

# Oscillateurs harmoniques

## Sommaire

|                                                                    |          |
|--------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>I Introduction</b>                                              | <b>2</b> |
| I/A Signal sinusoïdal et pulsation                                 | 2        |
| I/B Équation différentielle et changements de variable             | 2        |
| <b>II Circuit LC régime libre</b>                                  | <b>3</b> |
| II/A Présentation                                                  | 3        |
| II/B Équation différentielle du circuit                            | 4        |
| II/C Résolution de l'équation différentielle et graphique          | 4        |
| II/D Bilan énergétique                                             | 5        |
| II/E Complément : circuit LC montant                               | 6        |
| <b>III Exemple harmonique mécanique : ressort horizontal libre</b> | <b>7</b> |
| III/A Présentation                                                 | 7        |
| III/B Équation différentielle et solution                          | 7        |
| III/C Bilan énergétique                                            | 8        |

## Capacités exigibles

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.</li> <li><input type="checkbox"/> Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; l'écrire sous forme canonique afin d'identifier la pulsation propre</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique compte tenu des conditions initiales.</li> <li><input type="checkbox"/> Réaliser un bilan énergétique.</li> <li><input type="checkbox"/> Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.</li> </ul> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## L'essentiel

### Définitions

- ☐ E4.1 : Signal sinusoïdal . . . . . 2
- ☐ E4.2 : Circuit LC libre . . . . . 3
- ☐ E4.3 : Circuit LC montant . . . . . 6
- ☐ E4.4 : Force de HOOKE . . . . . 7
- ☐ E4.5 : Situation initiale et bilan des forces . . 7

### Propriétés

- ☐ E4.1 : Équation diff. LC libre . . . . . 4
- ☐ E4.2 : Solution LC descendant . . . . . 5
- ☐ E4.3 : Bilan d'énergie LC descendant . . . . . 5
- ☐ E4.4 : Équation et solu° LC montant . . . . . 6
- ☐ E4.5 : Équation et solution ressort libre . . . 8
- ☐ E4.6 : Bilan d'énergie ressort . . . . . 8

### Remarques

- ☐ E4.1 : Vérification conservation de l'énergie LC 5
- ☐ E4.2 : Graphiques LC montant . . . . . 6

### Erreurs communes

- ☐ E4.1 : Amplitude et déphasage . . . . . 2
- ☐ E4.2 : Conditions initiales et évaluation en 0 5
- ☐ E4.3 : Ressort et force de HOOKE . . . . . 7

### Démonstrations

- ☐ E4.1 : Équation différentielle LC libre . . . . 4
- ☐ E4.2 : Solutions LC série descendant . . . . . 4
- ☐ E4.3 : Bilan d'énergie LC descendant . . . . . 5
- ☐ E4.4 : Équation et solution LC montant . . . 6
- ☐ E4.5 : Équation et solution ressort libre . . . 7
- ☐ E4.6 : Bilan d'énergie ressort . . . . . 8

### Interprétations

- ☐ E4.1 : Pulsation et représentation complexe . 2
- ☐ E4.2 : Changements de variable . . . . . 3
- ☐ E4.3 : Espace des phases LC (HP) . . . . . 5
- ☐ E4.4 : Espace des phases ressort libre (HP) . . 8

### Applications

- ☐ E4.1 : Changements de variable . . . . . 3
- ☐ E4.2 : Unité de  $\omega_0$  . . . . . 4

### Points importants

- ☐ E4.1 : Équation différentielle harmonique . . 2
- ☐ E4.2 : Solutions harmoniques . . . . . 2
- ☐ E4.3 : Analogie LC-ressort . . . . . 8
- ☐ E4.4 : Bilan de puissance en méca . . . . . 8

# I Introduction

## I/A Signal sinusoïdal et pulsation

### Définition E4.1 : Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est un signal de la forme

avec  $A$  l'amplitude  
et  $\varphi$  la phase instantanée  
où  $\omega$  et  $t_0$

#### Unités

FIGURE E4.1

### ♥ Attention E4.1 : Amplitude et déphasage

Une amplitude est **forcément** positive ; une amplitude négative traduit un **ajout de  $\pi$**  à la phase initiale :

### Interprétation E4.1 : Pulsation et représentation complexe

La pulsation représente la **vitesse de variation de la phase** : pour un tour de  $2\pi$  rad en la période  $T$ , on a

similaire à

Par la nature de l'exponentielle, on peut plutôt représenter  $s(t)$  à l'aide d'une exponentielle complexe :

FIGURE E4.2

## I/B Équation différentielle et changements de variable

### Important E4.1 : Équa° différentielle

Un oscillateur harmonique sur  $y(t)$  répond à :

- ◇  $y_{\text{eq}}$  **position d'équilibre**,  $\omega_0$  pulsation **propre**.
- ◇  $y(t_0) = y_0$  et  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} = v_0$  **conditions initiales**.

