Électrocinétique – chapitre 2

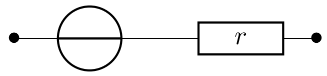
Correction du TD d'application

I Circuit simple

On constitue un circuit électrique avec un générateur réel de tension (E,r), entre les bornes duquel on branche une résistance R réglable.

Données

Générateur <u>réel</u> (E,r) de tension :



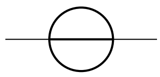
1 Faire un schéma normalisé du circuit.

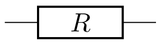
Réponse

Résultat attendu

On demande un schéma <u>normalisé</u>, autrement dit avec les conventions de schémas *européennes.*

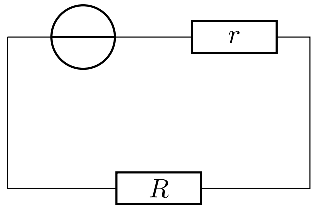
Outils

Générateur : 

Résistance : 

Application

On obtient :

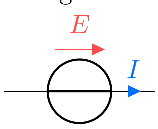


2 Flécher les tensions et intensités, en respectant la convention pour chacun.

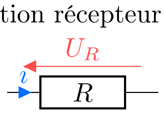
Réponse

Outils

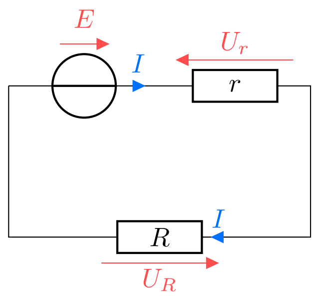
Générateur convention générateur :



Résistance convention récepteur :



Application



3 Déterminer l'expression de l'intensité du courant qui circule dans le circuit.

Réponse

Résultat attendu

À partir d'un circuit où on considère E, r et R comme des grandeurs connues, on cherche l'intensité I qui parcourt la maille que l'on vient de tracer.

Remarque

Il y a deux outils qui seront utiles pour déterminer des grandeurs dans des circuits : la **loi des mailles** et la **loi des nœuds**. À cela se rajoute la **loi d'Ohm** qui relie tension et intensité dans une résistance. Ces notions seront vues dans le chapitre suivant et donc décrites ultérieurement, on va ici utiliser la composition des tensions.

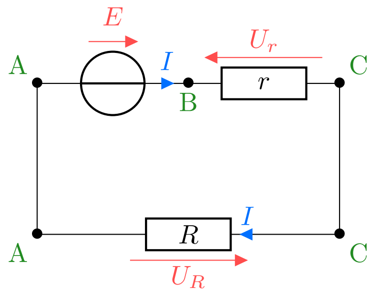
Outil

En nommant des points d'intérêt du circuit, ce qui est souvent conseillé, on va pouvoir utiliser la composition $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$ en respectant le sens des tensions pour obtenir une information supplémentaire sur le circuit.

On rappelle que deux points sur un fil sont au même potentiel, et on peut donc les nommer de la même manière.

Application

Schéma



Calcul

Ici on peut écrire

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = U_{AA}$$
$$\Leftrightarrow -E + U_r + U_R = 0$$

et avec la **loi d'Ohm**, i.e. $U_r = rI$ et $U_R = RI$:

$$(r+R)I = E$$

soit

$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

4 Déterminer l'expression de la puissance reçue par la résistance.

Réponse

Outil

Pour un récepteur de tension U traversé par l'intensité I en convention récepteur, la puissance reçue est $\boxed{\mathcal{P} = UI}$.

Application

Ici, la tension aux bornes de R est $U_R = RI$, avec I l'intensité la traversant. On a donc

$$\boxed{\mathcal{P}_R = RI^2 = \frac{RE^2}{(r+R)^2}}$$

5 Tracer la courbe de $\mathcal{P}$ en fonction de R, et montrer que cette courbe passe par un maximum. Déterminer les coordonnées du maximum.

Réponse

Résultat attendu

On cherche à faire une étude de la fonction $\mathcal{P}$ de variable R, comme on ferait l'étude de $f(x)$ en mathématiques.

Outils

Bon sens pour l'allure de la courbe, procédés de dérivation pour le maximum. D'une manière générale, on a besoin de :

- Dérivation d'un produit :

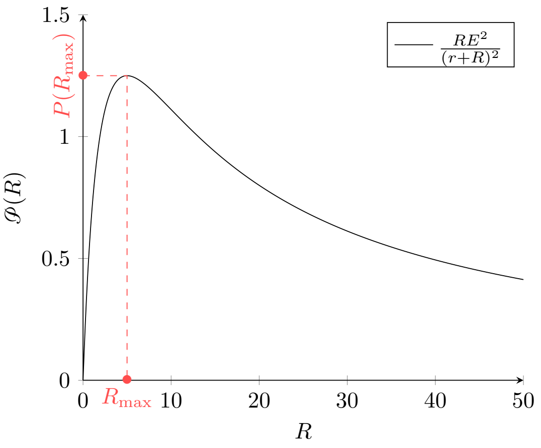
$$\boxed{D[uv] = u'v + v'u}$$

- Dérivation d'une fonction u élevée à une puissance α :

$$\boxed{D[u^\alpha] = \alpha u' u^{\alpha-1}}$$

Application

Tracé



Calcul

Soit

◇ $v(R) = RE^2 \Longrightarrow v'(R) = E^2$

◇ $u(R) = r + R \Longrightarrow u'(R) = 1$

Ainsi

$$u(R)^{-2} = \frac{1}{(r+R)^2} \Rightarrow D[u(R)^{-2}] = \frac{-2 \times 1}{(r+R)^3}$$

Et donc,

$$\mathscr{P}'(R) = \frac{-2E^2}{(r+R)^3} \cdot R + 1E^2 \cdot \frac{1}{(r+R)^2}$$
$$\mathscr{P}'(R) = \frac{-2E^2R}{(r+R)^3} + \frac{(r+R)E^2}{(r+R)^3}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathscr{P}'(R) = \frac{(r-R)E^2}{(r+R)^3}}$$

Et donc

$$\mathscr{P}'(R_{max}) = 0 \Longrightarrow \boxed{R_{max} = r}$$

Avec

$$\boxed{\mathscr{P}(R_{max}) = \frac{E^2}{4r}}$$

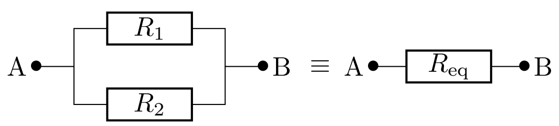
◇

II Résistances équivalentes

1 Exprimer la résistance équivalente à l'association de deux résistances R_1 et R_2 placées en parallèle.

Réponse

Résultat attendu



Outil

L'association en parallèle de deux résistances R_1 et R_2 donne une résistance équivalente R_{eq} telle que :

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Attention !

