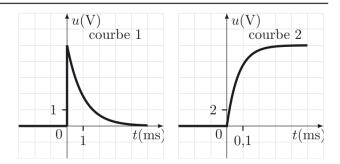
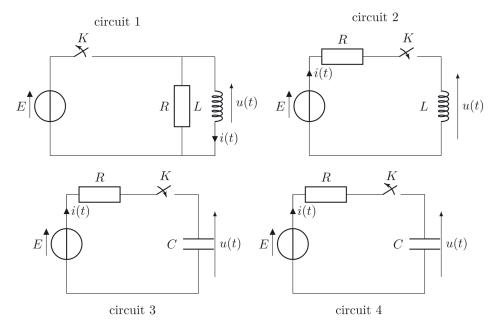
Correction du TD d'application



I | Quelle courbe pour quel circuit?

Um étudiantx distrait, mais surtout maladroitx, rentrant d'une séance de travaux pratiques sur l'observation de régimes transitoires sur les circuits du premier ordre, fait tomber toutes ses notes qui s'éparpillent. En les rangeant, iel retrouve alors 2 courbes expérimentales, tracées en utilisant une résistance $R=1\,\mathrm{k}\Omega,$ mais iel ne sait plus à quel montage les attribuer.





Associer chaque courbe avec l'un des 4 montages ci-dessus, et calculer les valeurs de E et L ou C utilisées. Tous les interrupteurs s'ouvrent ou se ferment à t=0.

- Réponse ·

 \diamond Pour la courbe 1 : on observe une diminution exponentielle de la **tension** et une **discontinuité** de cette dernière en t=0. Or, les condensateurs ont une tension continue à leurs bornes, cette courbe ne peut donc **pas** être issue d'un circuit avec un **condensateur** : ni le 3, ni le 4.

Ensuite, comme c'est forcément une bobine, on observe que $u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}>0$, autrement dit l'intensité monte dans le circuit. Le circuit 1 s'ouvre à t=0, donc l'intensité devrait y baisser : finalement il ne nous reste que le **circuit 2**.

Dans ce circuit, la constante de temps est connue (cf. cours) et vaut $\tau = L/R$. On la détermine avec l'intersection entre la tangente en t=0 et l'asymptote u=0, où en trouvant l'instant où u et son asymptote ont un écart relatif de 37%, c'est-à-dire ici quand $u(\tau)=1.8\,\mathrm{V}$. On trouve dans tous les cas $\boxed{\tau=1.0\,\mathrm{ms}}$, soit $\boxed{L=1.0\,\mathrm{H}}$.

 \Diamond Pour la courbe 2 : on observe une augmentation exponentielle de la tension et un continuité de cette dernière en t=0. On peut donc affirmer que u est la tension aux bornes d'un ondensateur, et que ce dernier se charge : on y associe donc le **circuit 3**.

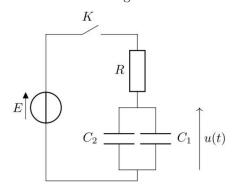
L'asymptote quand $t \to \infty$ est u = E, puisqu'alors i = 0 (comportement condensateur RP) et donc toute la tension du générateur se retrouve aux bornes de C (et pas de R car i = 0); ainsi, $E = 10 \,\mathrm{V}$, et $u(\tau) = 6.3 \,\mathrm{V}$ ou la tangente en 0 donnent $\tau = 0.070 \,\mathrm{ms}$; comme ici $\tau = RC$, on trouve $C = 7.0 \times 10^{-8} \,\mathrm{F}$.





Associations en parallèle

On s'intéresse aux deux circuits ci-après, pour lesquels on ferme l'interrupteur K à t=0. Les deux condensateurs sont initialement déchargés.



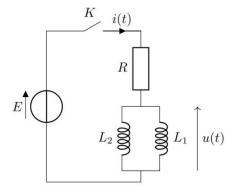


FIGURE E3.1 -1^{er} montage.

FIGURE E3.2 -2^{d} montage.

 $\boxed{1}$ Déterminer l'équation différentielle satisfaite par u(t) pour le premier montage.