### Important E4.2 : Solu° harmoniques

La solution générale s'écrit de manière équivalente :

- ◇  $t_0$  le **temps initial** ;
- ◇  $(A', \varphi_0)$  ou  $(A, B)$  des *constantes d'intégration*, reliées à  $y_0$  et  $v_0$ .

### ♥ Outils E4.1 : Changements de variable

#### Solution particulière

Soit  $y(t)$  :

alors  $x(t) = y(t) - y_{\text{eq}}$  est solution de

#### Temps initial

$$\text{soit } \begin{cases} t' = t - t_0 \\ dt' = dt \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(t') = x(t' + t_0) = x(t) \\ u(0) = x(t_0) = y_0 - y_{\text{eq}} \\ \left. \frac{du}{dt'} \right|_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} = v_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$



### ♥ Interprétation E4.2 : Changements de variable

On peut donc se **ramener à une équation homogène** en prenant la **position d'équilibre** comme étant la **solution particulière**, et se **ramener à un temps initial nul** en décalant la base de temps de  $t_0$ .

Dans toute la suite nous travaillerons donc en toute généralité pour un temps initial nul.

### Application E4.1 : Changements de variable

Résoudre l'équation du circuit RL montant par changements de variables.

## II Circuit LC régime libre

### II/A Présentation

#### ♥ Définition E4.2 : Circuit LC libre

- ◇ Il est constitué de l'association en série d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- ◇ On suppose le condensateur initialement chargé à la tension  $E$ .
- ◇ À  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.

FIGURE E4.3

#### Expérience E4.1 : Visualisation expérimentale

On observe la tension  $u_C(t)$  avec un oscilloscope. Une simulation est disponible en ligne <sup>1</sup>.

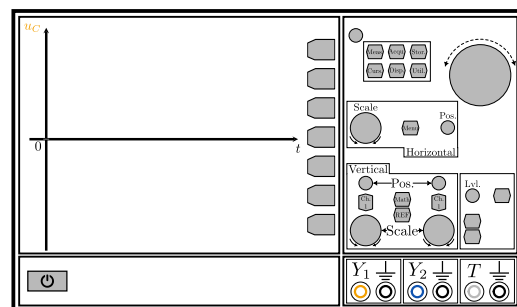
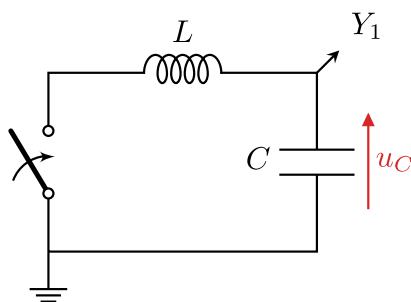


FIGURE E4.4

On remarque que la tension aux bornes du condensateur réalise des **oscillations sinusoïdales**. En fonction des **valeurs de L et C**, on trouve des **périodes différentes**.

#### Observation E4.1 : Réponse en tension du LC montant

Lorsque l'on excite le système LC, la tension aux bornes du condensateur **oscille** de façon **régulière et sinusoïdale**, avec une **fréquence** qui ne **dépend pas de l'amplitude** de l'excitation mais **dépend** des caractéristiques de l'oscillateur (**capacité** du condensateur et **inductance** de la bobine).

1. <https://tinyurl.com/LCreglibre>

## II/B Équation différentielle du circuit

### ♥ Démonstration E4.1 : Équation différentielle LC libre

Équation différentielle

Conditions initiales



FIGURE E4.5 – En  $0^-$

FIGURE E4.6 – En  $0^+$

### ♥ Propriété E4.1 : Équation diff. LC libre

L'équation différentielle de la tension  $u_C(t)$  aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC en régime libre est

avec (E4.2)

ou,  $\times C$  :

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et continuité de l'intensité traversant une bobine, on trouve les conditions initiales :

ou

### Application E4.2 : Unité de $\omega_0$

Montrer, par analyse dimensionnelle, que  $\omega_0$  est homogène à l'inverse d'un temps.

