Circuits du 1$^{\text{er}}$ ordre

Sommaire

I Circuit RC **2**
I/A Circuit RC série : charge 2
I/B Application : décharge d'un circuit RC 6
II Bobine et circuit RL **7**
II/A Circuit RL série : échelon montant 7
II/B Application : RL série descendant 9

Capacités exigibles

- ◯ Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.
- ◯ Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine.
- ◯ Réaliser un bilan énergétique.
- ◯ Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.
- ◯ Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension
- ◯ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

L'essentiel

Définitions

◯ E3.1 : Échelon de tension 2
◯ E3.2 : Circuit RC en charge 2
◯ E3.3 : Temps de réponse 4
◯ E3.4 : Circuit RC en décharge 6
◯ E3.5 : Circuit RL échelon montant 7
◯ E3.6 : Circuit RL descendant 9

Propriétés

◯ E3.1 : Équa. diff. RC montant 2
◯ E3.2 : Tension RC montant 4
◯ E3.3 : Temps de réponse RC montant 4
◯ E3.4 : Intensité RC montant 5
◯ E3.5 : Puissances RC montant 5
◯ E3.6 : Bilan d'énergie RC montant 6
◯ E3.7 : Équa. diff. RL montant 8
◯ E3.8 : Intensité RL montant 8
◯ E3.9 : Tension RL montant 9
◯ E3.10 : Puissances RL montant 9

Applications

◯ E3.1 : Dimension de RC 3
◯ E3.2 : Décharge RC série 6
◯ E3.3 : RL série descendant 10

Démonstrations

◯ E3.1 : Équa. diff. RC montant 2
◯ E3.2 : Tension RC série montant 3
◯ E3.3 : Temps de réponse RC montant 4
◯ E3.4 : Intensité RC montant 5
◯ E3.5 : Puissances RC montant 5
◯ E3.6 : Bilan d'énergie RC montant 5
◯ E3.7 : Équa. diff. RL montant 7
◯ E3.8 : Intensité RL série montant 8
◯ E3.9 : Tension RL montant 9
◯ E3.10 : Puissances RL montant 9

Remarques

◯ E3.1 : Unité de L/R 8
◯ E3.2 : τ graphique et régime permanent . . . 8

Outils

◯ E3.1 : Détermination graphique τ RC montant 4
◯ E3.2 : Bilan de puissance en élec. 5

Points importants

◯ E3.1 : Résolution EDLCC 3

Erreurs communes

◯ E3.1 : Bilan d'énergie RL charge 9

On appelle **circuit linéaire du premier ordre** un circuit électrique dont l'évolution des grandeurs électriques est régie par des équations différentielles linéaires à coefficients constants et *du premier ordre*. On étudie ici leur réponse à un échelon de tension.

I Circuit RC

I/A Circuit RC série : charge

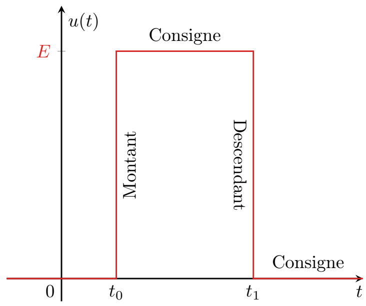
Définition E3.1 : Échelon de tension

Un échelon de tension est montant depuis t_0 s'il est de la forme

$$\begin{cases} u(t < t_0) = 0 \\ u(t \geq t_0) = E \end{cases} \quad \text{avec} \quad E \quad \text{la consigne montante}$$

Il est descendant depuis t_1 s'il est de la forme

$$\begin{cases} u(t < t_1) = E \\ u(t \geq t_1) = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad 0 \quad \text{la consigne descendante}$$



I/A) 1 Présentation

Définition E3.2 : Circuit RC en charge

- ◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal.
- ◇ **On suppose le condensateur initialement déchargé.**
- ◇ À $t = t_0$, on ferme l'interrupteur.