— Réponse -

Avec la loi des mailles et d'OHM, puis la loi des nœuds :

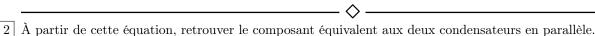
$$E = Ri + u$$

$$i = i_1 + i_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{Dans (1)}: E = R(C_1 + C_2) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$$

$$(1)$$



Réponse –

On constate qu'électriquement, l'association en parallèle donne un condensateur équivalent de capacité

$$C_{\rm eq} = C_1 + C_2$$



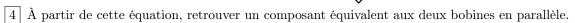
 $\boxed{3}$ Déterminer l'équation différentielle satisfaite par u(t) pour le second montage.

- Réponse ·

Loi des mailles et loi d'Ohm :
$$E = Ri + u$$
 $\Leftrightarrow 0 = R \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (1)

Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$ $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2}$ RCT pour L

Dans (1) : $0 = R\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$



– Réponse –

On constate qu'électriquement, l'association en parallèle donne une bobine équivalente d'inductance

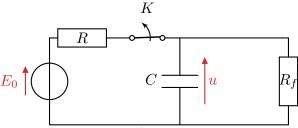
$$\frac{1}{L_{\rm eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$





III | Résistance de fuite d'un condensateur

Un condensateur non idéal peut être modélisé par une capacité C associée en parallèle avec une résistance R_f appelée résistance de fuite. Ce condensateur est complètement chargé sous une tension E>0. Une fois le régime permanent atteint, la mesure, à l'aide d'un voltmètre parfait (résistance d'entrée infinie), de la tension u aux bornes du condensateur est égale à E.



À t = 0, on ouvre le circuit. Au bout d'un temps T > 0, la valeur mesurée de u est E' < E.

1 Comment peut-on expliquer ces observations?

- Réponse –

En ouvrant le circuit, sans la résistance de fuite on s'attend à ce que le condensateur reste chargé, comme une pile. Or dans ce circuit, en ouvrant l'interrupteur la capacité C est reliée à la résistance R_f dans laquelle elle se décharge donc, ce qui explique la diminution de la tension.

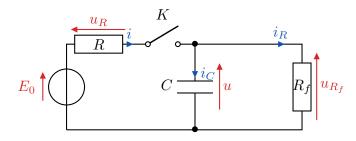
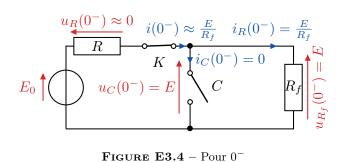


FIGURE E3.3 – Circuit pour $t \ge 0$.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur pour $t \ge 0$ ainsi que les conditions initiales. La résoudre.

- Réponse -

Loi des mailles pour $t \geq 0$, avec $i = i_R = -i_C$:



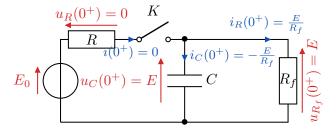


FIGURE E3.5 - Pour 0⁺

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-) = E$. L'équation différentielle étant déjà homogène, on résout en injectant la forme générique :

$$u_C(t) = Ke^{rt} \Rightarrow r = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Avec la condition initiale :

$$u_C(0) = K = E$$
 donc $u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{R_f C}}$

3 Donner l'expression de R_f en fonction de C, E, E' et T. Faire l'application numérique pour $C = 100 \,\mathrm{pF}$, $T = 2.0 \,\mathrm{min}$, $E = 10 \,\text{V} \text{ et } E' = 1.0 \,\text{V}.$

Réponse -

On nous donne

$$u_C(T) = E' \Leftrightarrow Ee^{-\frac{T}{R_f C}} = E' \Leftrightarrow -\frac{T}{R_f C} = \ln \frac{E'}{E}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_f = \frac{T}{C \ln \frac{E}{E'}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T = 12 \times 10^1 \, \text{s} \\ C = 100 \times 10^{-12} \, \text{F} \\ E = 10 \, \text{V} \\ E' = 1,0 \, \text{V} \end{cases}}$$

A.N. :
$$R_f \approx 5.0 \times 10^{11} \,\Omega$$



Commenter le résultat. Comment modéliser un condensateur idéal à partir d'un condensateur réel?