Analyse directe

Analyse indirecte

## II/C Résolution de l'équation différentielle et graphique

### ♥ Démonstration E4.2 : Solutions LC série descendant

2 Forme générique :

3 Polynôme caractéristique :

4 Forme homogène :

(E4.3)

7 Conditions initiales :

◇

(E4.4)

◇

(E4.5)

8 Conclusion :



### ♥ Attention E4.2 : Conditions initiales et évaluation en 0

Il ne faut **pas confondre** la fonction dérivée évaluée en 0, et la dérivée de la fonction évaluée en 0 :

Ça n'est pas parce qu'une fonction est nulle en un point que sa dérivée en ce point est nulle !

De plus, pour la **seconde condition initiale**, il ne faut **pas oublier de diviser par  $C$**  la dérivée :  $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \frac{i(0)}{C}$  ; quand  $i(0) \neq 0$ , c'est une grande source d'inhomogénéité et de réponses fausses.

### ♥ Propriété E4.2 : Solution LC descendant

L'étude d'un circuit LC en décharge avec **le condensateur en convention générateur**, avec  $u_C(0) = E$  et  $i(0) = 0$ , donne :

Ici, la tension s'exprime comme un cosinus et l'intensité comme un sinus. Or,  $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$  : on dit qu'ils sont **déphasés de  $\pi/2$** .

FIGURE E4.7

### Interprétation E4.3 : Espace des phases LC (HP)

Il est utile d'observer la physique des systèmes oscillants non pas dans un espace (grandeur, temps) mais dans un espace (**grandeur, dérivée**), qui permet plus rapidement de sonder son évolution : c'est ce qu'on appelle **l'espace des phases**. Ici, avec un  $u_C$  de type cosinus et  $i$  de type sinus, l'évolution dans l'espace des phases est une **ellipse**.

Le condensateur étant initialement chargé, l'intensité est nulle. Étant donné notre convention générateur, lors de sa décharge l'intensité sera d'abord positive, et diminue jusqu'à s'annuler.

Pendant cette décharge, la bobine a stocké de l'énergie, qu'elle ré-émet alors dans le circuit et recharge le condensateur ; l'intensité est alors négative.

Comme il n'y a **pas de perte dans cette étape**, elle se répète **symétriquement** en revenant à son point de départ.

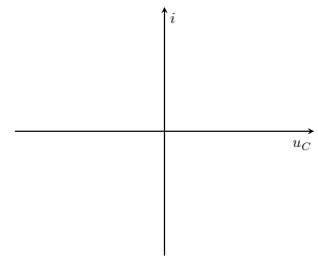


FIGURE E4.8

## II/D Bilan énergétique

### ♥ Propriété E4.3 : Bilan d'énergie LC descendant

L'énergie emmagasinée dans le circuit

est **conservée à chaque instant** et résulte de l'**échange périodique** d'énergie entre le condensateur et la bobine.

FIGURE E4.9

### ♥ Démonstration E4.3 :

Loi des mailles multipliée par  $i$  :

■

### Remarque E4.1 : Vérification conservation de l'énergie LC

On peut vérifier avec les expressions analytiques trouvées, sachant que  $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$  :

## II/E Complément : circuit LC montant

### Définition E4.3 : Circuit LC montant

- ◇ Il est constitué de l'association en série d'un générateur idéal de f.e.m.  $E$ , d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- ◇ On suppose le condensateur initialement déchargé.
- ◇ À  $t = 0$ , on allume le générateur.

Une simulation est disponible en ligne <sup>2</sup>.

FIGURE E4.10

### Propriété E4.4 : Équation et solu° LC montant

L'équation différentielle  $u_C(t)$  aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC sous échelon montant est

avec

avec, par continuité de  $u_C$  pour C et de  $i$  pour L, on a

La solution de l'équation différentielle de la tension  $u_C(t)$  d'un circuit LC sous échelon montant et l'intensité en découlant sont

### Démonstration E4.4 : Équation et solution LC montant

#### Équation

◇ On trouve  $\varphi_0$  :

◇ On trouve  $A'$  :

■

Donc

■

On obtient ensuite  $i$  avec la RCT :

■

#### Solution

Par changement de variable, on a

### Remarque E4.2 : Graphiques LC montant

On remarque aisément que  $u_C$  atteint  $2E$  par moment, ce qui pourrait paraître déroutant puisqu'on donne une tension  $E$  au système. En réalité ceci est tout à fait normal puisque  $u_L = L \frac{di}{dt}$  prend des valeurs négatives quand  $i$  diminue : la somme des deux fait bien  $E$ .

On peut réaliser un bilan d'énergie pour trouver que  $\mathcal{E}_g = CE^2(1 - \cos(\omega_0 t)) = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ , voir graphique ci-contre.