Faites particulièrement attention à bien écrire $\frac{1}{R_{eq}}$ et non pas simplement R_{eq}, même après 5 lignes de calcul quand c'est nécessaire. Pensez toujours à vérifier l'homogénéité d'un résultat littéral avant de l'encadrer. Cette erreur est une des plus communes.

Application

En mettant les deux termes sur même dénominateur :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} \times \frac{R_2}{R_2} + \frac{1}{R_2} \times \frac{R_1}{R_1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}$$
$$\Leftrightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

◇

2 Que devient cette expression si $R_1 = R_2$?

Réponse

Application

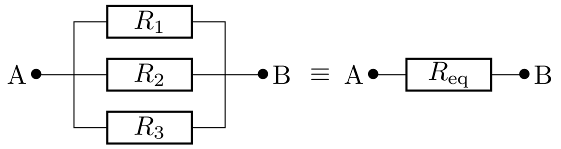
$$R_1 = R_2 = R \Longrightarrow \boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R}{2}}$$

---

3 Exprimer la résistance équivalente à l'association des résistances R_1, R_2 et R_3 placées en parallèle.

Réponse

Résultat attendu



Outil

L'association en parallèle de trois résistances R_1, R_2 et R_3 donne une résistance équivalente R_{eq} telle que :

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Application

De la même manière que précédemment, la mise sous même dénominateur donne :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{R_2R_3}{R_1R_2R_3} + \frac{R_1R_3}{R_1R_2R_3} + \frac{R_1R_2}{R_1R_2R_3} \Leftrightarrow R_{\text{eq}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

qui est bien homogène à une résistance étant de la forme $\dfrac{R^{\cancel{3}}}{\cancel{R^2}} = R$.

---

4 Que devient cette expression si $R_1 = R_2 = R_3$?

Réponse

Application

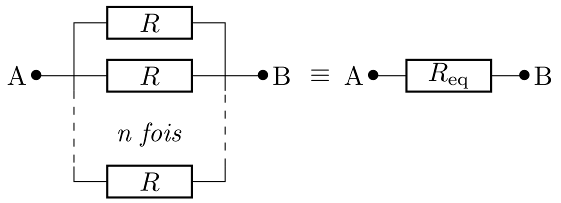
$$R_1 = R_2 = R_3 = R \Longrightarrow R_{\text{eq}} = \frac{R^3}{3R^2} \Leftrightarrow \boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R}{3}}$$

---

5 Exprimer la résistance équivalente à l'association de n résistances identiques placées en parallèle.

Réponse

Résultat attendu



Application

Il n'y a toujours qu'une seule formule attendue, et elle s'écrit :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \underbrace{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \cdots + \frac{1}{R}}_{n \text{ fois}} \Leftrightarrow \boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R}{n}}$$

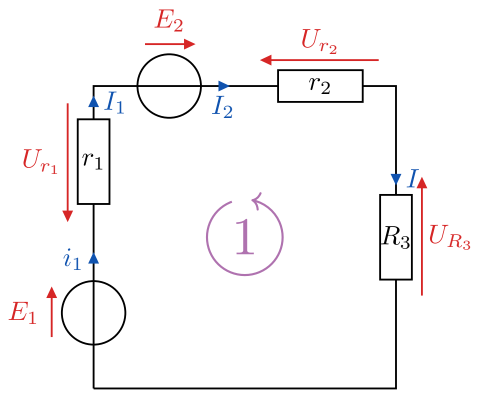
III Association de générateurs

Deux générateurs de tension de forces électromotrices E_1 et E_2 et de résistances internes r_1 et r_2 sont branchés en série. Ils alimentent une résistance R_3.

1 Dessiner le schéma normalisé de ce circuit électrique et flécher les courants et les tensions. Écrire alors l'équation de la maille et en déduire l'expression du courant qui circule dans cette maille.

Réponse

Schéma



Outil

Loi des mailles : la somme algébrique des tensions d'une maille est nulle (cf. exercice I). Pour l'appliquer, on se donne un sens de lecture d'une maille, ici dans le sens direct mais peu importe, puis on peut :

- ◇ Écrire les tensions traversées dans le même sens que leur flèche d'un côté du signe égal, les autres de l'autre côté ;
- ◇ Écrire les tensions traversées dans le même sens avec un « + » et les autres avec un « - », le tout devant « = 0 ».

Application

Étant donné qu'il n'y a qu'une maille, il ne peut y avoir qu'une seule intensité dans le circuit. On pose donc $I_1 = I_2 = I$, et en appliquant la loi des mailles on a

$$U_{R_3} + U_{r_2} - E_2 + U_{r_1} - E_1 = 0$$
$$\Leftrightarrow R_3 I + r_2 I + r_1 I = E_1 + E_2$$
$$\Leftrightarrow I\,(r_1 + r_2 + R_3) = E_1 + E_2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{I = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R_3}}$$

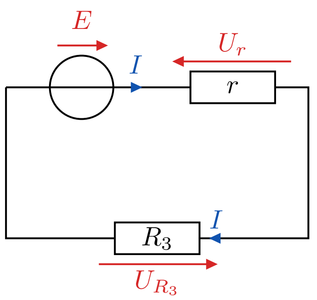
◇

2 Simplifier le schéma en ne faisant apparaître qu'un seul générateur équivalent aux deux générateurs initiaux aux bornes de R_3. Que devient le générateur équivalent lorsque r_1 et r_2 sont nulles ?

Réponse

Schéma simplifié

L'expression que l'on a trouvée est en tout point similaire à celle du premier exercice si on considère qu'on a un générateur de force électromagnétique $E = E_1 + E_2$ et de résistance interne $r = r_1 + r_2$; on peut donc dessiner :



Situation particulière

Quand r_1 et r_2 sont nulles, on se retrouve avec un générateur de résistance interne $r = 0$: c'est donc un générateur idéal.

◇

3 Conclusion à retenir : peut–on brancher deux générateurs idéaux de tension en série ? Deux générateurs réels ?

Réponse

Conclusion

L'étude théorique précédente ne présente aucune incohérence ou impossibilité de pratique peu importe la situation, si tant est que les générateurs sont branchés dans le même sens ; si ça n'est pas le cas l'un considère l'autre comme un récepteur et le fait surchauffer.

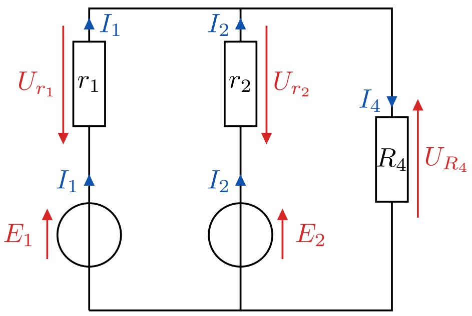
◇

Les deux générateurs (E_1, r_1) et (E_2, r_2) sont maintenant placés en parallèle. Ils alimentent une résistance R_4 (en parallèle sur l'ensemble des deux générateurs).

