Électrocinétique – chapitre 5

Oscillateurs amortis

Sommaire

Capacités exigibles

- ▢ Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
- ▢ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
- ▢ Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- ▢ Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- ▢ Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- ▢ Réaliser un bilan énergétique.
- ▢ Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.
- ▢ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

L'essentiel

I Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre

I/A Introduction

Expérience E5.1 : Visualisation expérimentale

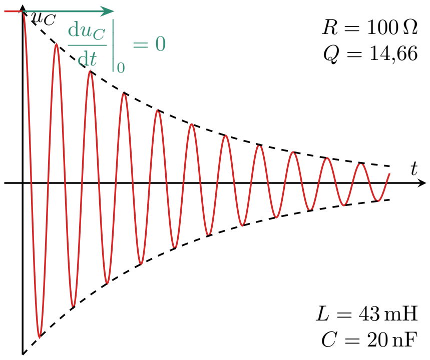
En reprenant les résultats du LC libre, nous devrions en réalité observer que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Soit le circuit RLC ci-contre, avec $L = 43\,\mathrm{mH}$ et $C = 20\,\mathrm{nF}$.

Une simulation est disponible en ligne (https://tinyurl.com/ypbwcwfs).

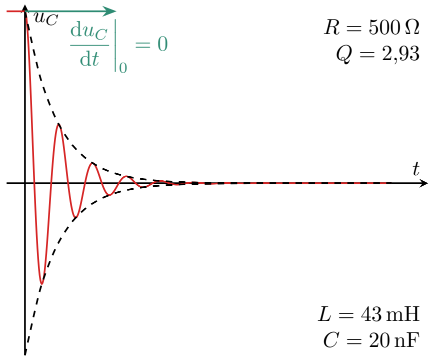
FIGURE E5.1

◇ Lorsque la **résistance est petite** : on observe **plusieurs oscillations**, de période $T \approx 184\,\mu\mathrm{s}$.

Environ 15 oscillations lorsque $R_{\mathrm{tot}} \approx 100\,\Omega$;

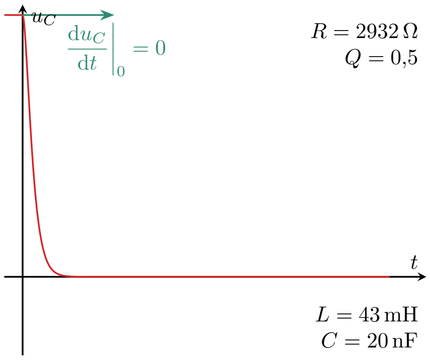


Environ 3 oscillations lorsque $R_{\mathrm{tot}} \approx 500\,\Omega$.

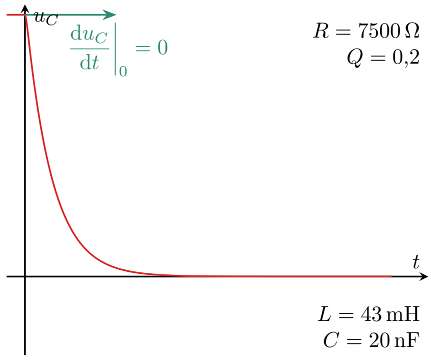


◇ Lorsque la **résistance est plus grande** : les **oscillations disparaissent**.

Lorsque $R \approx 2{,}9\,\mathrm{k\Omega}$, on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ $250\,\mu\mathrm{s}$ (à 95%).



Lorsque $R \approx 7{,}5\,\mathrm{k\Omega}$, on observe un régime transitoire plus long, d'environ $420\,\mu\mathrm{s}$.



Observation E5.1 : Réponse en tension d'un RLC

Lorsque l'on excite le système RLC, le système a deux principales réponses :

1) **Système oscillant** pour $R < R_c$, de pseudo-période (*pseudo* car le signal diminue.) **supérieure à** T_0 **propre** ;
2) **Système non-oscillant** pour $R > R_c$: le transitoire **augmente avec** R.

Important E5.1 : Équation différentielle amorti

Un oscillateur amorti sur $y(t)$ répond à :

avec $\left\{ \right.$

◇

◇

◇

Remarque E5.1 : Analyse de l'équation

Par lecture de cette équation, Q est **sans dimension** pour qu'on retrouve que ω_0 s'exprime en s^{-1} car $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est de dimension $[x] \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

De plus, on remarque que **plus Q est élevé**, plus le terme d'ordre 1 est négligeable devant les autres, donc **plus on se rapproche de l'harmonique**. Le **facteur de qualité** traduit donc à quel point le système est **idéal**.