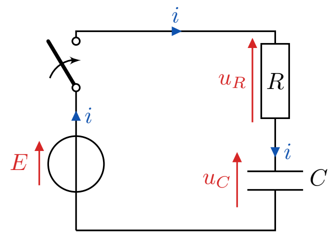


Figure E3.1

I/A) 2 Équation différentielle du circuit

Démonstration E3.1 : Équation différentielle RC échelon montant et CI

Équation différentielle

Loi des mailles pour $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} & u_R + u_C = E \\ \Leftrightarrow\ & Ri + u_C = E \\ \Leftrightarrow\ & RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC} \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau}} \end{aligned}$$

$u_R = Ri$

$i = i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

$\div RC$

Canonique

■

Conditions initiales

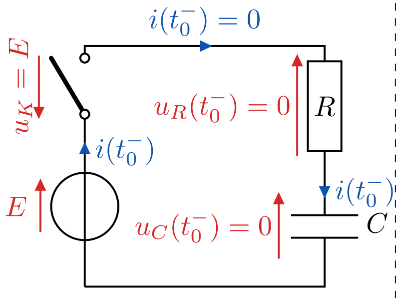


Figure E3.2 – En t_0^-

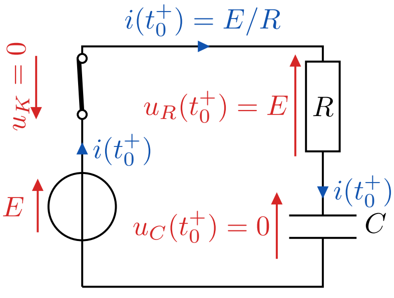


Figure E3.3 – En t_0^+

Propriété E3.1 : Équation différentielle RC échelon montant

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC avec un échelon de tension montant E s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = RC} \qquad \text{(E3.1)}$$

ou, $\times C$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}q = \frac{CE}{\tau}}$$

Par **continuité de la tension aux bornes d'un condensateur**, on trouve la condition initiale

$$\boxed{u_C(t_0^-) = u_C(t_0^+) = 0}$$

ou

$$\boxed{q(t_0^-) = q(t_0^+) = 0}$$

Application E3.1 : Dimension de RC

Montrer, par analyse dimensionnelle, que RC est homogène à un temps.

Analyse directe

On a $[RC] = \Omega{\cdot}\mathrm{F}$. Or, $$[q] = [Cu] \Leftrightarrow \mathrm{C} = \mathrm{F}{\cdot}\mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{F} = \mathrm{A}{\cdot}\mathrm{s}{\cdot}\mathrm{V}^{-1}$$

de plus, $$[u] = [Ri] \Leftrightarrow \mathrm{V} = \Omega{\cdot}\mathrm{A} \Leftrightarrow \Omega = \mathrm{V}{\cdot}\mathrm{A}^{-1}$$

Ainsi, $$[RC] = \Omega{\cdot}\mathrm{F} = \mathrm{V}{\cdot}\mathrm{A}^{-1}{\cdot}\mathrm{A}{\cdot}\mathrm{s}{\cdot}\mathrm{V}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{[RC] = \mathrm{s}}$$ ■

Analyse indirecte

Une équation physique est homogène. Or, $$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

alors $$\left[\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\frac{u_C}{RC}\right] \Leftrightarrow \frac{[u_C]}{[t]} = \frac{[u_C]}{[RC]} \Leftrightarrow \boxed{[RC] = [t]}$$ ■

I/A) 3 Résolution de l'équation différentielle

Important E3.1 : Résolution EDLCC

Se référer à la fiche 7.

1. On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.
2. On **injecte la forme générique** $y_h(t) = K\mathrm{e}^{rt}$, $K \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{C}$ dans l'équation homogène.
3. On trouve et résout le **polynôme caractéristique**.
4. On écrit alors la **forme homogène** $y_h(t)$.
5. On recherche une **solution particulière constante de l'équation générale**, de la forme $y_p = \lambda$.
6. On écrit la **solution générale**, somme de la forme homogène et de la solution particulière : $y(t) = y_h(t) + y_p$
7. On détermine la/les constante(s) à l'aide des **conditions initiales**.
8. Conclusion.

