

II Résolution d'EDLHC (sans second membre)

II/A Premier ordre

Définition F7.3 : Équation homogène d'ordre 1

On s'intéresse à une EDLHC (Équation Différentielle Linéaire Homogène à coefficients Constants) d'ordre 1. Avec $\tau \in \mathbb{R}$ une constante homogène à t , elle peut se mettre sous la forme :

$$\left. \frac{dy_h}{dt} \right|_t + \frac{1}{\tau} y_h(t) = 0 \quad (\text{F7.1})$$

Notation F7.1 : Constante de temps

Si t désigne bien le temps, comme souvent en physique, alors par rapide analyse d'homogénéité, τ s'exprime en secondes et s'appelle la **constante de temps**.

♥ Outils F7.1 : Méthode de résolution pour EDLHC d'ordre 1

Les **fonctions exponentielles** sont clés pour les ED : on injecte $y_h(t) = Ke^{rt}$, $K \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{C}$, dans (F7.1) :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy_h}{dt} \right|_t + \frac{1}{\tau} y_h(t) &= 0 \\ \Rightarrow r \cdot Ke^{rt} + \frac{Ke^{rt}}{\tau} &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= -\frac{1}{\tau} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} y_h(t) = Ke^{rt} \\ \text{On simplifie} \end{array} \right\}$$

Notation F7.2 : Polynôme caractéristique

L'équation portant sur la variable r s'appelle le **polynôme caractéristique**. Dans le cas précédent, c'est un polynôme de degré 1, donc la solution est évidente. Dans la suite, on aura un polynôme de degré 2.

Important F7.2 : Solution d'EDLHC d'ordre 1

La solution **générale** de (F7.1) s'écrit, avec $K \in \mathbb{R}$ la constante d'intégration :

$$y_h(t) = Ke^{-t/\tau}$$

On obtient **la** solution à l'aide des **conditions initiales** (notées CI dans la suite) du système, qui fixeront K .

II/B Second ordre harmonique

Définition F7.4 : Équation homogène d'ordre 2 harmonique

Soit une EDLHC d'ordre 2. On l'appelle **harmonique** si elle ne contient **pas de terme d'ordre 1**, seulement 0 et 2. Elle peut se mettre sous la forme suivante, avec $(\omega_0, Q) \in \mathbb{R}^2$ des constantes :

$$\left. \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right|_t + \omega_0^2 y_h(t) = 0 \quad (\text{F7.2})$$

Notation F7.3 : Pulsation propre

Si t désigne bien le temps, alors ω_0 est l'**inverse** d'un temps et s'appelle la **pulsation propre**, en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$;

♥ Outils F7.2 : Méthode pour EDLHC d'ordre 2 harmonique

Pour résoudre (F7.2), on injecte $y_h(t) = Ke^{rt}$, on retrouve le **polynôme caractéristique** et on résout pour r :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right|_t + \omega_0^2 y_h(t) &= 0 \\ \Rightarrow r^2 \times Ke^{rt} + \omega_0^2 Ke^{rt} &= 0 & \left. \begin{array}{l} y_h(t) = Ke^{rt} \\ \text{On simplifie} \\ (\cdot)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow r^2 = -\omega_0^2 & \\ \Leftrightarrow \boxed{r_{\pm} = \pm j\omega_0} & \end{aligned}$$

Important F7.3 : EDLHC d'ordre 2 harmonique

La solution **générale** de (F7.2) est la **somme** des deux fonctions générales correspondant chacune à une **solution** de $r_{\pm}$, avec une constante K différente pour **chaque choix** (par linéarité, propriété 7.1).