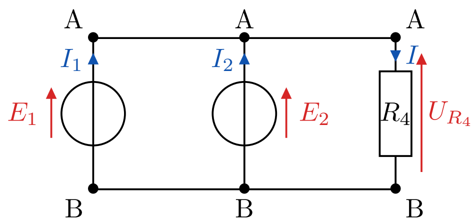
4 Dessiner le schéma normalisé de ce montage et flécher les courants et les tensions, puis reproduire le schéma avec des générateurs idéaux (donc r_1 et r_2 nulles) et flécher les courants et les tensions. Que peut-on dire de la tension aux bornes de R_4 ?

Réponse

Schéma



Générateurs idéaux



On doit trouver (avec l'unicité de la tension entre deux points, ici par exemple A et B) que $U_{R_4} = E_2 = E_1$.

5 Conclusion à retenir : peut–on brancher deux générateurs idéaux de tension en parallèle ? Deux générateurs réels ?

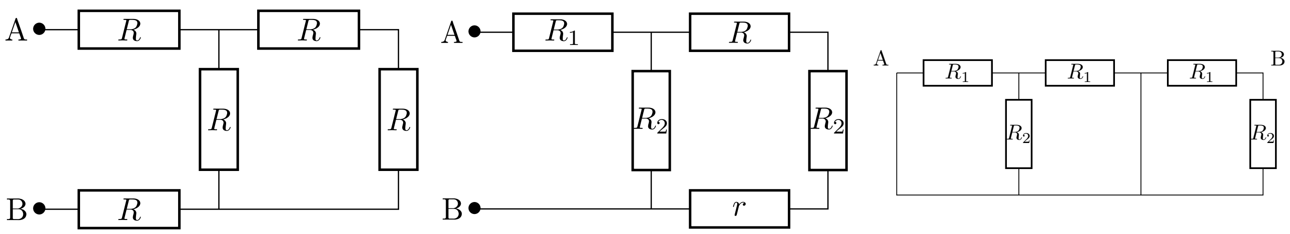
Réponse

Conclusion

On ne peut brancher des générateurs idéaux de tension en parallèle que si leurs tensions sont les mêmes ; les générateurs réels peuvent l'être et ce sont les intensités qui vont s'adapter pour suivre la loi des mailles ; dans tous les cas leurs **intensités se somment**.

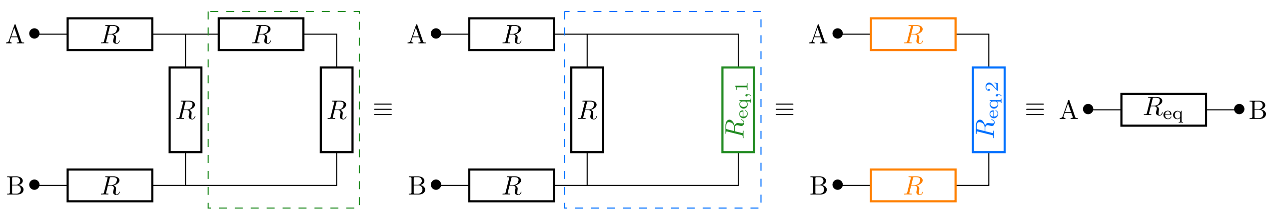
IV Calcul de résistances équivalentes

1 Exprimer la résistance équivalente entre les points A et B pour chacun des schémas suivants.



Réponse

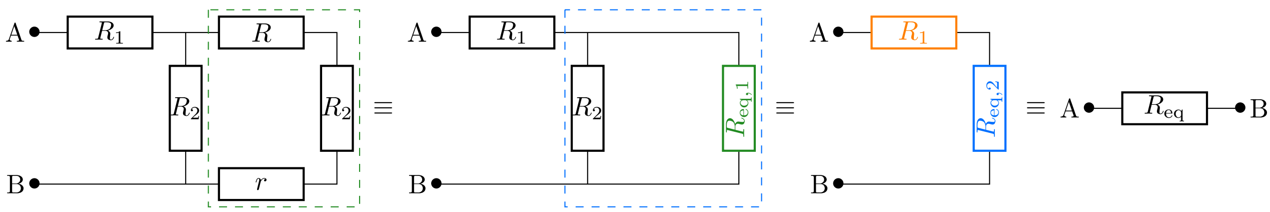
IV/A Schéma 1



La suite de schémas équivalents précédents donne :

$$
\begin{aligned}
& R_{\text{eq}} = R + R + R_{\text{eq},2} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = 2R + \frac{R \times R_{\text{eq},1}}{R + R_{\text{eq},1}} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = 2R + \frac{R \times 2R}{R + 2R} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = 2R + \frac{2R^{\cancel{2}}}{3\cancel{R}} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = \frac{8R}{3}
\end{aligned}
$$

IV/B Schéma 2

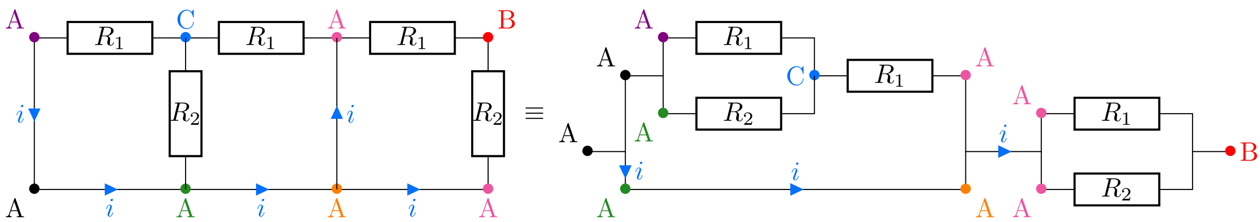


Et cette fois :

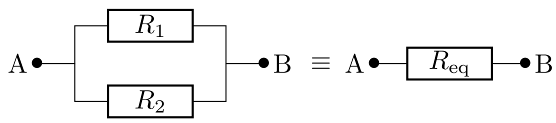
$$\begin{aligned}
& R_{\text{eq}} = R_1 + R_{\text{eq},2} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = R_1 + \frac{R_2 \times R_{\text{eq},1}}{R_2 + R_{\text{eq},1}} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = R_1 + \frac{R_2 \times (r + R + R_2)}{r + R + 2R_2}
\end{aligned}$$