Démonstration E3.2 : Tension RC série montant

1. Équation homogène : $$\frac{\mathrm{d}u_{C,h}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_{C,h} = 0 \tag{E3.2}$$
2. Forme générique : $$u_{C,h}(t) = K\exp(rt) \overset{(E3.2)}{\Rightarrow} r \cdot \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} + \frac{\cancel{K\mathrm{e}^{rt}}}{\tau} = 0$$
3. Polynôme caractéristique : $$r + \frac{1}{\tau} = 0 \quad \text{donc} \quad r = -\frac{1}{\tau}$$
4. Solution homogène : $$\boxed{u_{C,h}(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \tag{E3.3}$$
5. Solution particulière : $$u_{C,p} = \lambda \overset{(E3.1)}{\Rightarrow} 0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{u_{C,p} = E} \tag{E3.4}$$
6. Solution générale : $$u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p} \underset{(E3.4)}{\overset{(E3.3)}{=}} E + K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{E3.5}$$
7. Conditions initiales : $$u_C(t_0) \overset{\text{CI}}{=} 0 \overset{(E3.5)}{=} E + K\exp\left(\frac{-t_0}{\tau}\right) \Leftrightarrow K = -E\exp\left(\frac{t_0}{\tau}\right)$$
8. Conclusion : $$u_C(t) = E - E\exp\left(\frac{t_0}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$ $$\Leftrightarrow \boxed{u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)\right)}$$ ■

Propriété E3.2 : Tension RC montant

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC soumis à un échelon de tension E avec $u_C(t_0) = 0$ est

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{q(t) = CE\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right)}$$

et $u_C(t)$ est continue. Quand $t \to +\infty$, $u_C(t) = E$. On est alors en **régime permanent** : $u_C(t)$ ne varie plus. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de la valeur de τ la constante de temps.

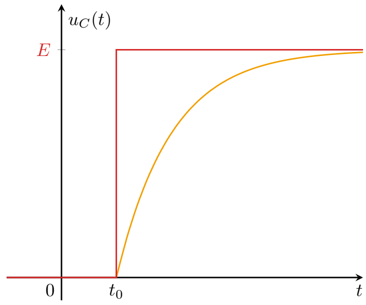


Figure E3.4

I/A) 4 Constante de temps, régime transitoire

Outils E3.1 : Détermination graphique τ RC montant

◇ $u_C(t_0+\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}63 \cdot E$

On trouve $t_0 + \tau$ en lisant l'abscisse telle que $u_C(t_0+\tau) = 0{,}63 \cdot E$.

◇ Soit $y_0(t)$ la tangente à la courbe en $t = t_0$. On a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} + \underbrace{\frac{u_C(t_0)}{\tau}}_{=0} = \frac{E}{\tau} \Leftrightarrow y_0'(t) = \frac{E}{\tau}$$

Ainsi $$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} y_0'(t)\mathrm{d}t = \frac{E}{\tau}(t - t_0) \Rightarrow \underline{y_0(t_1+\tau) = E}$$

On trouve $t_0 + \tau$ à l'intersection de $y_0(t)$ avec la consigne.

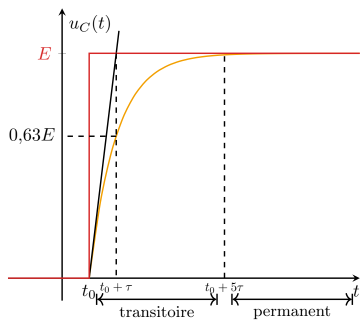


Figure E3.5

Définition E3.3 : Temps de réponse

Le **temps de réponse** d'un circuit d'ordre 1 est le temps à partir duquel on peut considérer la **consigne** de tension ou de courant **atteinte**, c'est-à-dire qu'on est en **régime permanent**.

Pour cela, on se fixe un **seuil arbitraire** à partir duquel on considère le régime permanent atteint.

Démonstration E3.3 : Temps de réponse RC montant

Dans ce cours, on prendra 99%. Supposons $t_0 = 0$ pour simplifier les calculs :

On traduit mathématiquement la définition :

$$\begin{aligned} & u_C(t_{99}) = 0{,}99E && \text{solution de } u_C \\ \Leftrightarrow\ & E\left(1 - \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right)\right) = 0{,}99E && \div E \\ \Leftrightarrow\ & 1 - \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) = 0{,}99 \end{aligned}$$

On isole ensuite l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) = 0{,}01 && \ln(\ ) \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{t_{99}}{\tau} = \ln(0{,}01) = -\ln(100) && \text{on isole } t_{99} \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{t_{99} = \tau\ln(100)} \end{aligned}$$

■

Propriété E3.3 : Temps de réponse RC montant

Ainsi, $\boxed{\text{Le temps de réponse à 99\% est à } 4{,}6\tau \approx 5\tau}$

I/A) 5 Évolution de l'intensité

Qu'advient-il de l'intensité dans un circuit RC ? On peut la déterminer de deux manières :

