

Oscillateurs harmoniques

Sommaire

I Introduction	2
I/A Signal sinusoïdal et pulsation	2
I/B Équation différentielle et changements de variable	2
II Circuit LC régime libre	3
II/A Présentation	3
II/B Équation différentielle du circuit	4
II/C Résolution de l'équation différentielle et graphique	4
II/D Bilan énergétique	5
II/E Complément : circuit LC montant	6
III Exemple harmonique mécanique : ressort horizontal libre	7
III/A Présentation	7
III/B Équation différentielle et solution	7
III/C Bilan énergétique	8

Capacités exigibles

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ☐ Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. ☐ Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; l'écrire sous forme canonique afin d'identifier la pulsation propre | <ul style="list-style-type: none"> ☐ Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique compte tenu des conditions initiales. ☐ Réaliser un bilan énergétique. ☐ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. |
|--|--|

L'essentiel

Définitions

- | | |
|--|---|
| ☐ E4.1 : Signal sinusoïdal | 2 |
| ☐ E4.2 : Circuit LC libre | 3 |
| ☐ E4.3 : Circuit LC montant | 6 |
| ☐ E4.4 : Force de HOOKE | 7 |
| ☐ E4.5 : Situation initiale et bilan des forces | 7 |

Propriétés

- | | |
|--|---|
| ☐ E4.1 : Équation diff. LC libre | 4 |
| ☐ E4.2 : Solution LC descendant | 5 |
| ☐ E4.3 : Bilan d'énergie LC descendant | 5 |
| ☐ E4.4 : Équation et solution LC montant | 6 |
| ☐ E4.5 : Équation et solution ressort libre | 8 |
| ☐ E4.6 : Bilan d'énergie ressort | 8 |

Remarques

- | | |
|---|---|
| ☐ E4.1 : Vérification conservation de l'énergie LC | 5 |
| ☐ E4.2 : Graphiques LC montant | 6 |

Erreurs communes

- | | |
|---|---|
| ☐ E4.1 : Amplitude et déphasage | 2 |
| ☐ E4.2 : Conditions initiales et évaluation en 0 | 5 |
| ☐ E4.3 : Ressort et force de HOOKE | 7 |

Démonstrations

- | | |
|--|---|
| ☐ E4.1 : Équation différentielle LC libre | 4 |
| ☐ E4.2 : Solutions LC série descendant | 4 |
| ☐ E4.3 : Bilan d'énergie LC descendant | 5 |
| ☐ E4.4 : Équation et solution LC montant | 6 |
| ☐ E4.5 : Équation et solution ressort libre | 7 |
| ☐ E4.6 : Bilan d'énergie ressort | 8 |

Interprétations

- | | |
|--|---|
| ☐ E4.1 : Pulsation et représentation complexe | 2 |
| ☐ E4.2 : Changements de variable | 3 |
| ☐ E4.3 : Espace des phases LC (HP) | 5 |
| ☐ E4.4 : Espace des phases ressort libre (HP) | 8 |

Applications

- | | |
|---|---|
| ☐ E4.1 : Changements de variable | 3 |
| ☐ E4.2 : Unité de ω_0 | 4 |

Points importants

- | | |
|--|---|
| ☐ E4.1 : Équation différentielle harmonique | 2 |
| ☐ E4.2 : Solutions harmoniques | 2 |
| ☐ E4.3 : Analogie LC-ressort | 8 |
| ☐ E4.4 : Bilan de puissance en méca | 8 |

I Introduction

I/A Signal sinusoïdal et pulsation

Définition E4.1 : Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est un signal de la forme

$$s(t) = A \cos(\phi(t)) \Leftrightarrow s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

avec $A = \frac{|s_{\max} - s_{\min}|}{2}$ l'amplitude

et $\phi(t) = \omega t + \varphi_0$ la phase instantanée

où ω la pulsation et φ_0 la phase initiale

Unités $[\varphi_0] = \text{rad}$ et $[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