Avec $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$ des constantes d'intégrations :

$$y_h(t) = K_1 e^{r_+ t} + K_2 e^{r_- t} \Leftrightarrow y_h(t) = K_1 e^{j\omega_0 t} + K_2 e^{-j\omega_0 t}$$

Or, les exponentielles complexes peuvent être exprimées en fonctions cosinus et sinus. Par une astuce mathématique pour trouver un **résultat réel** (voir la Section V/B), on obtient enfin la forme de solution générale :

$$\boxed{y_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{reliées à } (K_1, K_2)$$

II/C Second ordre amorti

Propriété F7.2 : Équation homogène d'ordre 2 amortie

Soit une EDLHC d'ordre 2. Elle peut se mettre sous la forme suivante, avec $(\omega_0, Q) \in \mathbb{R}^2$ des constantes :

$$\left. \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right|_t + \frac{\omega_0}{Q} \left. \frac{dy_h}{dt} \right|_t + \omega_0^2 y_h(t) = 0 \quad (\text{F7.3})$$

Notation F7.4 : Pulsation propre et facteur de qualité

◇ ω_0 est toujours l'inverse d'un temps et s'appelle la **pulsation propre**, exprimée en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$;

◇ Q est **adimensionné** et s'appelle le **facteur de qualité**.

♥ Outils F7.3 : Méthode pour EDLHC d'ordre 2 amorti

Pour résoudre (F7.3), on injecte $y_h(t) = Ke^{rt}$, on obtient le **polynôme caractéristique** et on résout :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right|_t + \frac{\omega_0}{Q} \left. \frac{dy_h}{dt} \right|_t + \omega_0^2 y_h(t) &= 0 \\ \Rightarrow r^2 \cdot Ke^{rt} + \frac{\omega_0}{Q} r \cdot Ke^{rt} + \omega_0^2 \cdot Ke^{rt} &= 0 & \left. \begin{array}{l} y_h(t) = Ke^{rt} \\ \text{On simplifie} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F7.4})$$

dont le discriminant Δ s'écrit $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$ d'où les 3 cas suivants :

II/C) 1 $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$: régime apériodique

Important F7.4 : EDLHC d'ordre 2 avec $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$

Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$, alors (F7.4) a deux racines réelles :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \Leftrightarrow \boxed{r_{\pm} = \frac{1}{\tau} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right)} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

et la solution **générale** de (F7.3) s'écrit, par linéarité (Pté. 7.1) et avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ les constantes d'intégrations :

$$\boxed{y_h(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}}$$

II/C) 2 $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$: régime critique

Important F7.5 : EDLHC d'ordre 2 avec $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$

Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$, alors (F7.4) a une racine réelle double :

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

et la solution **générale** de (F7.3) s'écrit, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ les constantes d'intégrations :

$$\boxed{y_h(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}}$$

II/C) 3 $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$: régime pseudo-périodique

Important F7.6 : EDLHC d'ordre 2 avec $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$

Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$, alors (F7.4) a deux racines complexes conjuguées :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \Leftrightarrow \boxed{r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \\ \Omega = \frac{1}{\tau} \sqrt{4Q^2 - 1} \end{cases}$$

et la solution **générale** de (F7.3) s'écrit, par linéarité (Pté. 7.1) et avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ les constantes d'intégrations :

$$\boxed{y_h(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}$$

Interprétation F7.1 : Solution amortie par intuition

La solution du polynôme caractéristique s'écrit alors comme la **somme de la solution d'ordre 1 et de la solution harmonique**, mais de **pulsation différente** :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega \equiv \ll -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_0 \gg \quad \text{soit} \quad \boxed{r_{\pm} = r_{\text{ordre 1}} + r_{\text{ordre 2 harmonique}}}$$

Ceci n'est pas très étonnant puisque l'EDLHC d'ordre 2 amortie est la somme d'une EDLHC d'ordre 2 harmonique et d'une EDLHC d'ordre 1. Avec les propriétés de l'exponentielle ($e^{a+b} = e^a e^b$), il est donc naturel que la solution amortie soit le **produit** des solutions d'ordre 1 et d'ordre 2 :

$$y_h(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\equiv e^{-t/\tau}} \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}_{\equiv A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)}$$

soit

$$\boxed{y_h(t) = y_{h,\text{ordre 1}} \cdot y_{h,\text{ordre 2 harmonique}}}$$

Attention F7.2 : Pulsation amortie vs. pulsation propre

Pour une EDLHC amortie, dans le cas pseudo-périodique la pulsation n'est plus égale à la pulsation propre :

$$\Omega \neq \omega_0$$

II/C) 4 Cas particulier : $Q \rightarrow +\infty$ **Implication F7.1 : Amorti idéal**

