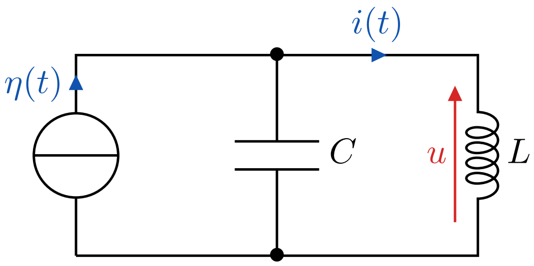
Électrocinétique – chapitres 4 et 5

TD application : oscillateurs harmonique et amorti

I Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

Dans le circuit ci-contre, la source idéale de courant est brusquement éteinte. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.



1 Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de i, $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$.

2 Justifier qualitativement que $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i. Que peut-on en conclure ?

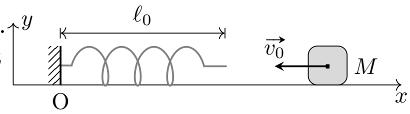
3 Retrouver cette équation par application des lois des nœuds et des mailles.

4 Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée, par deux schémas d'abord puis en explicitant la détermination.

5 En déduire l'expression de $i(t)$, puis celle de $u(t)$.

II Masse percutant un ressort

Un ressort (raideur k et longueur à vide ℓ_0) fixé en O est initialement au repos. Une masse m glisse sans frottement à vitesse constante $\vec{v} = -v_0\vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$ et s'accroche *définitivement* au ressort à l'instant $t = 0$.



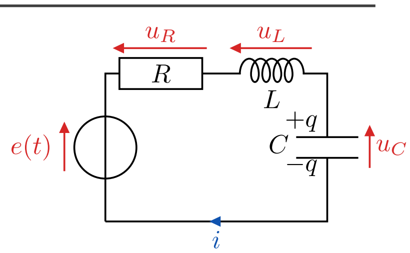
1 Déterminer l'équation du mouvement de la masse une fois qu'elle est accrochée (pour $t \geq 0$).

2 Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

3 À quelle condition la masse vient-elle percuter la paroi en O ?

III RLC sur q et bilan d'énergie

Un circuit électrique est composé d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension tel que : $\begin{cases} e(t < 0) = 0 \\ e(t \geq 0) = E \end{cases}$. On pose $\gamma = \dfrac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$



1 Expliquer simplement pourquoi à $t = 0^-$ la charge q et le courant i sont nuls. En déduire les conditions initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée. Deux schémas sont attendus.

2 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t \geq 0$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 q = \frac{E}{L}$$

Préciser, en les justifiant, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée.

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R, L et C. On suppose dans la suite la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.

3 Montrer que l'expression de la charge pour $t \geq 0$ peut se mettre sous la forme

$$q(t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\mathrm{e}^{-\gamma t} + D$$

avec ω une constant à exprimer en fonction de ω_0 et γ, et A, B et D des constantes à exprimer en fonction de C, E, ω et γ.

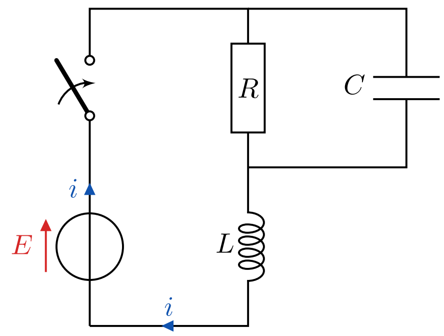
4 Exprimer le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C, E, ω_0 et γ.

5 Donner l'allure des courbes $q(t)$ et $i(t)$. Quelles sont leurs valeurs à la fin du régime transitoire ? Justifier par des considérations simples ces valeurs atteintes.

6 Déterminer l'énergie totale $\mathcal{E}_G$ fournie par le générateur ainsi que l'énergie $\mathcal{E}_{LC}$ emmagasinée dans la bobine et le condensateur à la fin du régime transitoire en fonction de C et E. En déduire l'énergie dissipée par effet JOULE dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat paradoxal qui apparaît dans le cas limite $R \longrightarrow 0$.

★☆ IV Oscillateur amorti RLC à 2 mailles

Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



1 Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

2 L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

3 Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.

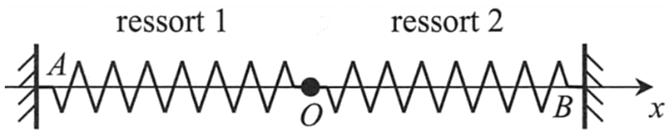
4 Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

5 En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

TD entraînement : oscillateurs harmonique et amorti

★★☆ I Oscillateur à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Ce mobile est relié par deux ressort linéaires à deux points fixes A et B. On le repère par sa position $\text{OM} = x$.



Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0. Dans la **position d'équilibre** du système, les longueurs des ressorts sont identiques et **valent** ℓ_{eq} (avec $\ell_{\text{eq}} \neq \ell_0$), et le mobile se trouve à l'origine O de l'axe.

On se place dans le référentiel terrestre (lié au sol), considérée comme galiléen. À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0 \neq 0$.