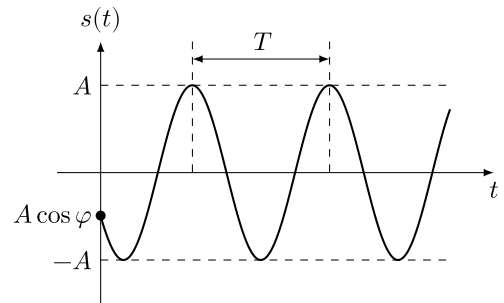


FIGURE E4.1

♥ Attention E4.1 : Amplitude et déphasage

Une amplitude est **forcément** positive ; une amplitude négative traduit un **ajout de π** à la phase initiale :

$$-A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

Interprétation E4.1 : Pulsation et représentation complexe

La pulsation représente la **vitesse de variation de la phase** : pour un tour de 2π rad en la période T , on a

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{similaire à} \quad v = \frac{d}{t}$$

Par la nature de l'exponentielle, on peut plutôt représenter $s(t)$ à l'aide d'une exponentielle complexe :

$$\underline{s}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi_0)} \Rightarrow s(t) = \text{Re}(\underline{s}(t))$$

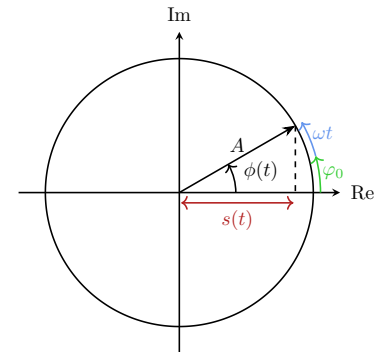


FIGURE E4.2

I/B Équation différentielle et changements de variable

Important E4.1 : Équa° différentielle

Un oscillateur harmonique sur $y(t)$ répond à :

$$\left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_t + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_{\text{eq}}$$

◇ y_{eq} **position d'équilibre**, ω_0 pulsation **propre**.

◇ $y(t_0) = y_0$ et $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} = v_0$ **conditions initiales**.

Important E4.2 : Solu° harmoniques

La solution générale s'écrit de manière équivalente :

$$y(t) = A' \cos(\omega_0(t - t_0) + \varphi_0) + y_{\text{eq}} \\ \Leftrightarrow y(t) = A \cos(\omega_0(t - t_0)) + B \sin(\omega_0(t - t_0)) + y_{\text{eq}}$$

◇ t_0 le **temps initial** ;

◇ (A', φ_0) ou (A, B) des *constantes d'intégration*, reliées à y_0 et v_0 .

♥ Outils E4.1 : Changements de variable

Solution particulière

Soit $y(t)$: $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_{\text{eq}}$

alors $x(t) = y(t) - y_{\text{eq}}$ est solution de

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{E4.1})$$

Temps initial

$$\text{soit } \begin{cases} t' = t - t_0 \\ dt' = dt \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(t') = x(t' + t_0) = x(t) \\ u(0) = x(t_0) = y_0 - y_{\text{eq}} \\ \left. \frac{du}{dt'} \right|_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} = v_0 \end{cases} \\ \Rightarrow \left. \frac{d^2 u}{dt'^2} \right|_{t'} + \omega_0^2 u(t') = \left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_t + \omega_0^2 x(t) \stackrel{(\text{E4.1})}{=} 0$$



♥ Interprétation E4.2 : Changements de variable

On peut donc se **ramener à une équation homogène** en prenant la **position d'équilibre** comme étant la **solution particulière**, et se **ramener à un temps initial nul** en décalant la base de temps de t_0 .

Dans toute la suite nous travaillerons donc en toute généralité pour un temps initial nul.



Application E4.1 : Changements de variable

Résoudre l'équation du circuit RL montant par changements de variables.