Démonstration E3.4 : Intensité RC montant

Caractéristique de C

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec} \quad u_C(t) = E(1-\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau})$$

$$\Leftrightarrow i(t) = CE\left(0 - \left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)\right)$$

$$\tau = RC$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)}$$ ■

Loi des mailles

$$Ri = E - u_C \quad \text{avec} \quad u_C(t) = E(1-\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau})$$

$$\Leftrightarrow Ri(t) = \cancel{E} - \cancel{E} + E\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

$$\div R$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)}$$ ■

Propriété E3.4 : Intensité RC montant

L'intensité dans un circuit RC en charge s'exprime par

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)}$$

mais est **discontinue**. Quand $t \to +\infty$, $i(t) = 0$ car le **condensateur chargé et se comporte comme un interrupteur ouvert**. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de τ la constante de temps.

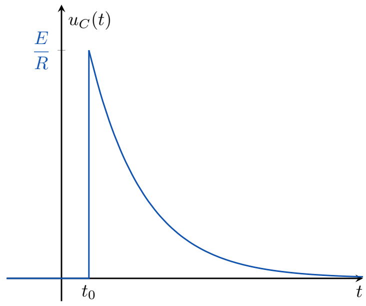


FIGURE E3.6

I/A) 6 Bilan de puissance

Outils E3.2 : Bilan de puissance en élec.

En électrocinétique, les puissances sont le produit d'une tension et d'une intensité. Or, par construction la loi des mailles est une relation entre les tensions du circuit ; ainsi

On effectue un bilan de puissance en écrivant la loi des mailles multipliée par i.

Propriété E3.5 : Puissances RC montant

Dans un circuit RC en charge, on a le bilan de puissances

$$\boxed{\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_J}$$

- $\mathcal{P}_G = Ei$: fournie par générateur ;
- $\mathcal{P}_C = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t}$: reçue par condensateur ;
- $\mathcal{P}_J = Ri^2$: dissipée par effet JOULE.

Démonstration E3.5 : Puissances RC

$$u_C + Ri = E$$

$$\times i$$

$$\Leftrightarrow u_C\, i + Ri^2 = Ei$$

RCT pour C : $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

$$\Leftrightarrow u_C\, C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = Ei$$

$f \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}f^2\right)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C{u_C}^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} = \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_G}$$ ■

I/A) 7 Bilan d'énergie

Démonstration E3.6 : Bilan d'énergie RC montant

Soit $t_0 = 0$: l'énergie fournie par le générateur est

$$\mathcal{E}_G = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_G \mathrm{d}t$$

$$\mathcal{P}_G = Ei$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_G = \int_0^{+\infty} Ei(t)\mathrm{d}t$$

$$i(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_G = \frac{E^2}{R}\left[-\tau\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^{+\infty}$$

Soit explicitement :

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_G = \frac{E^2}{R}\left(\underbrace{-\tau\exp\left(-\frac{\infty}{\tau}\right)}_{=0} - \left(\underbrace{-\tau\exp(0)}_{=1}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_G = \tau\frac{E^2}{R}$$

$$\tau = RC$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_G = CE^2}$$

De plus, $\mathcal{E}_C = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\cancel{\mathrm{d}t}}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)\cancel{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}CE^2 - 0$ donc $\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_G - \mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE^2$ ■

Propriété E3.6 : Bilan d'énergie RC montant

Pendant la totalité de la charge, le générateur fournit l'énergie

$$\boxed{\mathcal{E}_G = CE^2}$$

Elle se répartit équitablement entre le condensateur et la résistance :

$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE^2 = \mathcal{E}_J}$$

I/B Application : décharge d'un circuit RC

Définition E3.4 : Circuit RC en décharge

◇ Il est constitué d'un condensateur idéal en série avec une résistance.

◇ **On suppose le condensateur initialement chargé** : $u_C(t_1^-) = E$.

◇ À $t = t_1$, on ferme l'interrupteur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

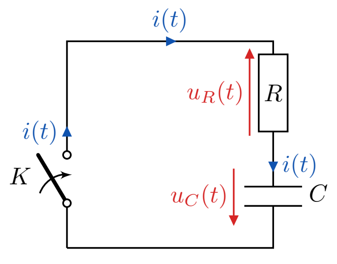


Figure E3.7

Application E3.2 : Décharge RC série

On cherche l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur et de l'intensité $i(t)$ dans le circuit pour $t \geq t_1$. Pour cela :

1) Déterminer l'équation différentielle ainsi que les conditions initiales ;

2) Résoudre l'équation différentielle ;

3) Tracer $u_C(t)$ et montrer comment déterminer graphiquement la constante de temps τ ;

4) Montrer que le temps de réponse du circuit est toujours de 5τ ;

5) Trouver l'expression de l'intensité $i(t)$ dans le circuit.