Si $Q \rightarrow +\infty$, alors l'Équation (F7.3) se simplifie en :

$$\left. \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right|_t + \omega_0^2 y_h(t) = 0$$

Et on retrouve la solution harmonique. Elle correspond alors avec la solution amortie pour $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$ avec $Q \rightarrow +\infty$, soit

$$y_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

III Résolution d'EDLC (avec second membre constant)

Comme introduit dans la première section, une EDL se résout en prenant la somme de $y_h(t)$ et de y_p . Ça n'en donne cependant pas la solution, mais une famille de solutions. Pour que la solution représente le système étudiée, il faut trouver les valeurs des constantes d'intégrations. On s'intéresse ici aux EDLC avec second membre constant.

♥ Outils F7.4 : Solution particulière pour une EDLC à second membre constant

Dans le cas où $f_i(t) = a_i$ et $g(t) = b$ avec a_i et b des constantes, on cherche $y_p = \lambda$ également une constante.

$$\sum_i f_i(t) \left. \frac{d^i y_p}{dt^i} \right|_t = b \Leftrightarrow a_0 \lambda + \underbrace{\sum_{i \geq 1} f_i(t) \frac{d^i \lambda}{dt^i}}_{=0} = b \Leftrightarrow y_p = \lambda = \frac{b}{a_0}$$

Rien de cette section n'est à retenir par cœur ! Seule la **méthode** est à comprendre.

Attention F7.3 : Constantes d'intégration

La détermination des constantes d'intégrations se fait bien sur la **solution générale**, pas uniquement sur l'équation homogène !

Toute tentative de détermination de constantes d'une EDLC sur y_h et non sur y causera la mort instantanée d'un innocent et mignon petit chaton.

III/A EDLC d'ordre 1

Soit une EDLC dont le second membre vaut y_{eq} , une constante connue, solution d'équilibre du système.

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_t + \frac{1}{\tau} y(t) = \frac{1}{\tau} y_{eq} \quad (F7.5)$$

On obtient $y_p = y_{eq}$ une solution particulière constante, et donc la solution générale de (F7.5) :

$$y(t) = y_h(t) + y_p \Leftrightarrow y(t) = A e^{-t/\tau} + y_{eq}$$

La solution s'obtient en étudiant cette forme de solution à un temps donné, où l'on connaît la valeur que doit prendre la solution : c'est une **condition initiale**. Typiquement, on suppose que $y(0) = y_0$ une valeur connue. Alors, la solution est telle que

$$y(0) = y_0 = A e^0 + y_{eq} \Leftrightarrow A = y_0 - y_{eq}$$

ainsi,

$$y(t) = (y_0 - y_{eq}) e^{-t/\tau} + y_{eq} = y_{eq} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) + y_0 e^{-t/\tau}$$

Remarque F7.1 : Changements de variable

Une manière de tenir compte d'un second membre constant est de réaliser un changement de variable pour se ramener à une EDLH. Effectivement, $y_h(t) = y(t) - y_{eq} \Rightarrow \frac{dy_h}{dt} = \frac{dy}{dt}$ est aussi solution de l'équation homogène :

$$\left. \frac{dy_h}{dt} \right|_t + \frac{1}{\tau} y_h(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_t + \frac{1}{\tau} (y(t) - y_{eq}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_t + \frac{1}{\tau} y(t) = \frac{1}{\tau} y_{eq}$$

Si la condition initiale est en $t_0 \neq 0$, on peut aussi se ramener à un temps initial nul en posant $t' = t - t_0$.

III/B EDLC d'ordre 2

Soit une EDLC dont le second membre vaut y_{eq} , une constante connue.

$$\frac{d^2 y_h(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy_h(t)}{dt} + \omega_0^2 y_h(t) = \omega_0^2 y_{eq} \quad (\text{F7.6})$$

On obtient $y_p = y_{eq}$ une solution particulière constante. Supposons $Q > 1/2 \Leftrightarrow \Delta < 0$: la solution générale de (F7.6) s'écrit

$$y(t) = y_h(t) + y_p \Leftrightarrow y(t) = y_{eq} + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