Soit $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{1}{\tau} \frac{E}{R}$ avec $i(t_0) = 0$

Posons $t' = t - t_0$ et $i_h(t') = i(t) - \frac{E}{R} \Rightarrow \frac{di_h}{dt'} + \frac{i_h}{\tau} = 0$

Ainsi, $i_h(t') = K e^{-\frac{t'}{\tau}}$ avec $i_h(0) = \underbrace{i(t_0)}_{=0} - \frac{E}{R} = K$ soit $i_h(t') = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t'}{\tau}}$

Donc $i(t) = i_h(t') + \frac{E}{R} \Leftrightarrow i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right)$

II Circuit LC régime libre

II/A Présentation



♥ Définition E4.2 : Circuit LC libre

- ◇ Il est constitué de l'association en série d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- ◇ On suppose le condensateur initialement chargé à la tension E .
- ◇ À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

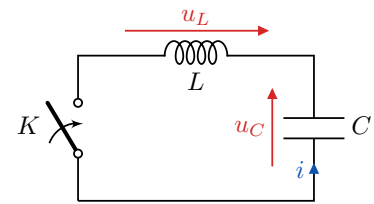


FIGURE E4.3

Expérience E4.1 : Visualisation expérimentale

On observe la tension $u_C(t)$ avec un oscilloscope. Une simulation est disponible en ligne ¹.

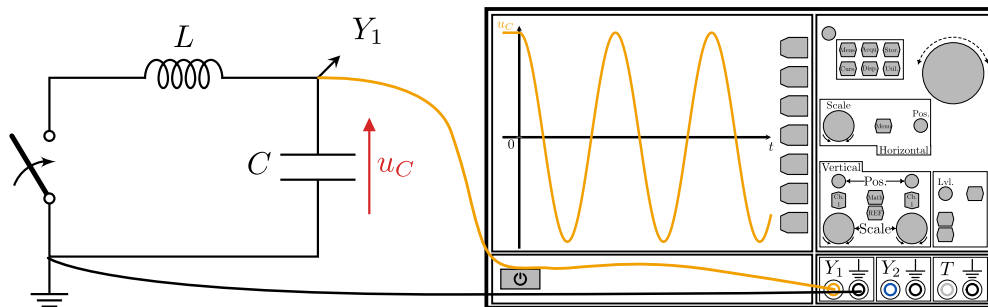


FIGURE E4.4

On remarque que la tension aux bornes du condensateur réalise des **oscillations sinusoïdales**. En fonction des **valeurs de L et C**, on trouve des **périodes différentes**.

Observation E4.1 : Réponse en tension du LC libre

Lorsqu'on laisse libre le système LC, la tension aux bornes du condensateur **oscille** de façon **régulière et sinusoïdale**, avec une **fréquence** qui ne **dépend pas de l'amplitude** de l'excitation mais **dépend** des caractéristiques de l'oscillateur (**capacité** du condensateur et **inductance** de la bobine).

1. <https://tinyurl.com/LCreglibre>

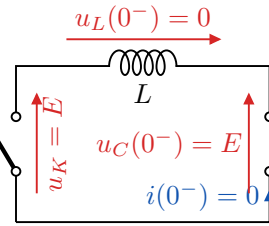
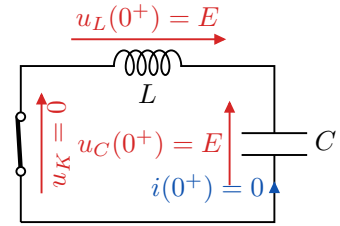
II/B Équation différentielle du circuit

♥ Démonstration E4.1 : Équation différentielle LC libre

Équation différentielle

$$\begin{aligned}
 u_C &= u_L \\
 \Leftrightarrow u_C &= L \frac{di}{dt} \quad \left. \begin{array}{l} u_L = L \frac{di}{dt} \\ i = -C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\} \text{et } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \blacksquare \\
 \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C &= 0
 \end{aligned}$$