1 Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

a) Refaire un schéma **hors équilibre**, indiquant notamment ce que représente ℓ_{eq} et les distances ℓ_1 et ℓ_2, puis établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

b) Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 propres en fonction de k et m.

c) Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

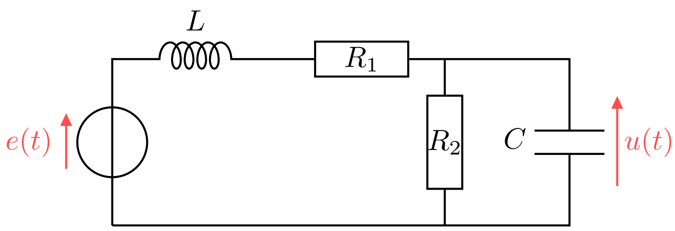
2 En fait il existe entre le mobile et la tige un frottement de type visqueux linéaire, la force de frottement s'exprime $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ (avec $\alpha > 0$ et $\vec{v}$ la vitesse de la masse m dans le référentiel terrestre).

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $h = \dfrac{\alpha}{m}$.

b) Montrer que lorsque $\alpha < 2^{3/2}\sqrt{km}$, le mouvement comporte des oscillations amorties. Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales et exprimer la pseudo-période T en fonction de ω_0 et h.

★★★ II Décrément logarithmique électrique

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ tel que $\begin{cases} e(t<0) = 0 \\ e(t \geq 0) = E \end{cases}$ dans le circuit ci-dessous.



1 Déterminer la valeur u_∞ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$. Un schéma équivalent est attendu.

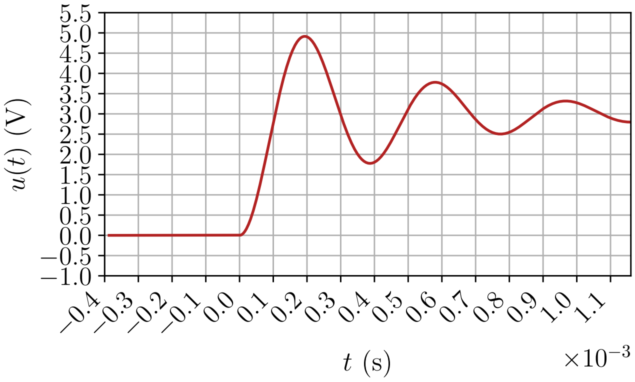
2 Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 u_\infty$. Exprimer λ et ω_0 en fonction de L, C, R_1 et R_2.

3 En supposant un régime pseudo-périodique, exprimer la forme générale de $u(t)$ en fonction de u_∞, λ, de la pulsation et de deux constantes d'intégration qu'on ne cherche pas à déterminer pour le moment.

4 Justifier entièrement les conditions initiales. Deux schémas sont attendus.

5 Déterminer alors l'expression complète de $u(t)$ en fonction de u_∞, λ et Ω.

On observe à l'oscilloscope la courbe $u(t)$ ci-contre.



6 Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique de la pseudo-période T.

7 Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique du décrément logarithmique

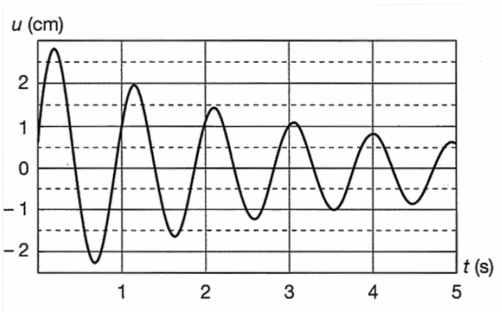
$$\boxed{\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+nT) - u_\infty}\right)}$$

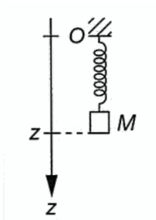
8 Déterminer la relation entre δ, λ et T. En déduire la valeur numérique de λ.

9 Sachant que $R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 50\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 500\,\mathrm{mH}$, déterminer la valeur de C.

III Décrément logarithmique mécanique

Une masse m est accrochée à un ressort de raideur $k = 10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10\,\mathrm{cm}$, fixé au point O. En plus de son poids et de la force de rappel du ressort, la masse est soumise à une force de frottement fluide $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$. Un capteur fournit l'évolution de $u(t) = z(t) - z_{\mathrm{eq}}$ au court du temps.





1 Établir l'équation d'évolution de $z(t)$. Quelle est la position d'équilibre z_{eq} de la masse ? En déduire une équation satisfaite par $u(t)$.

2 Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des données du problème.

3 Résoudre l'équation différentielle. Exprimer la pseudo-période T en fonction de $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ et de Q.

4 Montrer que le décrément logarithmique δ, défini par

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{u(t) - u_{\mathrm{eq}}}{u(t+nT) - u_{\mathrm{eq}}}\right)}$$

est indépendant du temps.

5 Comparer les données expérimentales à l'affirmation précédente. Commenter.

6 Estimer à l'aide des données expérimentales le facteur de qualité Q et la pseudo-pulsation ω.

7 En déduire les valeurs de m et α.