

Oscillateurs amortis

Sommaire

I Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre	2
I/A Introduction	2
I/B Présentation et bilan énergétique	3
I/C Équation différentielle du circuit	4
I/D Résolutions pour chaque cas	4
II Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides	9
II/A Présentation	9
II/B Équation différentielle	9
II/C Bilan de puissance	10
II/D Solutions	10

Capacités exigibles

- | | |
|---|---|
| ☐ Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
☐ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
☐ Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
☐ Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. | ☐ Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
☐ Réaliser un bilan énergétique.
☐ Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.
☐ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. |
|---|---|

L'essentiel

Définitions

- | | |
|--|---|
| ☐ E5.1 : Circuit RLC libre | 3 |
| ☐ E5.2 : Décroissement logarithmique | 6 |
| ☐ E5.3 : Situation initiale et bilan des forces | 9 |

Propriétés

- | | |
|---|----|
| ☐ E5.1 : Régimes de solution | 3 |
| ☐ E5.2 : Bilan de puissance RLC libre | 4 |
| ☐ E5.3 : Équation différentielle RLC libre | 4 |
| ☐ E5.4 : Solution pseudo-périodique | 5 |
| ☐ E5.5 : t_{95} pseudo-périodique | 6 |
| ☐ E5.6 : Décroissement et facteur de qualité | 7 |
| ☐ E5.7 : Solution critique | 7 |
| ☐ E5.8 : Régime transitoire critique | 8 |
| ☐ E5.9 : Solution apériodique | 8 |
| ☐ E5.10 : Régime transitoire apériodique | 9 |
| ☐ E5.11 : Équation ressort amorti | 10 |
| ☐ E5.12 : Bilan de puissance ressort | 10 |

Implications

- | | |
|---|----|
| ☐ E5.1 : Résultat $R \rightarrow 0 \Leftrightarrow Q \rightarrow \infty$ | 6 |
| ☐ E5.2 : Résultat $R \rightarrow \infty \Leftrightarrow Q \rightarrow 0$ | 9 |
| ☐ E5.3 : Solutions ressort | 10 |

Interprétations

- | | |
|--|---|
| ☐ E5.1 : Évolution énergétique RLC série | 4 |
| ☐ E5.2 : Solution amortie par intuition | 5 |
| ☐ E5.3 : Espace des phases pseudo-pér. (HP) | 6 |

Démonstrations

- | | |
|---|----|
| ☐ E5.1 : Régimes de solutions | 3 |
| ☐ E5.2 : Bilan de puissance RLC libre | 4 |
| ☐ E5.3 : Équation différentielle RLC libre | 4 |
| ☐ E5.4 : Solution pseudo-périodique | 5 |
| ☐ E5.5 : Régime transitoire pseudo-pér. | 6 |
| ☐ E5.6 : Décroissement et facteur de qualité | 7 |
| ☐ E5.7 : Solution critique | 7 |
| ☐ E5.8 : Régime transitoire critique | 7 |
| ☐ E5.9 : Solution apériodique | 8 |
| ☐ E5.10 : Régime transitoire apériodique | 8 |
| ☐ E5.11 : Équation ressort amorti | 9 |
| ☐ E5.12 : $\mathcal{P}$ ressort | 10 |

Points importants

- | | |
|--|----|
| ☐ E5.1 : Équation différentielle amorti | 2 |
| ☐ E5.2 : Solutions oscillateur amorti | 3 |
| ☐ E5.3 : Analogie RLC-ressort amorti | 10 |

I Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre

I/A Introduction

Expérience E5.1 : Visualisation expérimentale

En reprenant les résultats du LC libre, nous devrions en réalité observer que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Soit le circuit RLC ci-contre, avec $L = 43 \text{ mH}$ et $C = 20 \text{ nF}$.

Une simulation est disponible en ligne (<https://tinyurl.com/ypbwcwfs>).

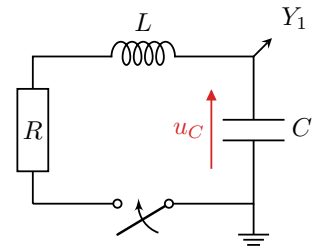
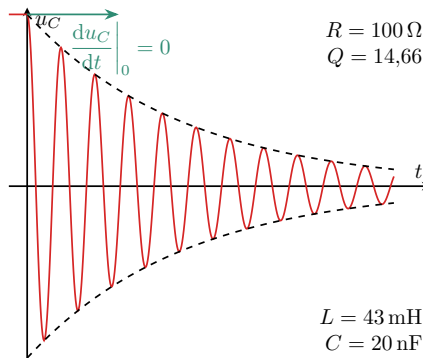


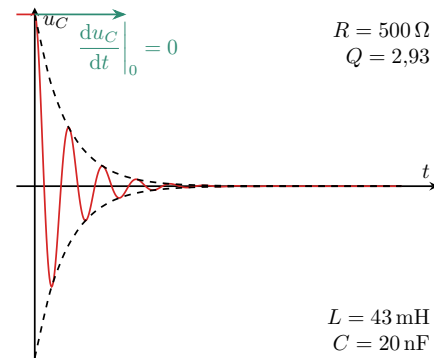
FIGURE E5.1

◇ Lorsque la **résistance est petite** : on observe **plusieurs oscillations**, de période $T \approx 184 \mu\text{s}$.