Conditions initiales

FIGURE E4.5 – En 0^- FIGURE E4.6 – En 0^+

♥ Propriété E4.1 : Équation diff. LC libre

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC en régime libre est

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (\text{E4.2})$$

ou, $\times C$:

$$\boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0}$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et continuité de l'intensité traversant une bobine, on trouve les conditions initiales :

$$\boxed{\begin{array}{l} u_C(0^-) = u_C(0^+) = E \\ i(0^-) = i(0^+) = 0 \end{array}}$$

ou

$$\boxed{\begin{array}{l} q(0^-) = q(0^+) = CE \\ \left. \frac{dq}{dt} \right|_{0^-} = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{0^+} = 0 \end{array}}$$

Application E4.2 : Unité de ω_0

Montrer, par analyse dimensionnelle, que ω_0 est homogène à l'inverse d'un temps.

Analyse directe

$$[\omega_0^2] = \left[\frac{1}{LC} \right] = \left[\frac{R}{LRC} \right] = \left[\frac{L}{R} \right]^{-1} \cdot \underbrace{[RC]^{-1}}_{s^{-1}} = s^{-2} \Leftrightarrow \boxed{[\omega_0] = s^{-1}} \quad \blacksquare$$

Analyse indirecte

L'ED impose $\left[\frac{d^2 u_C}{dt^2} \right] = [\omega_0^2 u_C] \Leftrightarrow \frac{[u_C]}{[dt]^2} = [\omega_0^2] [u_C] \Leftrightarrow [\omega_0^2] = [t]^{-2} \quad \blacksquare$

II/C Résolution de l'équation différentielle et graphique

♥ Démonstration E4.2 : Solutions LC série descendant

2 Forme générique : $u_C(t) = K \exp(rt) \stackrel{(\text{E4.2})}{\Rightarrow} r^2 \times K e^{rt} + \omega_0^2 K e^{rt} = 0$

3 Polynôme caractéristique : $r^2 = -\omega_0^2 \Leftrightarrow r_{\pm} = \pm j\omega_0$

4 Forme homogène : $u_C(t) = K_1 e^{-j\omega_0 t} + K_2 e^{j\omega_0 t} \stackrel{\text{F07}}{=} A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (\text{E4.3})$

7 Conditions initiales :

◇ $u_C(0) \stackrel{\text{CI}}{=} E \stackrel{(\text{E4.3})}{=} A \cos(0) + B \sin(0) = A \Leftrightarrow \boxed{A = E} \quad (\text{E4.4})$

◇ $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \left[- \right] \frac{i(0)}{C} \stackrel{\text{CI}}{=} 0 \stackrel{(\text{E4.3})}{=} -A\omega_0 \underbrace{\sin(0)}_{=0} + B\omega_0 \underbrace{\cos(0)}_{=1} = B\omega_0 \Leftrightarrow \boxed{B = 0} \quad (\text{E4.5})$

8 Conclusion : $(\text{E4.4}) \quad \text{et} \quad (\text{E4.5}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_C(t) = E \cos(\omega_0 t)} \quad \blacksquare$

et $i = \left[- \right] C \frac{du_C}{dt} \Leftrightarrow \boxed{i(t) = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)} \quad \blacksquare$

♥ Attention E4.2 : Conditions initiales et évaluation en 0

Il ne faut **pas confondre** la fonction dérivée évaluée en 0, et la dérivée de la fonction évaluée en 0 :

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_0 \neq \frac{df(0)}{dt} \equiv f'(0) \neq (f(0))' \quad \text{car} \quad f(0) \text{ est un nombre, donc } \frac{df(0)}{dt} = 0$$

Ça n'est pas parce qu'une fonction est nulle en un point que sa dérivée en ce point est nulle !

De plus, pour la **seconde condition initiale**, il ne faut **pas oublier de diviser par C** la dérivée : $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \frac{i(0)}{C}$; quand $i(0) \neq 0$, c'est une grande source d'inhomogénéité et de réponses fausses.