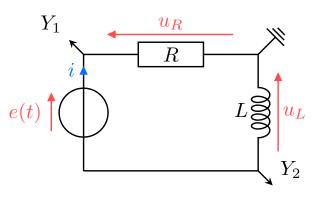
– Réponse -

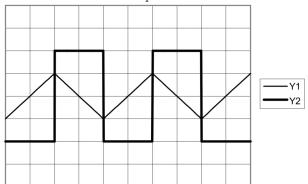
On trouve une très grande valeur de résistance de fuite, ce qui peut surprendre de prime abord. Cependant, cela est cohérent avec le fait que pour être idéal, aucune intensité ne doit circuler dans la résistance de fuite, puisqu'elle est en parallèle avec le condensateur. On modélise un condensateur idéal en prenant $R_f \to +\infty$, la valeur est donc cohérente.



Circuit RL et oscilloscope

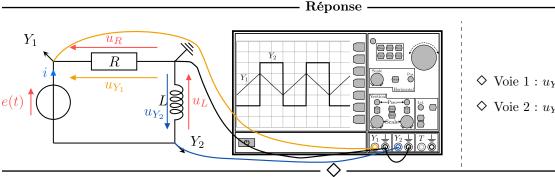
On considère le circuit ci-dessous constitué d'un générateur basse fréquence (GBF), d'une résistance de valeur R, d'une bobine d'inductance L (sa résistance de valeur r est négligeable dans ce circuit). Un oscilloscope est branché sur ce circuit. Le GBF délivre une tension périodique triangulaire. On obtient sur l'oscilloscope les courbes suivantes :





Données:

- a) $R = 10 \text{k}\Omega$
- b) Voie 1:2V/div
- c) Voie $2:50\,\mathrm{mV/div}$
- d) Base de temps: 1 ms/div
- 1 Le branchement de la voie 1 relève la tension du point Y_1 jusqu'à la masse, et celui de la voie 2 du point Y_2 jusqu'à la masse. D'après les branchements figurant sur le schéma, quelles sont alors les grandeurs physiques qui sont visualisées sur l'écran de l'oscilloscope?



 \Diamond Voie 1 : $u_{Y_1} = u_R = Ri$

 \diamondsuit Voie 2: $u_{Y_2} = -u_L = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Vérifier que la forme de la tension u_L aux bornes de la bobine correspond bien à $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

– Réponse -

D'après la loi d'OHM : $u_R = Ri(t)$. La courbe Y_1 est donc une image de l'intensité dans le circuit.

Or, cette courbe est formée de morceaux de droites successivement croissantes et décroissantes. Sur chaque portion, la dérivée de la courbe est constante : sur les portions décroissantes, la pente est négative, et inversement ; elle fait des « planchers » successifs.

Ainsi, la courbe de la voie Y_2 correspond bien à l'opposé de la dérivée de la courbe de la voie Y_1 (à quelques facteurs R et L près).

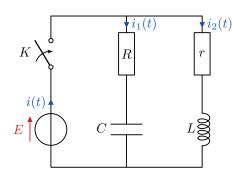


Correction du TD d'entraînement



I | Circuit RL - RC

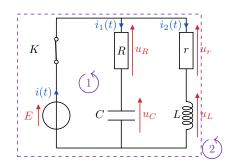
À l'instant de date t=0 où l'on ferme l'interrupteur K, le condensateur est déchargé.

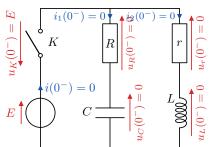


$\boxed{1}$ Déterminer les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

- Réponse -

On étudie flèche le circuit $\forall t$, et on trouve les conditions initiales grâce à deux schémas :





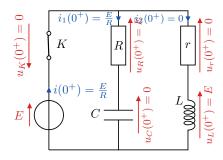


FIGURE E3.1 – Circuit $\forall t$

FIGURE E3.2 – Circuit à $t = 0^-$

FIGURE E3.3 – Circuit à $t = 0^+$

On trouve $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur, et $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$ par continuité du courant traversant la bobine; on fait attention à ce que **seule** i_2 est continue, pas i_1 . On trouve ensuite les équations différentielles par lois des mailles :