IV/C Schéma 3

Ce schéma est un peu plus compliqué, mais la bonne pratique de nommer des points de potentiel sur un schéma aide à ne pas se perdre. En effet, étant donné que l'on nous demande de déterminer la résistance équivalente entre A et B, toute simplification du circuit est à faire. On a travaillé sur les associations de résistances mais il ne faut pas oublier, et donc savoir reconnaître, les potentiels court-circuits. Ici, en reportant le point A sur chaque point d'intérêt où il peut être reporté (c'est-à-dire s'il n'y a pas de dipôle entre les deux), on voit qu'un courant qui partirait de A pour aller à B (ce que fait un Ohmmètre) éviterait complètement les trois premières résistances. On peut redessiner le schéma différemment pour faire apparaître le court-circuit de manière plus explicite :



Ainsi, le circuit se simplifie en :

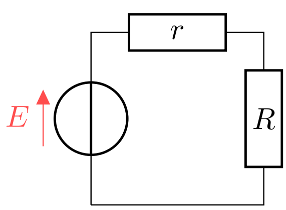


Soit

$$\boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

V Conventions et puissances

Pour le circuit ci-contre :



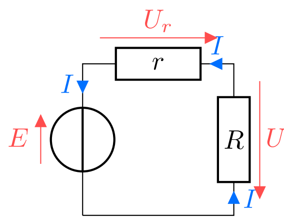
1 a – Flécher les courants et les tensions en convention récepteur pour chaque dipôle.

b – Exprimer la puissance (notée $\mathscr{P}(R)$ pour le dipôle R) associée à chaque dipôle.

c – En faisant un bilan de puissance reçue par le système, déterminer l'expression du courant I.

Réponse

Schéma



Calcul

- ◇ $\mathscr{P}_\mathrm{r}(E) = -EI$
- ◇ $\mathscr{P}_\mathrm{r}(r) = rI^2$
- ◇ $\mathscr{P}_\mathrm{r}(R) = RI^2$

Application

On a $\sum \mathscr{P}_\mathrm{f} = \sum \mathscr{P}_\mathrm{r}$, donc d'après la question précédente :

$$0 = -EI + rI^2 + RI^2$$
$$I(r+R) = E$$
$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

◇

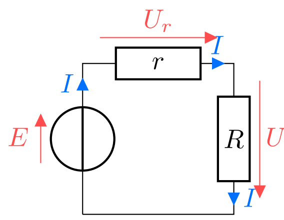
2 a – Reproduire le circuit et flécher les courants et tensions en convention générateur pour chaque dipôle.

b – Exprimer la puissance associée à chaque dipôle.

c – En faisant un bilan de puissance, déterminer l'expression du courant I.

Réponse

Schéma



Calcul

- ◇ $\mathscr{P}_\mathrm{f}(E) = EI$
- ◇ $\mathscr{P}_\mathrm{f}(r) = -rI^2$
- ◇ $\mathscr{P}_\mathrm{f}(R) = -RI^2$

Application

On a $\sum \mathscr{P}_\mathrm{f} = \sum \mathscr{P}_\mathrm{r}$, donc d'après la question précédente :

$$EI - rI^2 - RI^2 = 0$$
$$I(r+R) = E$$
$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

◇

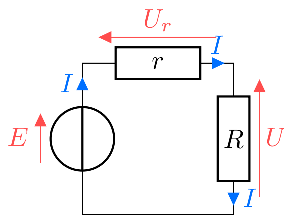
3 a – Reproduire le schéma et flécher les courants et tensions de chaque dipôle en fonction de sa nature (récepteur / générateur).

b – Exprimer la puissance associée à chaque dipôle.

c – En faisant un bilan de puissance reçu par le système, déterminer l'expression du courant I.

Réponse

Schéma



Calcul

- ◇ $\mathscr{P}_\mathrm{f}(E) = EI$
- ◇ $\mathscr{P}_\mathrm{r}(r) = rI^2$
- ◇ $\mathscr{P}_\mathrm{r}(R) = RI^2$

Application

On a $\sum \mathscr{P}_\mathrm{f} = \sum \mathscr{P}_\mathrm{r}$: avec les conventions adaptées, on a :

$$EI = rI^2 + RI^2$$
$$I(r+R) = E$$
$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

◇

4 Comparer les résultats obtenus aux réponses précédentes.

Réponse

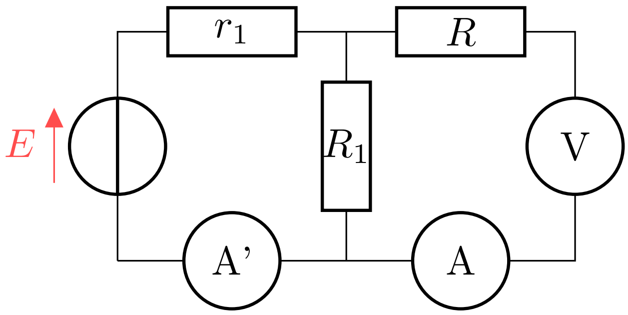
Conclusion

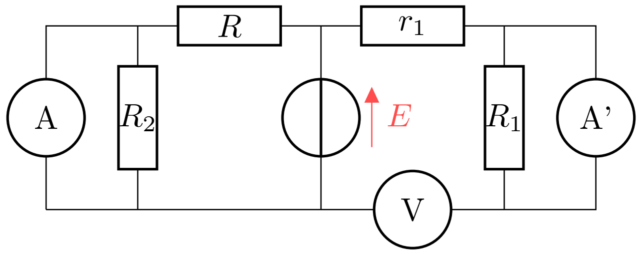
On trouve bien toujours la même valeur de l'intensité dans le circuit, ce qui montre bien que les conventions ne sont que des conventions et ne changent pas la manière dont la physique fonctionne ensuite. Il faut noter cependant que le I du premier schéma n'est pas le I des schémas 2 et 3, étant donné que le sens n'est pas le même : les intensitées sont opposées.

◇

VI Mesures de tensions et intensités

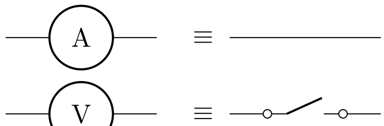
1 Dans les circuits ci-dessous, quelles sont les valeurs affichées par les instruments de mesure si ceux-ci sont parfaits ? On donne : $E = 5{,}0\,\mathrm{V}$; $r_1 = 10\,\Omega$; $R = 20\,\Omega$; $R_1 = 30\,\Omega$; $R_2 = 40\,\Omega$. On rappelle que dans un circuit, les ampèremètres parfaits sont équivalents à des fils alors que les voltmètres parfaits sont équivalents à des interrupteurs ouverts.