♥ Propriété E4.2 : Solution LC descendant

L'étude d'un circuit LC en décharge avec **le condensateur en convention générateur**, avec $u_C(0) = E$ et $i(0) = 0$, donne :

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E \cos(\omega_0 t) \\ i(t) &= CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Ici, la tension s'exprime comme un cosinus et l'intensité comme un sinus. Or, $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$: on dit qu'ils sont **déphasés de $\pi/2$** .

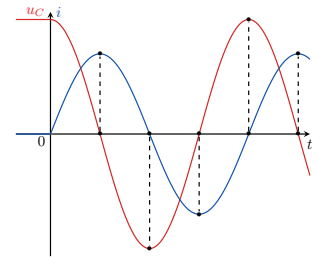


FIGURE E4.7

Interprétation E4.3 : Espace des phases LC (HP)

Il est utile d'observer la physique des systèmes oscillants non pas dans un espace (grandeur, temps) mais dans un espace (**grandeur, dérivée**), qui permet plus rapidement de sonder son évolution : c'est ce qu'on appelle **l'espace des phases**. Ici, avec un u_C de type cosinus et i de type sinus, l'évolution dans l'espace des phases est une **ellipse**.

Le condensateur étant initialement chargé, l'intensité est nulle. Étant donné notre convention générateur, lors de sa décharge l'intensité sera d'abord positive, et diminue jusqu'à s'annuler.

Pendant cette décharge, la bobine a stocké de l'énergie, qu'elle ré-émet alors dans le circuit et recharge le condensateur ; l'intensité est alors négative.

Comme il n'y a **pas de perte dans cette étape**, elle se répète **symétriquement** en revenant à son point de départ.

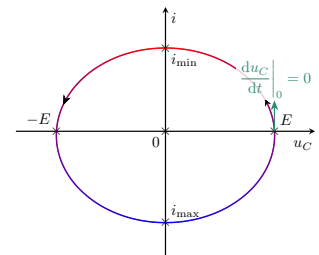


FIGURE E4.8

II/D Bilan énergétique

♥ Propriété E4.3 : Bilan d'énergie LC descendant

L'énergie emmagasinée dans le circuit

$$\mathcal{E}_{\text{elec}}(t) = \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \mathcal{E}(0)$$

est **conservée à chaque instant** et résulte de l'**échange périodique** d'énergie entre le condensateur et la bobine.

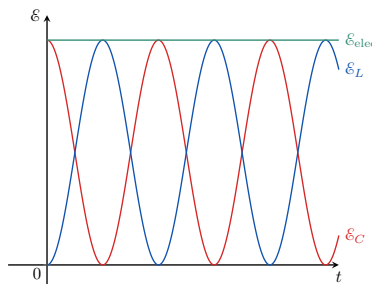


FIGURE E4.9

♥ Démonstration E4.3 :

Loi des mailles multipliée par i :

$$\begin{aligned} u_L i &= u_C i \\ \Leftrightarrow u_C \cdot C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} \cdot i &= 0 & \left. \begin{aligned} i &= -C \frac{du_C}{dt} \\ \text{et } u_L &= L \frac{di}{dt} \end{aligned} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) &= 0 & \left. \begin{aligned} f \cdot \frac{df}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} f^2 \right) \end{aligned} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_{\text{elec}}}{dt} &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque E4.1 : Vérification conservation de l'énergie LC

On peut vérifier avec les expressions analytiques trouvées, sachant que $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C(t) &= \frac{1}{2} C u_C(t)^2 = \frac{1}{2} C E^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2} L i(t)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{L C^2 \omega_0^2}_{=C} E^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}(t) &= \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2} C E^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) = \frac{1}{2} C E^2 = \text{cte} = \mathcal{E}_C(0) \end{aligned}$$

II/E Complément : circuit LC montant

Définition E4.3 : Circuit LC montant

- Il est constitué de l'association en série d'un générateur idéal de f.e.m. E , d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- On suppose le condensateur initialement déchargé.
- À $t = 0$, on allume le générateur.

Une simulation est disponible en ligne ².