FIGURE E4.11

FIGURE E4.12

2. <https://tinyurl.com/ypagwnb6>

### III Exemple harmonique mécanique : ressort horizontal libre

#### III/A Présentation

##### ♥ Définition E4.4 : Force de HOOKE de rappel d'un ressort

On définit la force de HOOKE par :

- ◇
- ◇
- ◇

Le sens de la force dépend de la déformation. Sur le schéma ci-contre, on obtient

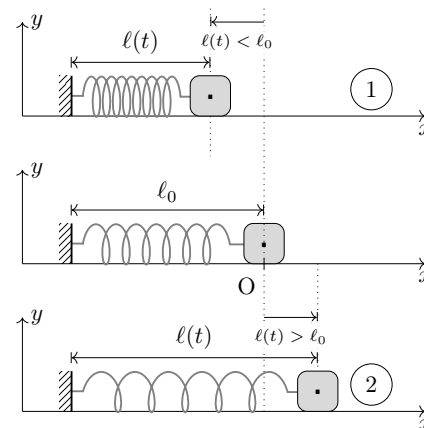


FIGURE E4.13

##### ♥ Attention E4.3 : Ressort et force de HOOKE

- 1) Il faut être **sûr-e** de l'expression de la force de rappel avant de se lancer dans la résolution du problème ; pour cela, il **faut refaire le schéma** avec  $\vec{u}_k$ , et **vérifier le signe** de la force dans les deux situations.
- 2) La **longueur à vide**  $\ell_0$  est la longueur du ressort **sans contrainte** ; ça n'est **pas forcément la longueur initiale** :

##### ♥ Définition E4.5 : Situation initiale et bilan des forces

- ◇ **Système** :
- ◇ **Référentiel** :
- ◇ **Repère** :
- ◇ **Repérage** : avec  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  la dérivée **temporelle**,

- ◇ **Longueur du ressort** :
- ◇ **Longueur initiale** :
- ◇ **Vitesse initiale** :

FIGURE E4.14

◇ **Bilan des forces** :

#### III/B Équation différentielle et solution

##### ♥ Démonstration E4.5 : Équation et solution ressort libre

La deuxième loi de NEWTON, ou **principe fondamental de la dynamique** (PFD) donne :

Soit

■

$$\boxed{1} : \quad (E4.6)$$

$$\boxed{2} :$$

$$\boxed{3} :$$

$$\boxed{4} : \quad (E4.7)$$

$$\boxed{7} : \diamond \quad (E4.8)$$

$$\diamond \quad (E4.9)$$

$$\boxed{8} : \quad \blacksquare$$



### ♥ Propriété E4.5 : Équation et solution ressort libre

La position  $x$  de la masse attachée au ressort est régie par :

avec

$\ell_0$  est donc la **longueur d'équilibre** du système.

La position  $x$  et la vitesse  $v$  ont pour expressions

avec  $x_0 = L_0 - \ell_0$  la déformation initiale.

### Important E4.3 : Analogie LC-ressort

Les **réponses** sont rigoureusement équivalentes puisque **régies par la même équation différentielle**.

Il y a oscillation du ressort autour d'une position d'équilibre, ici  $x_{\text{eq}} = \ell_0$ , comme  $u_C$  oscille autour de 0.

On associe donc  $q$  à  $x$  et  $i$  à  $v$ , étant donné que pour un condensateur  $i = \frac{dq}{dt}$  et que  $v = \frac{dx}{dt}$ .

De plus c'est la **masse** qui impose l'inertie du mouvement, comme l'**inductance** est l'inertie de l'intensité.

Finalement,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  en électrocinétique et  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  en mécanique, donc on associe  $k$  à  $C^{-1}$ .

Méca  $\longleftrightarrow$  Élec

$\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$

### Interprétation E4.4 : Espace des phases ressort libre (HP)

Le ressort lâché à  $x_0$  et  $v_0 = 0$  voit sa position diminuer et sa vitesse augmenter vers la gauche, donc de valeur négative, jusqu'à ce qu'il passe par sa position d'équilibre ( $x_{h,\text{eq}} = 0$ ) avec une vitesse extrême  $v_{\text{min}}$ , avant de se comprimer en perdant de sa vitesse.

## III/C Bilan énergétique

### ♥ Propriété E4.6 : Bilan d'énergie ressort

L'énergie mécanique est

avec

Et  $\mathcal{E}_m$  est **conservée à chaque instant**.

### ♥ Démonstration E4.6 :



### Important E4.4 : Bilan de puissance en méca

On effectue un bilan de puissance en écrivant le PFD multiplié par  $v$  :

.