Réponse

Rappel

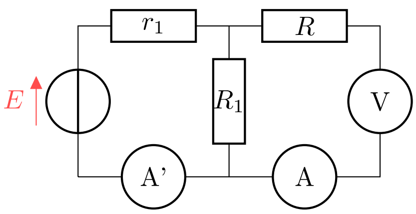


Données

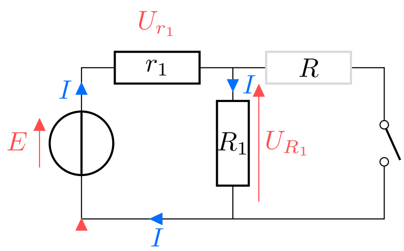
- $E = 5{,}0\,\mathrm{V}$
- $r_1 = 10\,\Omega$
- $R = 20\,\Omega$
- $R_1 = 30\,\Omega$
- $R_2 = 40\,\Omega$

VI/A Schéma 1

Schéma



Simplification

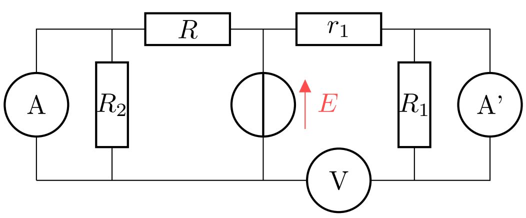


Application

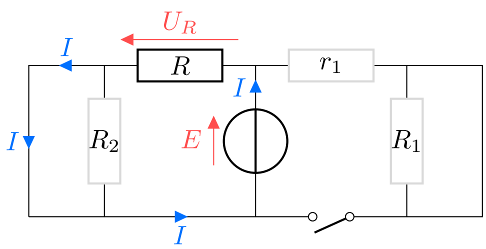
V ouvre le circuit, donc aucun courant ne passe dans la boucle de droite : A mesure $0\,\mathrm{A}$. On trouve I avec la loi des mailles et on trouve $I = \dfrac{E}{r_1 + R_1}$, et donc A' mesure $0{,}125\,\mathrm{A}$. Pour V, R n'a pas de différence de potentiel donc il mesure $U_{R_1} = 3{,}75\,\mathrm{V}$.

VI/B Schéma 2

Schéma



Simplification

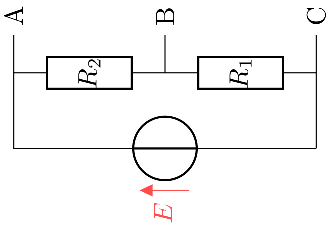


Application

Cette fois c'est la partie de droite qui est ouverte, et donc pas parcourue par un courant : A' mesure $0\,\mathrm{A}$. L'ampèremètre de gauche court-circuite quant à lui la résitance R_2, ainsi toute l'intensité se trouve dans la boucle où on a tracé I ; une rapide loi des mailles donne $I = \dfrac{E}{R} = 0{,}25\,\mathrm{A}$. V mesure ici aussi la tension E.

Correction du TD d'entraînement

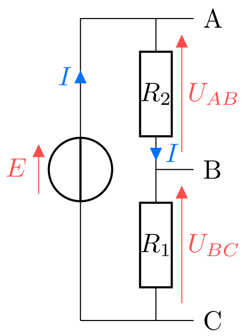
I Diviseur de tension



1 Écrire la loi des mailles pour le montage ci-contre et en déduire l'expression de l'intensité du courant $I(R_2)$ qui parcourt cette maille. En déduire l'expression de la tension U_{BC}, aux bornes de la résistance R_1.

Réponse

Schéma



Résultat attendu

On cherche I puis U_{BC}.

Outils

- ◇ Loi des mailles pour I ;
- ◇ Loi d'Ohm pour U_{BC}.

Application

Il suffit d'une loi des mailles pour trouver

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Puis trivialement

$$U_{BC} = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

Remarque

On remarque donc que deux dipôles de résistances R_1 et R_2 se partageant une tension totale E vont se la répartir en respectant la fraction de résistance à laquelle chaque diôle participe. C'est également une simple moyenne pondérée.

Important

Ce résultat est bien plus général que pour deux dipôles et fonctionne avec n dipôles ***en série*** sur une branche. Il faut pouvoir se ramener à ce schéma précis pour appliquer la formule du pont diviseur de tension – que vous pouvez maintenant utiliser sans loi des mailles : $U_x = E \times \dfrac{R_x}{R_{\text{tot}}}$

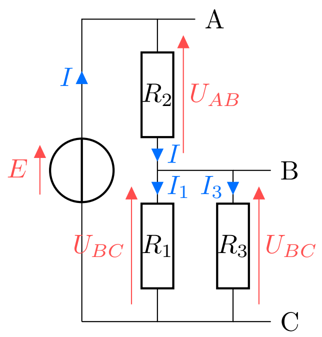
◇

On ajoute une résistance R_3 qui sera connectée en parallèle avec la résistance R_1.

2 Est-ce que la valeur de la tension U_{BC} calculée à la question précédente va changer ? Si oui, calculer les nouvelles valeurs de U_{BC} et $I(R_2)$.

Réponse

Schéma



Réponse

Oui, elle va changer puisqu'on a branché un nouveau dipôle.

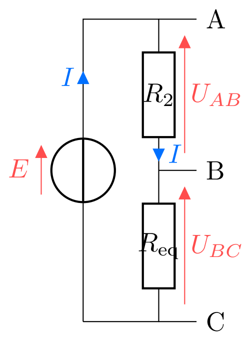
Résultat attendu

On cherche I et U_{BC}.

Outils

- ◇ Loi des mailles pour I ;
- ◇ Loi d'Ohm pour U_{BC}.

Schéma simplifié



Application

On applique alors le pont divisuer de tension, en se ramenant à une situation de deux résistances en série. R_2 ne change pas, par contre R_1 devient l'association en parallèle de R_1 et R_3, qu'on appelle R_{eq}.

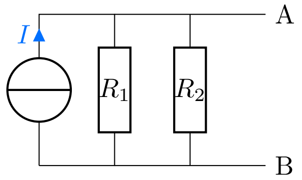
On obtient ainsi

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1R_3}{R_1+R_3} \quad \text{et} \quad I = \frac{E}{R_2 + \frac{R_1R_3}{R_1+R_3}}$$

d'où après calcul

$$\boxed{U_{BC} = \frac{ER_1R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}}$$

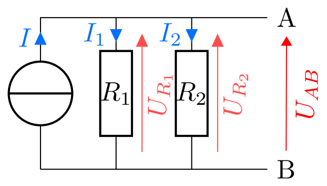
II Diviseur de courant



1 Exprimer les tensions aux bornes de R_1 et R_2 dans le montage ci-contre.

Réponse

Schéma



Résultat attendu

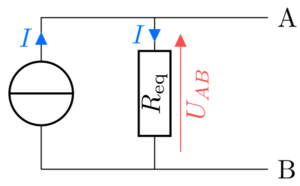
On cherche U_{R_1} et U_{R_2}.