Maille 1

Maille 2

$$\begin{aligned} u_R + u_C &= E \\ \Leftrightarrow Ri_1 + u_c &= E \\ \Rightarrow R\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{C} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_1}i_1 &= 0 \end{aligned} \downarrow \begin{matrix} u_R &= Ri_1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot) \\ \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &= \frac{i_1}{C} \\ \div R \text{ et } \tau_1 &= RC \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} u_L + u_r &= E \\ \Leftrightarrow u_L + ri_2 &= E \\ \Leftrightarrow L \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + ri_2(t) &= E \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_2}i_2 &= \frac{E}{L} \end{aligned} \right) u_r = ri_2$$

Pour la maille 1, on cherche une équation en i_1 ; on aurait pu, remplacer i_1 par $C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ puis résoudre l'ED en u_C , pour, à la fin, prendre $i_1 = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ à nouveau. Mais plutôt que de dériver la solution finale, on peut directement dériver l'équation de départ! On résout les 2 ED ensuite :

Maille 1

$$2$$
 et 3 $i_1(t) = Ke^{rt} \Rightarrow r = -\frac{1}{\tau_1}$

$$i_1(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

$$i_1(0^+) = K = \frac{E}{R}$$

$$i_1(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

Maille 2

$$\frac{\mathrm{d}i_{2,h}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_2}i_{2,h} = 0$$

2 et 3
$$i_{2,h}(t) = K'e^{rt} \Rightarrow r = -\frac{1}{\tau_2}$$

$$i_{2,h}(t) = K' e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$\boxed{5} \qquad \qquad i_{2,p} = \lambda \Rightarrow \frac{\lambda}{\tau_2} = \frac{E}{L} \Leftrightarrow i_{2,p} = \frac{E}{r}$$

[6]
$$i_2(t) = i_{2,h}(t) + i_{2,p} = K' e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{E}{r}$$

$$[7] i_2(0^+) = 0 = K' + \frac{E}{r} \Leftrightarrow K' = -\frac{E}{r}$$

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E}{r} \left(e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)}$$



Important E3.1 : Dériver des équations différentielles

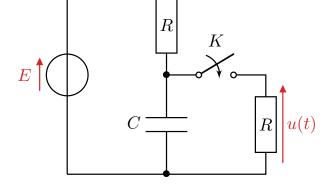
Plutôt que de résoudre une équation différentielle **puis** de dériver la solution, il peut être plus simple de **dériver** l'équation différentielle.

Le même raisonnement s'applique pour les lois de KIRCHHOFF : **on peut dériver la LdN ou la LdM** pour faire apparaître des RCT qui nous intéressent.



II | Circuit RC à 2 mailles

On considère le circuit représenté ci-contre, pour lequel l'interrupteur K est ouvert depuis longtemps. On le ferme à l'instant t=0.



Taire un schéma du circuit en régime permanent, longtemps après la fermeture de l'interrupteur. Comment caractériser l'association des deux résistances? Quelle sera la tension $u_{C,\infty}$ aux bornes du condensateur? Commenter la variation.

— Réponse -

En régime permanent, le condensateur est chargé et se comporte comme un interrupteur ouvert : il coupe donc l'intensité i_C dans sa branche.

Ainsi, l'intensité i est la même dans les deux résistances, qui sont donc **en série**. On applique alors le pont diviseur de tension :

$$u_{C,\infty} = u_{\infty} = \frac{R}{R+R}E \Leftrightarrow \boxed{u_{C,\infty} = \frac{E}{2}}$$

Ainsi, la tension aux bornes du condensateur diminue de E à E/2: on vient en effet de modéliser un condensateur réel qui se décharge à travers la résistance de fuite.

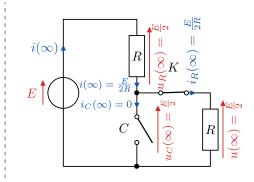


FIGURE E3.4 – Pour $t \to \infty$

Étudier les conditions initiales autour de la fermeture de l'interrupteur. Commenter le signe de $i_C(0^+)$ à la lumière de la question précédente.