Les deux valeurs à déterminer pour connaître la solution sont A et B , les constantes d'intégrations. Il faut **2 conditions** initiales pour connaître les deux constantes ; soit $y(0) = y_0$ et $\left. \frac{dy}{dt} \right|_0 = v_0$. On obtient

$$\begin{aligned} y(0) = y_0 = y_{eq} + A \quad \text{et} \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_0 = v_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}A + B\Omega \\ \Leftrightarrow A = y_0 - y_{eq} \quad \text{et} \quad B = \frac{v_0}{\Omega} + \frac{\omega_0}{2Q} \frac{y_0 - y_{eq}}{\Omega} \end{aligned}$$

D'où la solution

$$y(t) = y_{eq} + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \left[(y_0 - y_{eq}) \cos(\Omega t) + \left(\frac{v_0}{\Omega} + \frac{\omega_0}{2Q} \frac{y_0 - y_{eq}}{\Omega} \right) \sin(\Omega t) \right]$$

IV Conclusion : méthode de résolution ordre 1 et 2**Important F7.7 : Résolution EDLC second membre constant**

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants et second membre constant :

- 1 On recherche une **solution particulière constante de l'équation générale**, de la forme $y_p = \lambda$.
- 2 On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.
- 3 On **injecte la forme générique** $y_h(t) = Ke^{rt}$, $K \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{C}$ dans l'équation homogène.
- 4 On trouve et résout le **polynôme caractéristique**.
- 5 On écrit alors la **forme homogène** $y_h(t)$.
- 6 On écrit la **solution générale**, somme de la forme homogène et de la solution particulière : $y(t) = y_h(t) + y_p$
- 7 On détermine la/les constante(s) à l'aide des **conditions initiales**.
- 8 Conclusion.

V Complément : démonstrations**V/A Linéarité pour EDLH**

Soit une EDLH

$$\sum_i f_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} \Big|_t = 0$$

Alors, si

$$\sum_i f_i(t) \frac{d^i y_1}{dt^i} \Big|_t = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i f_i(t) \frac{d^i y_2}{dt^i} \Big|_t = 0$$

on a par linéarité de l'EDHL et de la dérivée

$$\sum_i f_i(t) \left. \frac{d^i(y_1 + y_2)}{dt^i} \right|_t = \sum_i f_i(t) \left. \frac{d^i y_1}{dt^i} \right|_t + \sum_i f_i(t) \left. \frac{d^i y_2}{dt^i} \right|_t = 0 \quad \blacksquare$$

V/B $y_h(t)$ pour $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$

En effet, avec ces deux solutions on trouve

$$y_+(t) = e^{(-\frac{1}{\tau} + j\Omega)t} \quad \text{et} \quad y_-(t) = e^{(-\frac{1}{\tau} - j\Omega)t}$$

Pour avoir des solutions réelles, on utilise la formule d'EULER :

$$e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$$

Ainsi,

$$y_+(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} e^{j\Omega t} = e^{-\frac{t}{\tau}} (\cos(\Omega t) + j \sin(\Omega t))$$

$$\text{et } y_-(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-j\Omega t} = e^{-\frac{t}{\tau}} (\cos(\Omega t) - j \sin(\Omega t))$$

Ce qui ne rend pas encore les solutions réelles, mais on peut les combiner par linéarité. Par exemple,

$$y_c = \frac{y_+ + y_-}{2} = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{2} (\cos(\Omega t) + j \sin(\Omega t) + \cos(\Omega t) - j \sin(\Omega t)) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\Omega t)$$

$$\text{et } y_s = \frac{y_+ - y_-}{2j} = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{2j} (\cos(\Omega t) + j \sin(\Omega t) - \cos(\Omega t) + j \sin(\Omega t)) = e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega t)$$

D'où une forme réelle et pratique pour $y_h(t) = Ay_c + By_s$, c'est-à-dire

$$y_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\Omega t) + Be^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega t) \Leftrightarrow y_h(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \quad \blacksquare$$

VI Résolution d'EDLC en RSF

VI/A Définition

Définition F7.6 : Régimes de forçages

- ◇ Libre : $\sum_i f_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} = \underset{\text{libre}}{0}$
- ◇ Forçage constant : $\sum_i f_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} = \underset{\text{forçage cst.}}{K}$
- ◇ Forçage sinusoïdal : $\sum_i f_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} = F(t) = \underset{\text{forçage sinusoïdal}}{F_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}$