Outils

◇ Unicité de la tension en parallèle ;

◇ Expression résistance ∥.

Schéma simplifié



Application

On a certes $U_{R_1} = I_1R_1$ et $U_{R_2} = I_2R_2$, mais comme on a $U_{R_1} = U_{R_2} = U_{AB}$, le plus simple est de déterminer U_{AB}. Une résistance équivalente $R_{\text{eq}} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ avec l'intensité I qui est connue (car imposée par le générateur de courant) donne facilement

$$U_{R_1} = U_{R_2} = R_{\text{eq}}I = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}I$$

Important

Ce résultat est la base de la réflexion menant à l'expression du diviseur de courant qui donne l'expression de I_x : on voit directement apparaître que $I_x = I \times \dfrac{R_{\text{eq}}}{R_x}$ de par l'unicité de la tension. Souvenez-vous de cette simplicité.

2 À partir de la loi des mailles, exprimer $I(R_2)$ en fonction de I, R_1 et R_2.

Réponse

Résultat attendu

On cherche I_2 en fonction de I, R_1, R_2 **à partir de la loi des mailles**.

Outils

– LdM : $I_1R_1 = I_2R_2 \quad (1)$;

– LdN : $I = I_1 + I_2 \quad (2)$.

Application

En utilisant (2) dans (1), on a $I_2R_2 = (I - I_2)R_1$, donc en isolant I_2 on obtient facilement

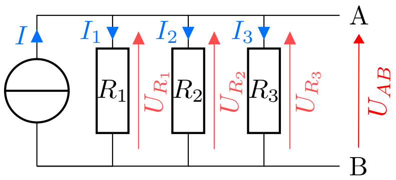
$$\boxed{I_2 = I\frac{R_1}{R_1+R_2}}$$

On ajoute une résistance R_3 qui sera connectée en parallèle avec la résistance R_1.

3 Faire un schéma. Est-ce que la valeur de l'intensité $I(R_2)$ va changer ? Si oui, donner sa nouvelle expression.

Réponse

Schéma



Application

Avec la réflexion de la question 1 ou la relation du pont diviseur de courant qui est maintenant utilisable à volonté, on a facilement $I_2 = I \times \frac{R_{eq}}{R_2}$. Avec $R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$, on a finalement

$$\boxed{I_2 = I \times \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}$$

Résultat attendu

Évidemment, I_2 va changer puisqu'on branche un nouveau dipôle en parallèle. Une rivière qui se divise en 3 plutôt qu'en 2 va avoir des débits différents dans les deux situations. Donc on cherche I_2 en fonction de I, R_1, R_2, R_3 **sans méthode imposée**.

4 Est-ce que la valeur de l'intensité délivrée par le générateur va changer ? Si oui, donner sa nouvelle expression.

Réponse

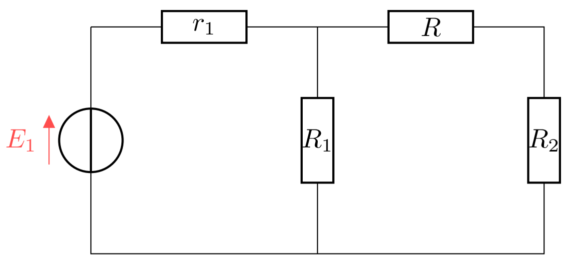
Remarque

L'intensité I ne va pas changer, puisque c'est celle que l'on fixe avec le générateur.

Important

Bien que la loi des mailles soit l'origine de nombreuses relations, ici c'est la simple unicité de la tension qui amène au diviseur de courant.

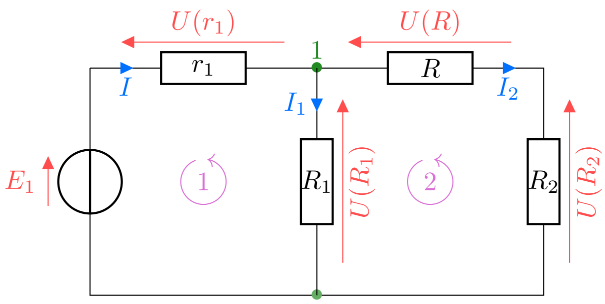
III Calcul d'intensité



1 En utilisant les lois fondamentales dans l'ARQS (dites *lois de Kirchhoff*), exprimer l'intensité traversant R dans le circuit ci-contre.

Réponse

Schéma



Résultat attendu

On cherche à exprimer I_2.

LdN, LdM

- ◇ $I = I_1 + I_2 (1)$ (LdN) ;
- ◇ $I_1 R_1 + I r_1 = E_1 (2)$ (LdM 1) ;
- ◇ $I_2(R + R_2) = I_1 R_1 (3)$ (LdM 2).

Conseil

Pour les systèmes, il faut : numéroter les équations qu'on veut réutiliser en premier lieu, à l'aide des (1) par exemple, savoir qu'un système de 3 équations (indépendantes) à 3 inconnues est résolvable ensuite, et comprendre comment s'y prendre enfin. Cette dernière partie est bien sûr la vraie étape difficile et passe par la pratique, mais elle s'apprend.

Exemple

I_2 apparaît dans l'équation (3), mais s'exprime en fonction de I_1 inconnu. On doit donc commencer par trouver une expression de I_1 utile. I_1 fait partie de l'équation (2) qui, elle, dépend de I mais en utilisant (1) on peut facilement changer (2) en une nouvelle équation reliant I_1 à I_2 et qui n'est pas (3) et qu'on appellera brillamment (4). Ainsi, en réinjectant (4) dans (3), on aura une expression de I_2 en fonction uniquement des paramètres du circuit (E, R).

Application

Injecter (1) dans (2) donne :

$$\begin{aligned} I_1R_1 + (I_1 + I_2)r_1 &= E_1 \\ I_1(R_1 + r_1) &= E_1 - I_2r_1 \\ I_1 &= \frac{E_1 - I_2r_1}{R_1 + r_1} \quad (4) \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de réinjecter (4) dans (3) pour avoir :

$$\begin{aligned} I_2(R_2 + R) &= \frac{E_1 - I_2r_1}{R_1 + r_1} \times R_1 \\ I_2(R_2 + R) \times (R_1 + r) &= (E_1 - I_2r) \times R_1 \\ I_2\left[(R_2 + R)(R_1 + r_1) + r_1R_1\right] &= E_1R_1 \end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{I_2 = \frac{E_1R_1}{[(R_2 + R)(R_1 + r_1) + r_1R_1]}}$$

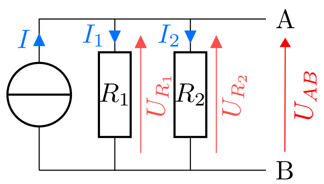
2 Faire de même avec un pont diviseur de courant d'une part.