Propriété E5.1 : Régimes de solution

Le **polynôme caractéristique** est un trinôme :

(E5.1)

de discriminant (E5.2)

On a alors 3 régimes de solutions :

- **Q > 1/2** :
- **Q = 1/2** :
- **Q < 1/2** :

Démonstration E5.1 : Régimes de solutions

On trouve le polynôme caractéristique par l'équation **homogène** :

■

Ainsi,

On relie $\Delta \lesseqgtr 0$ à $Q \gtreqless 1/2$:

Important E5.2 : Solutions oscillateur amorti

	Racines	Solution
Pseudo-T.	$r_\pm = -\frac{1}{\tau} \pm \mathrm{j}\Omega \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \\ \Omega = \frac{1}{\tau}\sqrt{4Q^2-1} \end{cases}$	$y_h(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}_{\text{partie décroissante}} \cdot \underbrace{[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]}_{\text{partie oscillante}}$
Crit.	$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0 \quad \text{car} \quad Q = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2Q = 1$	$y_h(t) = (At+B)\exp(-\omega_0 t)$
Apér.	$r_\pm = \frac{1}{\tau}\left(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$	$y_h(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}$

I/B Présentation et bilan énergétique

Définition E5.1 : Circuit RLC libre

- Il est constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- **On suppose le condensateur initialement chargé**.
- À $t = 0$, on ferme l'interrupteur : le circuit est en régime libre.

Figure E5.2

Propriété E5.2 : Bilan de $\mathscr{P}$ RLC libre

L'énergie emmagasinée dans le circuit est progressivement dissipée par effet JOULE dû à la résistance :

avec $\mathscr{E}_{\text{elec}} = \mathscr{E}_C + \mathscr{E}_L = \frac{1}{2}C{u_C}^2 + \frac{1}{2}Li^2$.

Démonstration E5.2 : Bilan $\mathscr{P}$ RLC libre

Interprétation E5.1 : Évolution énergétique RLC série

On a donc bien une perte d'énergie à cause de la dissipation dans la résistance. Il y aura donc progressivement une perte de la tension de u_C, d'où l'amortissement.

I/C Équation différentielle du circuit

Démonstration E5.3 : Équation différentielle RLC libre

Équation différentielle

On détermine l'expression de Q par identification :

Conditions initiales

FIGURE E5.3 – En 0^-

FIGURE E5.4 – En 0^+

Propriété E5.3 : Équation différentielle RLC libre

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC en régime libre est

avec

- ω_0 la pulsation propre
- Q le facteur de qualité

Par **continuité de la tension aux bornes d'un condensateur** et **continuité de l'intensité traversant une bobine**, on trouve les conditions initiales :

I/D Résolutions pour chaque cas

I/D) 1 Cas $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$: régime pseudo-périodique

I/D) 1.1 Solution de l'équation

Démonstration E5.4 : Solution pseudo-périodique

1 Déjà homogène

2

3

Ainsi,

d'où les définitions de τ et Ω : $\boxed{\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}}$ et $\boxed{\Omega = \dfrac{1}{\tau}\sqrt{4Q^2-1}}$

4

(E5.3)

7 ◇ (E5.4)

◇ (E5.5)

(E5.6)

8 ■

Propriété E5.4 : Solution pseudo-périodique

Pour un facteur de qualité $Q > 1/2$, u_C s'exprime par

$$\boxed{u_C(t) = E\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \\ \Omega = \frac{1}{\tau}\sqrt{4Q^2-1} \end{cases}$$

Le signal est alors **sinusoïdal amorti**, de période

d'enveloppes $f_\pm(t) = \pm E\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

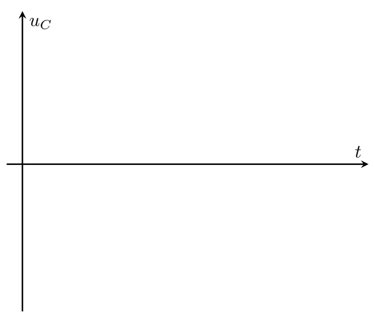


Figure E5.5

Interprétation E5.2 : Solution amortie par intuition

La **solution du polynôme caractéristique** s'écrit alors comme la **somme de la solution d'ordre 1 et de la solution harmonique**, mais de **pulsation différente** :

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\Omega \equiv \text{« } \frac{-1}{\tau} \pm \mathrm{j}\omega_0 \text{ »} \quad \text{soit} \quad \boxed{r_\pm = r_{\text{ordre 1}} + r_{\text{ordre 2 harmonique}}}$$

Ceci n'est pas très étonnant puisque l'EDLHC d'ordre 2 amortie est la somme d'une EDLHC d'ordre 2 harmonique et d'une EDLHC d'ordre 1. Avec les propriétés de l'exponentielle ($\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$), il est donc naturel que la solution amortie soit le **produit** des solutions d'ordre 1 et d'ordre 2.