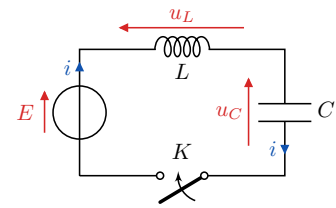


FIGURE E4.10

Propriété E4.4 : Équation et solution LC montant

L'équation différentielle $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC sous échelon montant est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

avec, par continuité de u_C pour C et de i pour L, on a

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad i(0^-) = i(0^+) = 0$$

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit LC sous échelon montant et l'intensité en découlant sont

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E(1 - \cos(\omega_0 t)) \\ i(t) &= CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Démonstration E4.4 : Équation et solution LC montant

Équation

$$\begin{aligned} u_L + u_C &= E \\ \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C &= E & \begin{cases} u_L = L \frac{di}{dt} \\ \text{et } i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C &= \frac{1}{LC} E & \begin{cases} \div LC \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C &= \omega_0^2 E \end{aligned}$$

Solution

Par changement de variable, on a

$$u_{C,h}(t) = u_C(t) - E = A' \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- On trouve φ_0 :

$$\left. \frac{du_{C,h}}{dt} \right|_0 = \frac{\overbrace{i(0)}^{=0}}{C} = 0 = -A'\omega_0 \sin(\varphi_0) \Leftrightarrow \boxed{\varphi_0 = 0}$$

- On trouve A' :

$$u_{C,h}(0) = \underbrace{u_C(0)}_{=0} - E = A' \cos(0) \Rightarrow \boxed{A = -E}$$

Donc

$$\boxed{u_C(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))}$$

On obtient ensuite i avec la RCT :

$$\boxed{i(t) = C \frac{du_C}{dt} = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)}$$

Remarque E4.2 : Graphiques LC montant

On remarque aisément que u_C atteint $2E$ par moment, ce qui pourrait paraître déroutant puisqu'on donne une tension E au système. En réalité ceci est tout à fait normal puisque $u_L = L \frac{di}{dt}$ prend des valeurs négatives quand i diminue : la somme des deux fait bien E .

On peut réaliser un bilan d'énergie pour trouver que $\varepsilon_g = CE^2(1 - \cos(\omega_0 t)) = \varepsilon_C + \varepsilon_L$, voir graphique ci-contre.

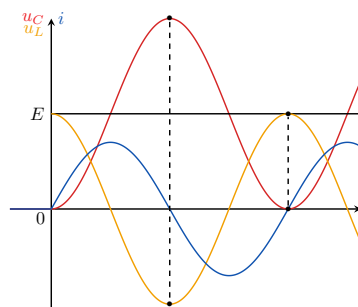


FIGURE E4.11

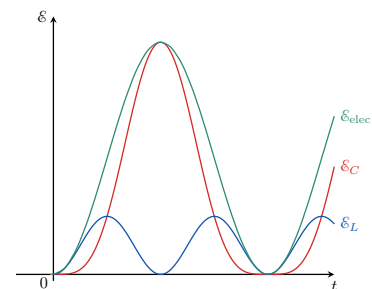


FIGURE E4.12

2. <https://tinyurl.com/ypagwnb6>

III Exemple harmonique mécanique : ressort horizontal libre

III/A Présentation

♥ Définition E4.4 : Force de HOOKE de rappel d'un ressort

On définit la force de HOOKE par :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_k$$

- ◇ $k > 0$ la **constante de raideur** en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$;
- ◇ ℓ_0 sa **longueur à vide**, c'est-à-dire **sans contrainte** ;
- ◇ $\vec{u}_k$ un vecteur unitaire ($\|\vec{u}_k\| = 1$) dirigé **du socle vers le point d'application** de la force.