6) Que se serait-il passé si l'on avait fléché le condensateur en convention récepteur ?

---

1) **Équation différentielle**

Loi des mailles pour $t \geq t_1$:

$$u_R = u_C \qquad u_R = Ri$$
$$\Leftrightarrow Ri = u_C \qquad i = \boxed{-}C\frac{du_C}{dt}$$
$$\Leftrightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \qquad \div RC$$
$$\Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0 \qquad \text{Canonique}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C = 0}$$

■

Conditions initiales

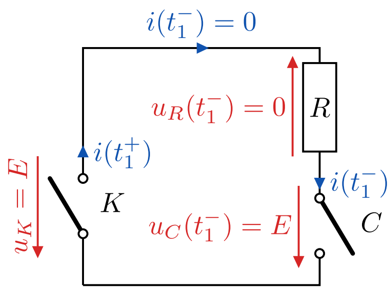


Figure E3.8 – En t_1^-

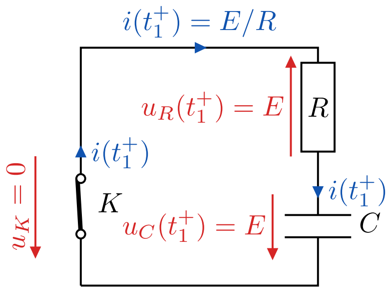


Figure E3.9 – En t_1^+

2) On part de l'étape $\boxed{2}$ puisque l'équation est déjà homogène :

$\boxed{2}$ et $\boxed{3}$:

$$u_{C,h}(t) = K\exp(rt) \Rightarrow r \cdot \cancel{Ke^{rt}} + \frac{\cancel{Ke^{rt}}}{\tau} = 0 \quad \text{donc} \quad r = -\frac{1}{\tau}$$

$\boxed{4}$:

$$\boxed{u_{C,h}(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \tag{E3.6}$$

$\boxed{7}$:

$$u_C(t_1) \overset{\text{CI}}{=} E \overset{\text{(E3.6)}}{=} K\exp\left(\frac{-t_1}{\tau}\right) \Leftrightarrow K = E\exp\left(\frac{t_1}{\tau}\right)$$

$\boxed{8}$:

$$\Leftrightarrow \boxed{u_C(t) = E\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right)}$$

■

3) ◇ $u_C(t_1+\tau) = Ee^{-1} \approx 0{,}37 \times E$

On trouve $t_1+\tau$ en lisant l'abscisse telle que $u_C(t_1+\tau) = 0{,}37 \cdot E$.

◇ Soit $y_1(t)$ la tangente à la courbe en $t = t_1$. On a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t_1} + \frac{\overbrace{u_C(t_1)}^{=E}}{\tau} = 0 \Leftrightarrow y_1'(t) = -\frac{E}{\tau}$$

$$\Rightarrow y_1(t) = \int_{t_1}^{t} y_1'(t)\mathrm{d}t = E - \frac{E}{\tau}(t-t_1) \Rightarrow \underline{y_1(t_1+\tau) = 0}$$

On trouve $t_1+\tau$ à l'intersection de $y_1(t)$ avec la consigne.

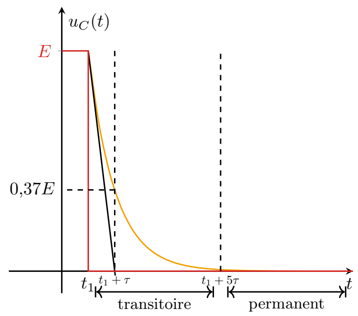


Figure E3.10

4) On suppose $t_1 = 0$ pour simplifier les calculs. On traduit mathématiquement la définition :

$$u_C(t_{99}) = 0{,}01E \Leftrightarrow E\exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) = 0{,}01E \Leftrightarrow -\frac{t_{99}}{\tau} = \ln(0{,}01) = -\ln(100) \Leftrightarrow \boxed{t_{99} = \tau\ln(100) \approx 5\tau}$$

5) Par une des deux méthodes précédentes, ici la caractéristique **en convention générateur** :

$$i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \Rightarrow i(t) = \frac{CE}{\tau}\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right) \Leftrightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right)} \quad \text{discontinue}$$

6) ◇ En convention récepteur, la RCT de C aurait donné $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, mais la loi des mailles aurait donné le même résultat (l'équation différentielle est indépendante de la convention de fléchage !).