Réponse

Résultat attendu

On cherche à trouver I_2 *avec un diviseur de courant.*

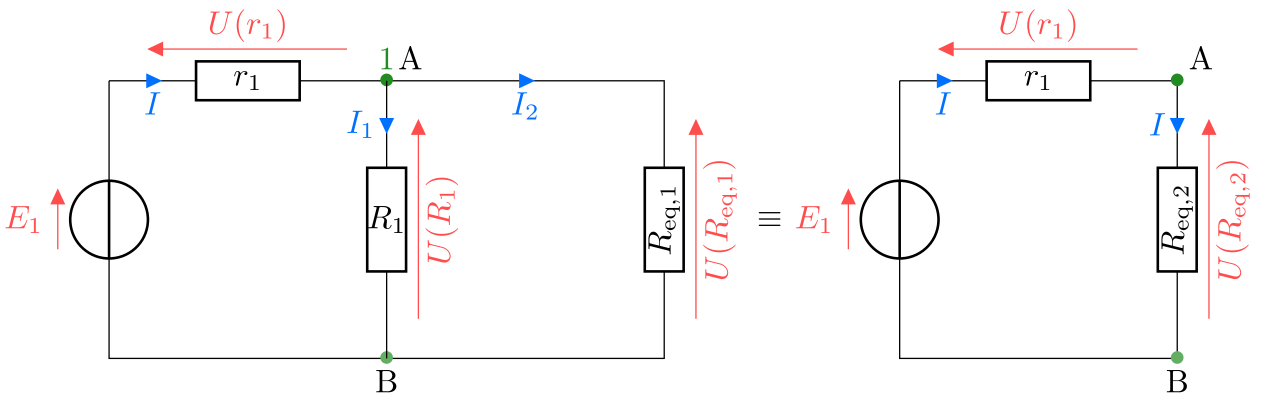
Outil



Dans le circuit ci-contre,

$$I_2 = \frac{R_{\text{eq}}}{R_2} I$$

Schéma



Application

Sur le schéma ci-dessus, on définit

$$\boxed{R_{\text{eq},1} = R + R_2} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{\text{eq},2} = \frac{R_1(R+R_2)}{R+R_1+R_2}}$$

pour appliquer la relation du pont diviseur de courant :

$$I_2 = \frac{R_{\text{eq},2}}{R_{\text{eq},1}} I \Leftrightarrow I_2 = \frac{R_1}{R+R_1+R_2} I$$

Avec une loi des mailles on trouve

$$I = \frac{E_1}{r_1 + R_{\text{eq},2}} \Leftrightarrow I = \frac{E_1}{r_1 + \frac{R_1(R+R_2)}{R+R_1+R_2}}$$

Ainsi

$$I_2 = \frac{R_1}{\cancel{R+R_1+R_2}} \frac{E_1}{r_1(R+R_1+R_2) + \frac{R_1(R+R_2)}{\cancel{R+R_1+R_2}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_2 = \frac{R_1 E_1}{(R+R_1+R_2)r_1 + R_1(R+R_2)}}$$

On trouve bien le même résultat (en développant un peu).

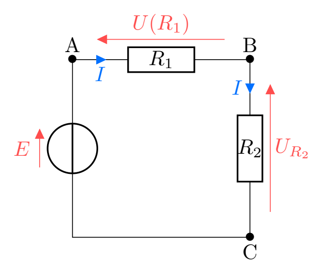
3 Faire de même avec un diviseur de tension d'autre part.

Réponse

Résultat attendu

On cherche à trouver I_2 *avec un diviseur de tension.*

Outil



Dans le circuit ci-contre,

$$U_{R_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2} E$$

Application

Sur le schéma ci-dessus, on définit

$$\boxed{R_{\text{eq},1} = R + R_2} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{\text{eq},2} = \frac{R_1(R+R_2)}{R+R_1+R_2}}$$

pour appliquer la relation du pont diviseur de tension :

$$I_2(R_{\text{eq},1}) = U_{AB} = \boxed{U_{R_{\text{eq},2}} = \frac{R_{\text{eq},2}}{r_1 + R_{\text{eq},2}} E}$$

En développant on trouve

$$I_2\cancel{(R+R_2)} = \frac{R_1\cancel{(R+R_2)}}{\cancel{R+R_1+R_2}} \frac{E}{r_1(R+R_1+R_2) + \frac{R_1(R+R_2)}{\cancel{R+R_1+R_2}}}$$

Ce qui donne bien

$$\boxed{I_2 = \frac{R_1 E}{(R+R_1+R_2)r_1 + R_1(R+R_2)}}$$

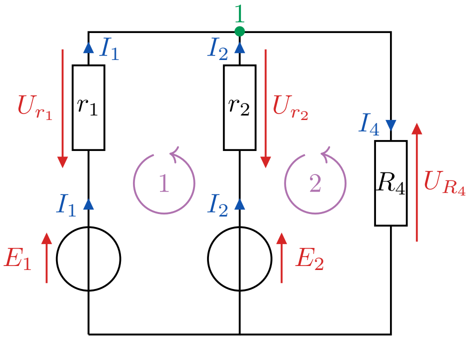
IV Association de générateurs : calcul

Deux générateurs de tension (E_1, r_1) et (E_2, r_2) sont placés en parallèle l'un de l'autre. Ils alimentent une résistance R_4, également placée en parallèle sur les générateurs.

1 Dessiner le schéma normalisé de ce montage et flécher les courants et les tensions. Exprimer alors l'intensité du courant qui circule dans R_4 et en déduire la tension aux bornes de R_4.

Réponse

Schéma



Résultat attendu

On cherche I_4 puis $U_4 = R_4 I_4$.

Outils

- ◇ LdM 1 : $I_4R_4 + I_1r_1 = E_1 \quad (1)$;
- ◇ LdM 2 : $I_4R_4 + I_2r_2 = E_2 \quad (2)$;
- ◇ LdN 1 : $I_1 + I_2 = I_4 \quad (3)$.

Approche méthodique

Notre but est de trouver une équation contenant I_4 et des valeurs connues, c'est-à-dire tout sauf I_1, I_2.

L'équation (1) peut nous aider ; on peut la transformer en remplaçant I_1 par $I_4 - I_2$ grâce à (3) pour avoir une équation (4) avec I_4 et I_2.

Mais comme (2) nous permet d'isoler I_2 et de l'exprimer en fonction de I_4, en injectant cette expression dans (4) on obtient une équation entre I_4 et les éléments du circuit. Question résolue !