Le sens de la force dépend de la déformation. Sur le schéma ci-contre, on obtient

$$\vec{F} = \boxed{-}k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x$$

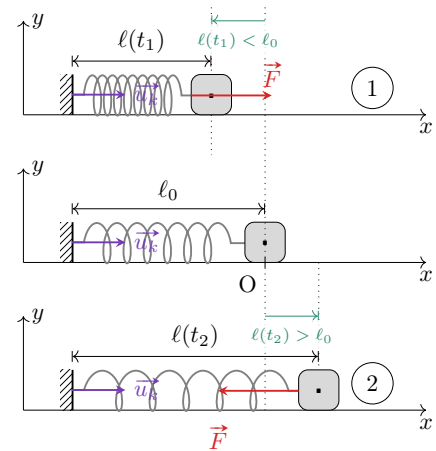


FIGURE E4.13

♥ Attention E4.3 : Ressort et force de HOOKE

- 1) Il faut être **sûr-e** de l'expression de la force de rappel avant de se lancer dans la résolution du problème ; pour cela, il **faut refaire le schéma** avec $\vec{u}_k$, et **vérifier le signe** de la force dans les deux situations.
- 2) La **longueur à vide** ℓ_0 est la longueur du ressort **sans contrainte** ; ça n'est **pas forcément la longueur initiale** :

$$\ell_0 \neq \ell(0)$$

♥ Définition E4.5 : Situation initiale et bilan des forces

- ◇ **Système** : {point M} de masse m
- ◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
- ◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (voir schéma)
- ◇ **Repérage** : avec $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ la **dérivée temporelle**,

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u}_x ; \vec{v} = \dot{x}(t)\vec{u}_x ; \vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{u}_x$$

- ◇ **Longueur du ressort** : $\ell(t) = x_M(t) - x_O = x(t)$
- ◇ **Position initiale** : $x(0) = L_0 > 0$
- ◇ **Vitesse initiale** : $\vec{v}(0) = \vec{0}$

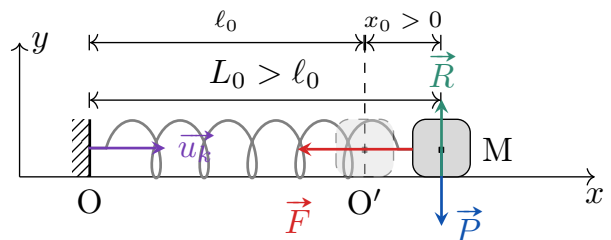


FIGURE E4.14

◇ Bilan des forces :

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$

Réaction $\vec{R} = R\vec{u}_y$

HOOKE $\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x$

III/B Équation différentielle et solution

♥ Démonstration E4.5 : Équation et solution ressort libre

La deuxième loi de NEWTON, ou **principe fondamental de la dynamique** (PFD) donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}(t)\vec{u}_x = -mg\vec{u}_y + R\vec{u}_y - \underbrace{k(\ell(t) - \ell_0)}_{=x(t)}\vec{u}_x$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}(t) + kx(t) = k\ell_0$$

Soit

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}\ell_0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \ell_0$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Canonique ■

$$[1] : \quad x_h(t) = x(t) - \ell_0 \quad \text{tel que} \quad \ddot{x}_h(t) + \omega_0^2 x_h(t) = 0 \quad (\text{E4.6})$$

$$[2] : \quad x_h(t) = K \exp(rt) \stackrel{(\text{E4.6})}{\Rightarrow} r^2 \times K e^{rt} + \omega_0^2 K e^{rt} = 0$$

$$[3] : \quad r^2 = -\omega_0^2 \Leftrightarrow r_{\pm} = \pm j\omega_0$$

$$[4] : \quad x_h(t) = K_1 e^{-j\omega_0 t} + K_2 e^{j\omega_0 t} \stackrel{\text{F07}}{=} A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (\text{E4.7})$$

$$[7] : \diamond \quad x_h(0) = x(0) - \ell_0 \stackrel{\text{CI}}{=} L_0 - \ell_0 \stackrel{(\text{E4.7})}{=} A \cos(0) + B \sin(0) = A \Leftrightarrow A = L_0 - \ell_0 = x_0 \quad (\text{E4.8})$$