◇ Par contre, l'intensité aurait été négative, puisque quoiqu'il en soit c'est bien le condensateur qui joue le rôle de générateur : si on flèche i reçu, on doit avoir $i < 0$.

II Bobine et circuit RL

II/A Circuit RL série : échelon montant

II/A) 1 Présentation

Définition E3.5 : Circuit RL échelon montant

◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéale.

◇ **On suppose l'interrupteur initialement ouvert**.

◇ À $t = t_0$, on ferme l'interrupteur.

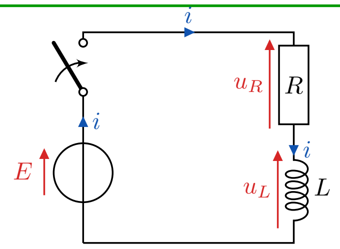


Figure E3.11

II/A) 2 Équation différentielle du circuit

♥ Démonstration E3.7 : Équation différentielle RL échelon montant et CI

Équation différentielle

Loi des mailles pour $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}
& u_L + u_R = E && u_R = Ri \\
\Leftrightarrow\ & u_L + Ri = E && u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ & L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E \cdot \overbrace{\frac{R}{R}}^{=1} && \div L \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}\cdot\frac{R}{R} && \text{Canonique} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R}}
\end{aligned}$$

■

Conditions initiales

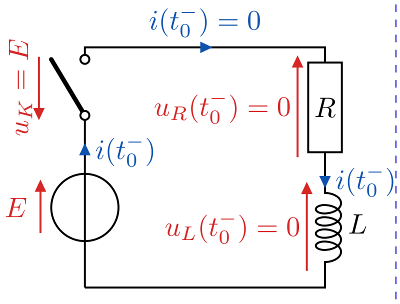


Figure E3.12 – En t_0^-

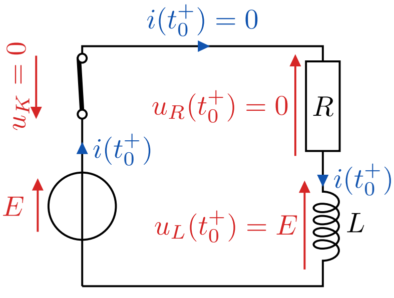


Figure E3.13 – En t_0^+

Propriété E3.7 : Équation différentielle RL échelon montant

L'équation différentielle du courant $i(t)$ traversant une bobine dans un circuit RL avec un échelon de tension montant E s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

Par **continuité de l'intensité traversant une bobine**, on trouve la condition initiale

$$\boxed{i(t_0^-) = i(t_0^+) = 0}$$

Remarque E3.1 : Unité de L/R

On peut de même démontrer l'unité de L/R par analyse dimensionnelle.

II/A) 3 Résolution de l'équation différentielle

Démonstration E3.8 : Intensité RL série montant

1 Équation homogène :
$$\frac{\mathrm{d}i_{L,h}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i_{L,h} = 0 \tag{E3.7}$$

2 Forme générique :
$$i_{L,h}(t) = K\exp(rt) \overset{(\text{E3.7})}{\Rightarrow} r\cdot\cancel{Ke^{rt}} + \frac{\cancel{Ke^{rt}}}{\tau} = 0$$

3 Polynôme caractéristique :
$$r + \frac{1}{\tau} = 0 \quad \text{donc} \quad r = -\frac{1}{\tau}$$

4 Solution homogène :
$$\boxed{i_{L,h}(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \tag{E3.8}$$

5 Solution particulière :
$$i_{L,p} = \lambda \overset{(\text{II/A) 2})}{\Rightarrow} 0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{i_{L,p} = \frac{E}{R}} \tag{E3.9}$$

6 Solution générale :
$$i_L(t) = i_{L,h}(t) + i_{L,p} \underset{(\text{E3.9})}{\overset{(\text{E3.8})}{=}} \frac{E}{R} + K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{E3.10}$$

7 Conditions initiales :
$$i_L(t_0) \overset{\text{CI}}{=} 0 \overset{(\text{E3.10})}{=} \frac{E}{R} + K\exp\left(\frac{-t_0}{\tau}\right) \Leftrightarrow K = -\frac{E}{R}\exp\left(\frac{t_0}{\tau}\right)$$

8 Conclusion :
$$i_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}\exp\left(\frac{t_0}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{i_L(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)\right)}$$

■

Propriété E3.8 : Intensité RL montant

La solution de l'équation différentielle du courant $i(t)$ d'un circuit RL soumis à un échelon de tension E avec $i(t_0) = 0$ est

$$\boxed{i_L(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)\right)}$$

et $i(t)$ est continue. Quand $t \to +\infty$, $i(t) = \frac{E}{R}$. On est alors en **régime permanent** : $i(t)$ ne varie plus. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de la valeur de τ la constante de temps.