Application

Avec (3) dans (1) :

$$I_4R_4 + (I_4 - I_2)r_1 = E_1 \quad (4)$$

En réexprimant (2) :

$$I_2 = (E_2 - I_4R_4)/r_2$$

En injectant (2) dans (4) :

$$I_4(R_4 + r_1) - (E_2 - I_4R_4)\frac{r_1}{r_2} = E_1$$
$$\Leftrightarrow I_4(R_4 + r_1)r_2 - (E_2 - I_4R_4)r_1 = E_1r_2$$
$$\Leftrightarrow I_4(r_1r_2 + r_1R_4 + r_2R_4) = E_1r_2 + E_2r_1$$

Soit

$$\boxed{I_4 = \frac{E_1r_2 + E_2r_1}{r_1r_2 + r_1R_4 + r_2R_4}} \quad \text{et} \quad \boxed{U_{R_4} = R_4 \times I_4}$$

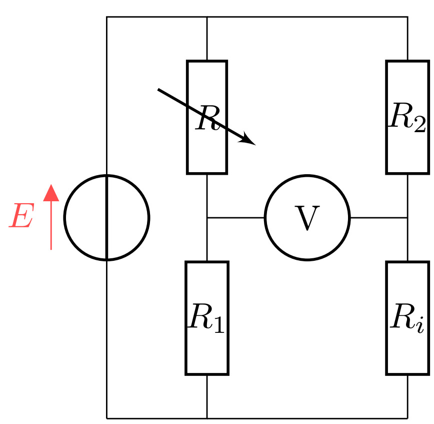
◇

V Pont de Wheatstone

1

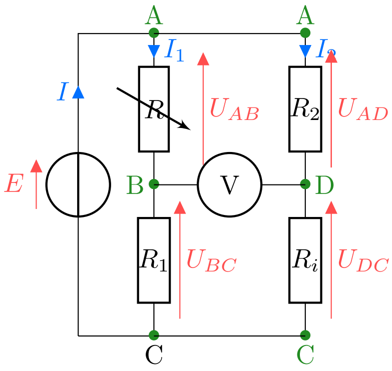
En électronique, on réalise régulièrement des ponts de mesure pour mesurer indirectement une résistance. On dispose d'un circuit comprenant un générateur de tension qui alimente un pont de Wheatstone composé des résistances R_1 et R_2. La résistance R_i est inconnue, et la résistance R est variable (il s'agit d'un potentiomètre). On fait évoluer R jusqu'à ce que le voltmètre indique une tension nulle. Le pont est alors équilibré.

À l'aide des lois de Kirchhoff, déterminer l'expression de la valeur de R_i en fonction des valeurs des autres résistances lorsque le pont est équilibré.



Réponse

Schéma



Résultat

On cherche R_i, ou U_{DC} quand « le pont est équilibré ».

Outil

D'après l'énoncé, le pont est équilibré quand $V = 0$, soit quand $V_B = V_D$.

Application

Si le pont est équilibré, alors $U_{AB} = U_{AD}$ et $U_{BC} = U_{DC}$. Or, avec le pont diviseur de tension, on a à la fois

$$U_{BC} = E\frac{R_1}{R_1 + R}$$
$$U_{DC} = E\frac{R_i}{R_i + R_2}$$

Donc

$$\begin{aligned} & U_{BC} = U_{DC} \\ \Leftrightarrow\ & \cancel{E}\frac{R_1}{R_1 + R} = \cancel{E}\frac{R_i}{R_i + R_2} \\ \Leftrightarrow\ & R_1(\cancel{R_i} + R_2) = R_i(\cancel{R_1} + R) \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{R_i = \frac{R_1 R_2}{R}} \end{aligned}$$

VI Associations de condensateurs et de bobines

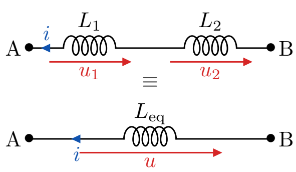
1 Montrer qu'en série, les inductances s'ajoutent.

Réponse

On suppose que deux bobines L_1 et L_2 en série forment un dipôle équivalent d'inductance L_{eq} et on cherche son expression. On fait pour cela un schéma équivalent. On part ensuite de l'additivité des tensions :

$$\begin{aligned} & u = u_1 + u_2 && u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow\ & L_{\text{eq}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} && \forall i \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{L_{\text{eq}} = L_1 + L_2} \end{aligned}$$

■



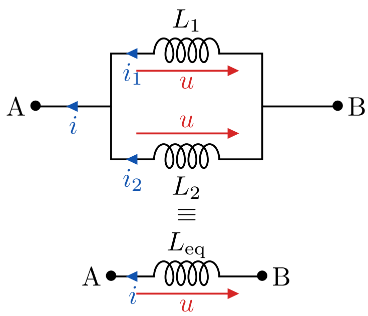
2 Montrer qu'en parallèle, l'inverse des inductances s'ajoutent.

Réponse

On suppose que deux bobines L_1 et L_2 en dérivation forment un dipôle équivalent d'inductance L_{eq} et on cherche son expression. On fait pour cela un schéma équivalent. On part ensuite de l'additivité des courants :

$$\begin{aligned} & i = i_1 + i_2 && \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\,) \\ \Rightarrow\ & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} && u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{u}{L_{\text{eq}}} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} && \forall u \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}} \end{aligned}$$

■



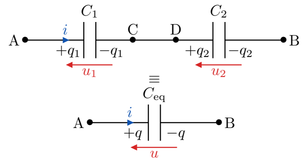
3 Montrer qu'en série, l'inverse des capacités s'ajoutent.

Réponse

On suppose que deux condensateurs C_1 et C_2 en série forment un dipôle équivalent de capacité C_{eq} et on cherche son expression. On fait pour cela un schéma équivalent. On part ensuite de l'additivité des tensions :

$$\begin{aligned}
& u = u_1 + u_2 \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot) \\
\Leftrightarrow\; & \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \quad \tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \tfrac{i}{C_{\mathrm{eq}}} \\
\Leftrightarrow\; & \frac{i}{C_{\mathrm{eq}}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i \quad \forall i \\
\Leftrightarrow\; & \boxed{\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}
\end{aligned}$$

■



4 Montrer qu'en parallèle, les capacités s'ajoutent.

Réponse

On suppose que deux condensateurs C_1 et C_2 en dérivation forment un dipôle équivalent de capacité C_{eq} et on cherche son expression. On fait pour cela un schéma équivalent. On part ensuite de l'additivité des courants :

$$\begin{aligned}
& i = i_1 + i_2 \quad i = C_{\mathrm{eq}} \tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\; & C_{\mathrm{eq}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad \forall u \\
\Leftrightarrow\; & \boxed{C_{\mathrm{eq}} = C_1 + C_2}
\end{aligned}$$

■