$$\diamond \quad \dot{x}(0) = v_0 \stackrel{\text{CI}}{=} 0 \stackrel{(\text{E4.7})}{=} -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) = B\omega_0 \Leftrightarrow B = 0 \quad (\text{E4.9})$$

$$[8] : \quad (\text{E4.8}) \quad \text{et} \quad (\text{E4.9}) \quad \Rightarrow \quad x_h(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow x(t) = \ell_0 + x_0 \cos(\omega_0 t) \quad \blacksquare$$

$$\text{et} \quad v(t) = \dot{x}(t) \Leftrightarrow v(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad \blacksquare$$

♥ Propriété E4.5 : Équation et solution ressort libre

La position x de la masse attachée au ressort est régie par :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ℓ_0 est donc la **longueur d'équilibre** du système.

La position x et la vitesse v ont pour expressions

$$\begin{aligned} x(t) &= \ell_0 + x_0 \cos(\omega_0 t) \\ v(t) &= -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

avec $x_0 = L_0 - \ell_0$ la déformation initiale.

Important E4.3 : Analogie LC-ressort

Les **réponses** sont rigoureusement équivalentes puisque **régies par la même équation différentielle**.

Le lien entre éléments se fait *via* la **LdM** en élec, et le **PFD** en méca : on associe donc les **tensions** u à des **forces** $\vec{F}$.

On associe donc q à x et i à v , étant donné que pour un condensateur $i = \frac{dq}{dt}$ et que $v = \frac{dx}{dt}$.

De plus c'est la **masse** qui impose l'inertie du mouvement, comme l'**inductance** est l'inertie de l'intensité.

Finalement, $u_C = q/C$ en électrocinétique et $\|\vec{F}\| = kx$ en mécanique, donc on associe k à C^{-1} .

Élec $\longleftrightarrow$ Méca

LdM $\longleftrightarrow$ PFD

$u \longleftrightarrow \vec{F}$

$q \longleftrightarrow x$

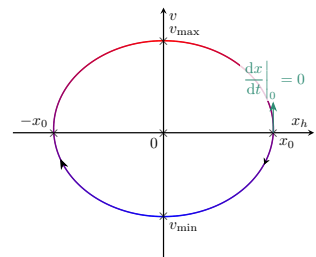
$i \longleftrightarrow v$

$L \longleftrightarrow m$

$C^{-1} \longleftrightarrow k$

Interprétation E4.4 : Espace des phases ressort libre (HP)

Le ressort lâché à x_0 et $v_0 = 0$ voit sa position diminuer et sa vitesse augmenter vers la gauche, donc de valeur négative, jusqu'à ce qu'il passe par sa position d'équilibre ($x_{h,\text{eq}} = 0$) avec une vitesse extrême $v_{\min}$, avant de se comprimer en perdant de sa vitesse.



III/C Bilan énergétique

♥ Propriété E4.6 : Bilan d'énergie ressort

L'énergie mécanique est

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p^{\text{el}}(t) = \mathcal{E}_m(0)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{E}_p^{\text{el}}(t) = \frac{1}{2} k x_h(t)^2 = \frac{1}{2} k (\ell(t) - \ell_0)^2$$

Et $\mathcal{E}_m$ est **conservée à chaque instant**.

♥ Démonstration E4.6 :

PFD sur $\vec{u}_x$ multiplié par v :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_h + kx_h &= 0 \\ \Leftrightarrow m\dot{x}_h \dot{x}_h + kx_h \dot{x}_h &= 0 \quad (\times v) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} m (\dot{x}_h)^2}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{\frac{1}{2} k x_h^2}_{\mathcal{E}_p^{\text{el}}} \right) &= 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{f} \cdot \text{f} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \text{f}^2 \right) \end{array} \right\} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Important E4.4 : Bilan de puissance en méca

On effectue un bilan de puissance en écrivant le PFD multiplié par v : $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$.