Remarque E5.2 : Forme du résultat

On peut tout à fait écrire le résultat sous la forme $u_C(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}A'\cos(\Omega t + \varphi_0)$, avec A' et φ_0 à déterminer.

I/D) 1.2 Régime transitoire

Propriété E5.5 : t_{95} pseudo-périodique

Le temps de réponse à 95% est atteint à :

Ainsi, Q correspond au nombre d'oscillations observées.

Un calcul précis montre que le régime le plus court est atteint pour $Q \approx 0{,}72$, mais il y a alors un **dépassement de la consigne**.

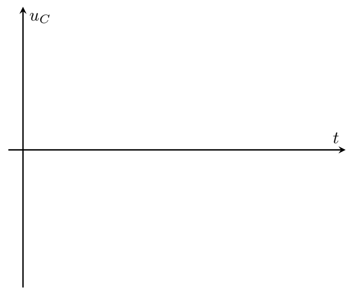


Figure E5.6 – Plus court transitoire **avec dépassement**.

Démonstration E5.5 : t_{95} pseudo-périodique

Il suffit de chercher t_{95} tel que l'**enveloppe** soit réduite de 95%, soit :

Or, $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ donc

■

Implication E5.1 : Résultat $R \to 0 \Leftrightarrow Q \to \infty$

On remarque que quand $R \to 0$, alors $Q \to \infty$: on a donc des oscillations « infinies », puisqu'alors :

$$\boxed{\Omega \approx \omega_0} \quad \text{donc} \quad \boxed{T \approx T_0} \quad \text{mais aussi} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 u_C = 0} \quad \text{donc} \quad \boxed{u_C(t) = E\cos(\omega_0 t)}$$

On retrouve toutes les caractéristiques de la situation harmonique, sans perte d'énergie par effet Joule.

Interprétation E5.3 : Espace des phases pseudo-pér. (HP)

Contrairement à la situation harmonique, le tracé de la solution dans l'espace (u_C, i) n'est **pas symétrique par inversion du temps** : la dissipation par effet Joule diminue l'énergie du système, et la **tension diminue progressivement**. On observera donc une **spirale décroissante** avec beaucoup d'oscillations quand les amortissements ne sont pas trop élevés, et de moins en moins quand Q diminue.

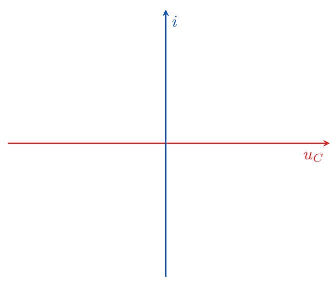


Figure E5.7 – Faible amortissement

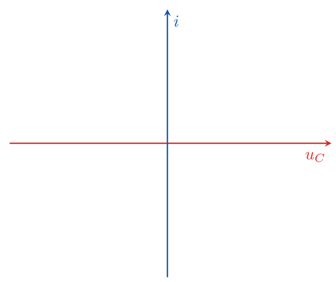


Figure E5.8 – Moyen amortissement

I/D) 1.3 Décrément logarithmique

Définition E5.2 : Décrément logarithmique

Soit $u_{C,\text{eq}} = 0$ la valeur d'équilibre de $u_C(t)$, telle que $u_C(t) = u_{C,\text{eq}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(A'\cos(\Omega t + \varphi_0)\right)$. Le **décrément logarithmique** entre 2 instants séparés de n périodes s'exprime :

avec n le nombre de périodes utilisées pour le calcul. Il permet de **quantifier l'amortissement** : plus δ est grand, plus l'amortissement est important.

Propriété E5.6 : Décrément et facteur de qualité

Le décrément logarithmique et le facteur de qualité sont reliés par :

Démonstration E5.6 : Décrément et facteur de qualité

On développe le calcul en commençant par le dénominateur :

Ainsi, avec la définition du décrément :

■

■

I/D) 2 Cas $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$: régime critique

I/D) 2.1 Solution de l'équation

Démonstration E5.7 : Solution critique

La seule racine de l'équation caractéristique (E5.1) est double, et vaut

soit

◇ On trouve B :

◇ On trouve A :

$\Rightarrow$

Propriété E5.7 : Solution critique

Pour un facteur de qualité $Q = \frac{1}{2}$, u_C s'exprime par

et on n'observe **pas une oscillation** : au facteur de qualité critique, l'amortissement est suffisamment important pour empêcher u_C de passer sous 0.