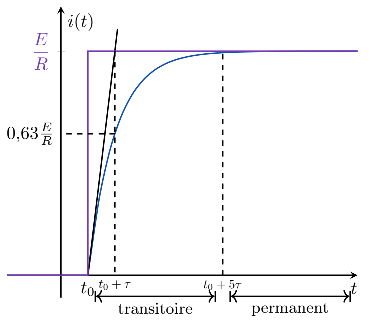


Figure E3.14

Remarque E3.2 : τ graphique et régime permanent

On retrouve le même procédé que pour la tension du RC série, en faisant attention d'utiliser $\frac{E}{R}$ et pas E (évident par homogénéité).

II/A) 4 Évolution de la tension

Démonstration E3.9 : Tension RL montant

Caractéristique de L

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec} \quad i(t) = \frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow u_L(t) = \frac{LE}{R}\left(0 - \left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

$\tau = \frac{L}{R}$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_L(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Loi des mailles

$$u_L = E - Ri \quad \text{avec} \quad i(t) = \frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

$$\Leftrightarrow u_L(t) = E - R\frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_L(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Propriété E3.9 : Tension RL montant

La tension dans un circuit RL en charge s'exprime par

$$\boxed{u_L(t) = E\exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right)}$$

mais est **discontinue**. Quand $t \to +\infty$, $u_L(t) = 0$ car la **bobine en RP se comporte comme un interrupteur fermé**. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de τ la constante de temps.

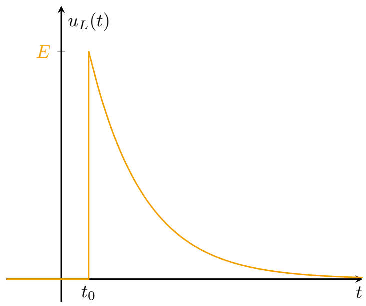


Figure E3.15

II/A) 5 Bilan de puissance

Propriété E3.10 : Puissances RL montant

Dans un circuit RL en charge, on a le bilan de puissances

$$\boxed{\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_J}$$

$\mathcal{P}_G = Ei$: fournie par générateur ;

$\mathcal{P}_L = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t}$: reçue par la bobine ;

$\mathcal{P}_J = Ri^2$: dissipée par effet Joule.

Démonstration E3.10 : Puissances RL

$$u_L + Ri = E$$

$\times i$

$$\Leftrightarrow u_L\, i + Ri^2 = Ei$$

RCT pour L : $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$$\Leftrightarrow i\, L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = Ei$$

$f \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}f^2\right)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L{i_L}^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} = \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_G} \quad \blacksquare$$

Attention E3.1 : Bilan d'énergie RL charge

Ici la puissance en régime permanent n'est pas nulle : un courant circule toujours dans la résistance qui dissipe RI^2. On ne peut intégrer à l'infini.

II/B Application : RL série descendant

Définition E3.6 : Circuit RL descendant

- ◇ Il est constitué d'une bobine idéale en série avec une résistance.
- ◇ **On suppose le courant initialement établi** : $i(t_1^-) = \frac{E}{R}$.
- ◇ À $t = t_1$, on coupe le générateur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

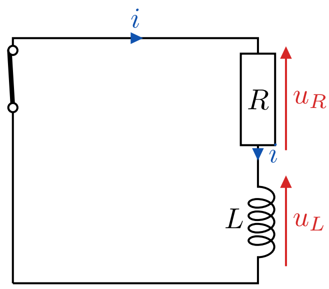


Figure E3.16

♥ Application E3.3 : RL série descendant

On cherche l'évolution de l'intensité $i(t)$ traversant la bobine et de sa tension $u_L(t)$ pour $t \geq t_1$. Pour cela :

1) Déterminer l'équation différentielle ainsi que les conditions initiales ;
2) Résoudre l'équation différentielle ;
3) Tracer $i(t)$ et montrer comment déterminer graphiquement la constante de temps τ ;
4) Trouver l'expression de la tension $u_L(t)$ dans le circuit.
5) Que se serait-il passé si l'on avait fléché la bobine en convention générateur ?