Rappel F7.1 : Réponses système amorti

Avec ce qu'on a vu précédemment pour les systèmes amortis, on sait que :

- ◇ Libre : $y_{\text{libre}}(t) = y_h(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$
- ◇ Forçage constant : $y_{\text{forcé}}(t) = y_h(t) + y_p \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_p \quad y_p = \text{cte, même forme que forçage.}$

VI/B Réponse d'un système en RSF

♥ Propriété F7.3 : Système amorti en RSF

Pour un système amorti soumis à un forçage sinusoïdal, on cherche une solution particulière $y_p(t)$ de la même forme que le forçage, telle que :

- ◇ Forçage sinusoïdal : $y_{\text{forcé}}(t) = y_h(t) + y_p(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_p(t) \quad \text{avec } y_p(t) = Y_0 \cos(\omega t + \varphi)$



Définition F7.7 : Régime sinusoïdal forcé, régimes permanents

Ainsi, concrètement on appelle **régime sinusoïdal forcé** (RSF) le **régime permanent** d'un système amorti soumis à une **entrée sinusoïdale**.

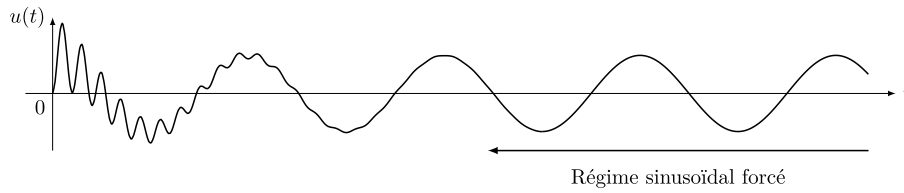


FIGURE F7.1 – Exemple d'un signal en RSF.

- ◇ On est en **régime transitoire** tant que $y_h(t)$ n'est **pas négligeable** devant $y_p(t)$.
- ◇ Une fois l'**amortissement terminé**, quand $y_{\text{forcé}}(t) = y_p(t)$, on est en **régime permanent**.
- ◇ Précédemment, on avait un forçage constant, soit $\omega = 0 \Leftrightarrow f = 0 \Rightarrow F(\text{t})$; c'est ce qu'on appelle le **régime permanent continu**.
- ◇ Dorénavant, on étudie un **régime permanent variable**.

Important F7.8 : Inconnues en RSF

En RSF, on ne s'intéresse donc **qu'à la solution particulière** : on veut donc **déterminer** Y_0 et φ .

Attention F7.4 : Grandeurs à déterminer

Dans le cas du **régime libre**, une solution $y_h(t)$ fait intervenir une ou plusieurs **constantes d'intégration**, que l'on détermine avec les **conditions initiales**.

En revanche, comme précédemment, les **constantes de** $y_p(t)$, ici Y_0 et φ , dépendent des **paramètres du système**, pas des conditions initiales! En électricité, ça sera $R, L, C, E_0, \omega \dots$

VI/C En pratique

♥ Outils F7.5 : Résolution en RSF

On **passe en complexes** : $\underline{y}(t) = \underline{Y}e^{j\omega t}$ avec $\underline{Y} = Y_0 e^{j\varphi} \Rightarrow \begin{cases} Y_0 = |\underline{Y}| \\ \varphi = \arg(\underline{Y}) \end{cases}$

Ce qui permet de passer d'une équation différentielle à une équation algébrique, bien plus simple à résoudre car :

Dérivée

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(\underline{Y}e^{j\omega t})}{dt} = j\omega \cdot \underline{Y}e^{j\omega t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = j\omega \underline{y}(t)}$$

Primitive

$$\int \underline{y}(t) dt = \int \underline{Y}e^{j\omega t} dt = \frac{\underline{Y}e^{j\omega t}}{j\omega} \Leftrightarrow \boxed{\int \underline{y}(t) dt = \frac{\underline{y}(t)}{j\omega}}$$

La suite étant algébrique, ceci conclue cette fiche sur les équations différentielles. Pour des exemples de résolution en RSF, voir les cours concernés.