II. Circuit RC à 2 mailles

Réponse -

On étudie flèche le circuit $\forall t$, et on trouve les conditions initiales grâce à deux schémas :

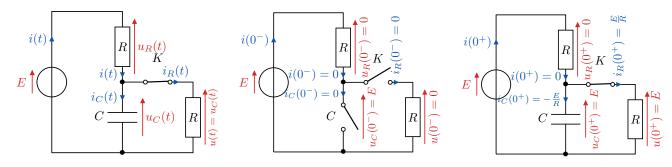
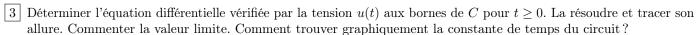


FIGURE E3.5 – Circuit $\forall t$

FIGURE E3.6 – Circuit à $t = 0^-$

FIGURE E3.7 – Circuit à $t = 0^+$

On trouve $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur; $i_C(0^+) < 0$ car en fermant l'interrupteur, le condensateur se comporte comme un générateur de tension qui se décharge à travers la résistance en parallèle.



Réponse -

Loi des mailles:

$$u_R + u = E \Leftrightarrow Ri + u = E$$

On prend garde à ne pas confondre i et i_C !

Loi des nœuds :
$$i = i_C + i_R \Leftrightarrow \left| i = C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R} \right|$$

$$R\left(C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}\right) + u = E \Leftrightarrow RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2u = E$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{RC}u = \frac{E}{RC} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau}\frac{E}{2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{RC}{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_h = 0 \quad \text{avec} \quad u_h(t) = u(t) - \frac{E}{2}$$

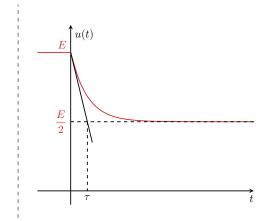
$$u_h(t) = Ke^{rt} \Rightarrow rKe^{rt} + \frac{1}{\tau}Ke^{rt} = 0$$

$$\Rightarrow r = -\frac{1}{\tau}$$

$$u_h(t) = Ke^{-t/\tau}$$

$$u_h(t) = K e^{-t/\tau}$$

8
$$u(t) = u_h(t) + \frac{E}{2} \Leftrightarrow u(t) = \frac{E}{2} \left(1 + e^{-t/\tau} \right)$$





Attention E3.1: Constante de temps et consigne

On trouve τ à l'intersection de la tangente en t=0 avec l'asymptote horizontale, ici $\frac{E}{2}$, et pas avec u = 0!!



Important E3.2 : Méthode avec plusieurs mailles

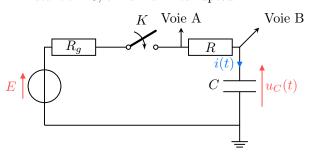
- Écrire les différentes lois du circuit (LdN, LdM, Ld Ω , RCT...);
- Isoler la grandeur dont on veut l'équation différentielle en éliminant les autres;
- 3 Mettre l'équation sous forme canonique $(\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{y_{\text{eq}}}{\tau})$ en identifiant y_{eq} et τ

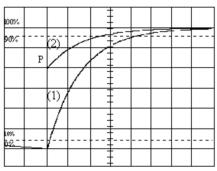
- 4 Établir les conditions initiales avec l'énoncé et les continuités;
- 5 Résoudre l'équation différentielle.



III | Régime transitoire d'un circuit RC

Un dipôle comporte entre ses bornes un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C placés en série. On le place aux bornes d'un générateur de force électromotrice E et de résistance interne R_q en série avec un interrupteur K. Initialement, le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. On appelle u_c la tension aux bornes du condensateur. À l'instant t=0, on ferme l'interrupteur K.





1 Déterminer, sans calcul et en le justifiant, $u_c(0^+)$ et $i(0^+)$.

- \diamond Initialement, le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-)=0$. De plus, la tension aux borne d'un condensateur est une grandeur continue, donc $u_c(0^-) = u_c(0^+)$. On en déduit alors que $u_c(0^+) = 0$.
- \diamond Si on applique la loi d'Ohm aux 2 résistances (en série) et la loi des mailles à $t=0^+$, on trouve directement : $i(0^+) = \frac{E}{R + R_q}$. On observe que l'**intensité n'est pas continue** dans ce circuit car $i(0^-) = 0$.

Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $u_c(t)$.