---

1) **Équation différentielle**

Loi des mailles pour $t \geq t_1$:

$$\begin{aligned} & u_L + u_R = 0 && u_R = Ri \\ \Leftrightarrow\ & u_L + Ri = 0 && u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow\ & L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0 && \div L \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = 0 && \text{Canonique} \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i = 0} \end{aligned}$$

■

Conditions initiales

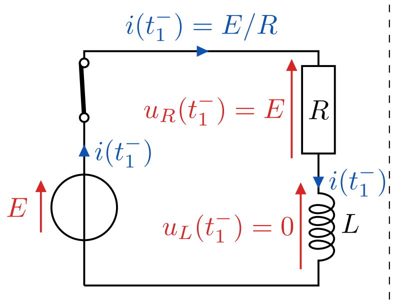


Figure E3.17 – En t_1^-

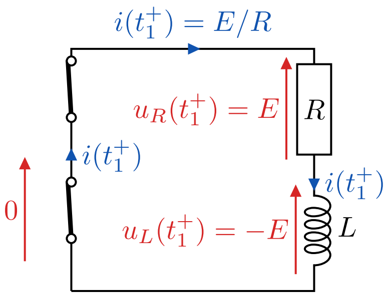


Figure E3.18 – En t_1^+

2) On part de l'étape $\boxed{2}$ puisque l'équation est déjà homogène :

$\boxed{2}$ et $\boxed{3}$:
$$i_{L,h}(t) = K\exp(rt) \Rightarrow r \cdot \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} + \frac{\cancel{K\mathrm{e}^{rt}}}{\tau} = 0 \quad \text{donc} \quad r = -\frac{1}{\tau}$$

$\boxed{4}$:
$$\boxed{i_{L,h}(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \tag{E3.11}$$

$\boxed{7}$:
$$i_L(t_1) \overset{\text{CI}}{=} \frac{E}{R} \overset{(\text{E3.11})}{=} K\exp\left(\frac{-t_1}{\tau}\right) \Leftrightarrow K = \frac{E}{R}\exp\left(\frac{t_1}{\tau}\right)$$

$\boxed{8}$:
$$\Leftrightarrow \boxed{i_L(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right)}$$

■

3) ◇ $i(t_1+\tau) = \frac{E}{R}e^{-1} \approx 0{,}37 \times \frac{E}{R}$

On trouve $t_1+\tau$ en lisant l'abscisse telle que $i(t_1+\tau) = 0{,}37 \cdot \frac{E}{R}$.

◇ Soit $y_1(t)$ la tangente à la courbe en $t = t_1$. On a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t_1} + \frac{\overbrace{i(t_1)}^{=E/R}}{\tau} = 0 \Leftrightarrow y_1'(t) = -\frac{E}{R\tau}$$

$$\Rightarrow y_1(t) = \int_{t_1}^{t} y_1'(t)\mathrm{d}t = \frac{E}{R} - \frac{E}{R\tau}(t-t_1) \Rightarrow \underline{y_1(t) = 0}$$

On trouve $t_1+\tau$ à l'intersection de $y_1(t)$ avec la consigne.

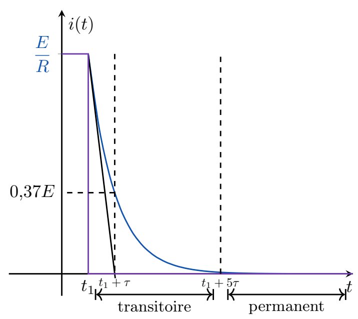


Figure E3.19

4) Par une des deux méthodes précédentes, ici la caractéristique **en convention récepteur** :

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow u_L(t) = -\frac{LE}{R\tau}\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right) \Leftrightarrow \boxed{u_L(t) = -E\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right)} \quad \text{discontinue}$$

5) ◇ En convention générateur, la RCT de L aurait donné $u_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, mais la loi des mailles aurait donné le même résultat (l'équation différentielle est indépendante de la convention de fléchage !).

◇ Par contre, la tension aurait été positive : la bobine s'oppose à la diminution du courant comme un générateur.