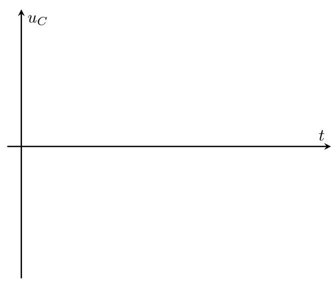


Figure E5.9

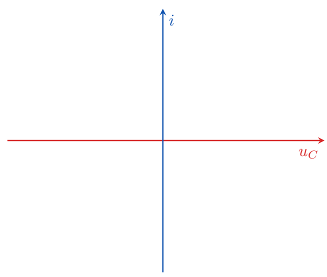


Figure E5.10

I/D) 2.2 Régime transitoire

Démonstration E5.8 : Régime transitoire critique

En négligeant le terme linéaire en t devant la décroissance exponentielle, on a

Propriété E5.8 : Régime transitoire critique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

C'est le **régime le plus court sans dépassement**.

I/D) 3 Cas $\Delta > 0$: régime apériodique

I/D) 3.1 Solution de l'équation

Démonstration E5.9 : Solution apériodique

Les racines de l'équation caractéristique (??) sont réelles, et on a

Dans la forme homogène, on a donc

◇ Avec la première CI :

◇ Avec la seconde CI :

En combinant, on trouve

et ■

Propriété E5.9 : Solution apériodique

Pour un facteur de qualité $Q < 1/2$, u_C s'exprime par

et on n'observe **pas une oscillation**. Le régime transitoire est *plus long* que pour $Q = 1/2$: l'intensité est plus faible.

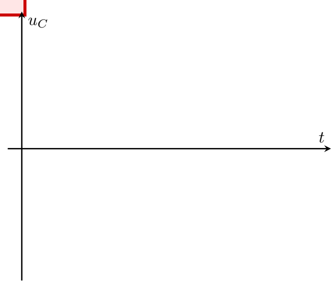


Figure E5.11

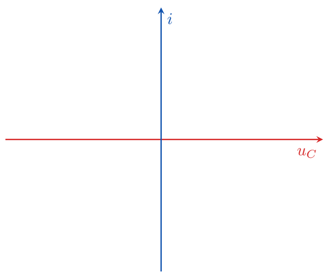


Figure E5.12

Remarque E5.3 : Forme de solution apériodique

Selon les besoins, on peut écrire la solution sous une autre forme. Notamment, on peut montrer qu'elle s'écrit

$$u_C(t) = E\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + \frac{2}{\tau\sqrt{\Delta}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right)$$

I/D) 3.2 Régime transitoire

Démonstration E5.10 : Régime transitoire apériodique

La décroissance sera guidée par l'exponentielle la « **moins décroissante** ». On cherche donc à savoir laquelle, on compare donc r_- et r_+. On remarque d'abord que les deux racines sont négatives (d'où la décroissance exponentielle) :

ce qui est vrai.

Or,

On estime alors la durée du régime transitoire à $\boxed{t_{95} = \tau_+ \ln(20)}$ (cf. démonstration 5.5.

Pour $Q \ll 1$, on utilise $\boxed{\sqrt{1+x} \underset{x \ll 1}{\sim} 1 + x/2}$ pour simplifier r_+ :

Avec $\ln(20) \approx \pi$:

Propriété E5.10 : Régime transitoire apériodique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

Implication E5.2 : Résultat $R \to \infty \Leftrightarrow Q \to 0$

Quand $Q \longrightarrow 0$, on peut négliger le terme d'ordre 2 dans l'équation différentielle devant le terme d'ordre 1 ; on se retrouve alors avec une équation différentielle du premier ordre, ce qui est cohérent avec l'amortissement exponentiel !

II Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides

II/A Présentation

Définition E5.3 : Situation initiale et bilan des forces

◇ **Système** :

◇ **Référentiel** :

◇ **Repère** :

◇ **Repérage** :

◇ **Longueur du ressort** :

◇ **Position initiale** :

◇ **Vitesse initiale** :

FIGURE E5.13

◇ **Bilan des forces** :

II/B Équation différentielle

Démonstration E5.11 : Équation ressort amorti

On identifie ω_0 et Q :

■

Propriété E5.11 : Équation ressort amorti

La position x de la masse est régie par :

ℓ_0 **reste** donc la longueur d'équilibre du système.

◇

◇

Important E5.3 : Analogie RLC-ressort amorti

Ici aussi, les deux systèmes sont **régis par la même équation différentielle**. On observe une **oscillation amortie** du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x_{\text{eq}} = \ell_0$.

Ici, c'est le coefficient de frottements α qui dissipe l'énergie sous forme de chaleur : on l'associe à R.

Élec $\longleftrightarrow$ Méca
$\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$

II/C Bilan de puissance

Propriété E5.12 : $\mathscr{P}$ ressort

Dans le système masse-ressort horizontal avec frottements fluides, l'énergie mécanique diminue proportionnellement au coefficient de friction α :

donc

Démonstration E5.12 : $\mathscr{P}$ ressort

À partir du PFD $\times v$:

■

II/D Solutions

Implication E5.3 : Solutions ressort

On a les mêmes solutions en changeant u_C par x et E par L_0