- Réponse —

On applique la loi des mailles, la loi d'Ohm et la loi des condensateurs dans le circuit pour des t > 0:

$$E = (R + R_g)i + u_c(t)$$
 ; $i(t) = C\frac{du_c}{dt}$ \Rightarrow $E = (R + R_g)C\frac{du_c}{dt} + u_c(t)$

- Déterminer la constante de temps τ du circuit et donner son interprétation physique.

– Réponse –

- ◇ -

La constante de temps est :

$$\tau = (R + R_g)C$$

Il s'agit de l'ordre de grandeur de la durée de charge ou de décharge du condensateur.

Établir l'expression de $u_c(t)$.

- Réponse -

L'équation différentielle se réécrit :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

La solution homogène $u_{c,h}(t)$ et la solution particulière $u_{c,p}$ sont :

$$u_{c,h}(t) = Ae^{-t/\tau}$$
 ; $u_{c,p}(t) = E$ \Rightarrow $u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + E$

Pour trouver la constante A, on utilise la condition initiale :

$$u_c(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -E \quad \Rightarrow \quad u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$



 $\boxed{5}$ Déterminer l'expression de t_1 pour que $u_c(t_1) = 0.9E$.

– Réponse –

$$u_c(t_1) = 0.9E \iff 1 - e^{-t_1/\tau} = 0.9 \iff e^{-t_1/\tau} = 0.1 \iff \boxed{t_1 = \tau \ln(10) \approx 2.3\tau}$$

Dans l'étude expérimentale du circuit RC, on observe l'oscillogramme ci-dessus en utilisant un générateur délivrant des signaux créneaux. Les sensibilités sont : 1V/carreau vertical ; 0,1 ms/carreau horizontal. On néglige les caractéristiques de l'oscilloscope.

[6] Identifier les courbes (1) et (2) aux voies A et B en justifiant votre choix.

- Réponse

- \diamond Sur la voie B, on mesure la tension $u_c(t)$. Cette fonction est continue en t=0. Il s'agit donc de la courbe (1).
- \diamondsuit Sur la voie A, on mesure la tension $u_c(t) + Ri(t)$. Or la fonction i(t) n'est pas continue en t = 0, donc il s'agit de la courbe (2).
- 7 Doit-on être sur le couplage alternatif AC ou le couplage continu DC?

Réponse

 $---- \diamond -$

On doit utiliser un **couplage DC** car on étudie un signal continu (et non sinusoïdal).

 $\boxed{8}$ Préciser l'expression de la tension au point P.

À l'instant $t = 0^+$, on a :

$$u_c(0^+) + Ri(0^+) = 0 + \frac{RE}{R + R_q}$$

La tension au point P est donc $\boxed{\frac{RE}{R+R_g}}$

9 Sachant que $R = 100 \,\Omega$, déterminer R_q .

—— Réponse –

D'après la courbe, la tension en P est 4E/6. ON en déduit que :

$$\frac{4E}{6} = \frac{RE}{R + R_g} \quad \Rightarrow \quad \frac{4(R + R_g)}{6} = R \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_g = \frac{R}{2} = 50\,\Omega}$$

 $\overline{10}$ En utilisant les valeurs expérimentales et les questions précédentes, en déduire la valeur de C et E.

D'après la courbe expérimentale :

$$\Diamond [E = 6V];$$

$$\diamond t_1 = 0.42 \,\text{ms}.$$

On en déduit que :

$$C = \frac{\tau}{R + R_g} = \frac{t_1}{\ln(10) \times (R + R_g)} = \boxed{1.2\,\mu\text{F}}$$

11 Estimer une majoration de la fréquence du signal carré utilisé.

Réponse -

La demi-période T du signal utilisé est supérieure à 8 carreaux, donc :

$$T > 2 \times 0.8 = 1.6 \,\mathrm{ms}$$

On en déduit que

$$f = \frac{1}{T} < \frac{1}{1.6 \times 10^{-3}} = \boxed{625 \, \mathrm{Hz}}.$$

12	Comment pourrait-on observer l'intensité du courant?
	Réponse
	Pour observer l'intensité du courant, on peut observer la tension aux bornes de la résistance R (qui est une image de
	$i\ via\ $ la loi d'Ohm) en affichant $u_A-u_B.$
	\wedge