Environ 15 oscillations lorsque $R_{\text{tot}} \approx 100 \Omega$;

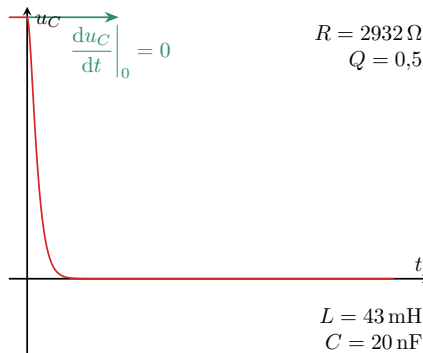


Environ 3 oscillations lorsque $R_{\text{tot}} \approx 500 \Omega$.

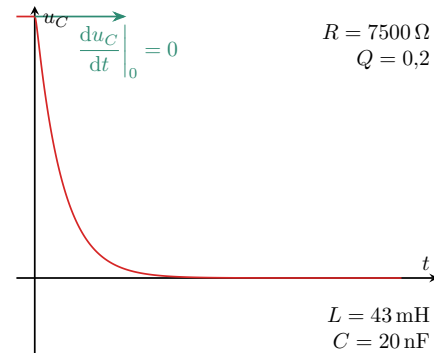


◇ Lorsque la **résistance est plus grande** : les **oscillations disparaissent**.

Lorsque $R \approx 2,9 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ $250 \mu\text{s}$ (à 95%).



Lorsque $R \approx 7,5 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire plus long, d'environ $420 \mu\text{s}$.



Observation E5.1 : Réponse en tension d'un RLC

Lorsque l'on excite le système RLC, le système a deux principales réponses :

- 1) **Système oscillant** pour $R < R_c$, de pseudo-période (*pseudo* car le signal diminue.) **supérieure** à T_0 **propre** ;
- 2) **Système non-oscillant** pour $R > R_c$: le transitoire **augmente** avec R .

Important E5.1 : Équation différentielle amorti

Un oscillateur amorti sur $y(t)$ répond à :

$$\left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_t + \frac{\omega_0}{Q} \left. \frac{dy}{dt} \right|_t + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_{\text{eq}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} = v_0 \end{cases}$$

- ◇ y_{eq} position d'équilibre
- ◇ ω_0 pulsation **propre**
- ◇ Q **facteur de qualité**

Remarque E5.1 : Analyse de l'équation

Par lecture de cette équation, Q est **sans dimension** pour qu'on retrouve que ω_0 s'exprime en s^{-1} car $\frac{dx}{dt}$ est de dimension $[x] \cdot \text{s}^{-1}$.

De plus, on remarque que **plus Q est élevé**, plus le terme d'ordre 1 est négligeable devant les autres, donc **plus on se rapproche de l'harmonique**. Le **facteur de qualité** traduit donc à quel point le système est **idéal**.

♥ Propriété E5.1 : Régimes de solution

Le **polynôme caractéristique** est un trinôme :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{E5.1})$$

de discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$ (E5.2)

On a alors 3 régimes de solutions :

- ◇ **$Q > 1/2$: pseudo-périodique**, $r \in \mathbb{C}$, oscillations décroissantes ;
- ◇ **$Q = 1/2$: critique**, racine double réelle, pas d'oscillations ;
- ◇ **$Q < 1/2$: apériodique**, racines réelles sans oscillation.

♥ Démonstration E5.1 : Régimes de solutions

On trouve le polynôme caractéristique par l'équation **homogène** :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_h}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy_h}{dt} + \omega_0^2 y_h(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} y_h(t) = K e^{rt} \\ K e^{rt} \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0} \quad \blacksquare$$

$$\text{Ainsi, } \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q} \right)^2 - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$$

On relie $\Delta \leq 0$ à $Q \geq 1/2$:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) > 0 \\ &\Leftrightarrow 4Q^2 < 1 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Important E5.2 : Solutions oscillateur amorti

	Racines	Solution
Pseudo-T.	$r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$ avec $\begin{cases} \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \\ \Omega = \frac{1}{\tau} \sqrt{4Q^2 - 1} \end{cases}$	$y_h(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}_{\text{partie décroissante}} \cdot \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}_{\text{partie oscillante}}$
Crit.	$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ car $Q = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2Q = 1$	$y_h(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$
Apér.	$r_{\pm} = \frac{1}{\tau} (-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2})$ avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$	$y_h(t) = A e^{r_+ t} + B e^{r_- t}$

I/B Présentation et bilan énergétique

♥ Définition E5.1 : Circuit RLC libre

- ◇ Il est constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- ◇ On suppose le condensateur initialement chargé.
- ◇ À $t = 0$, on ferme l'interrupteur : le circuit est en régime libre.

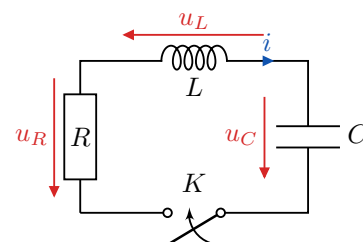


FIGURE E5.2

♥ Propriété E5.2 : Bilan de $\mathcal{P}$ RLC libre

L'énergie emmagasinée dans le circuit est progressivement dissipée par effet JOULE dû à la résistance :

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{elec}}}{dt} = -\mathcal{P}_J$$

avec $\mathcal{E}_{\text{elec}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$.

♥ Démonstration E5.2 : Bilan $\mathcal{P}$ RLC libre

$$\begin{aligned} u_L i + u_R i &= u_C i \\ \Leftrightarrow u_C \cdot C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} \cdot i + Ri^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2}Cu_C^2}_{\mathcal{E}_C} + \underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{\mathcal{E}_L} \right) &= -\mathcal{P}_J \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} u_R = Ri \\ u_L = L \frac{di}{dt} \\ i = -C \frac{du_C}{dt} \\ \mathcal{P}_J = Ri^2 \\ f \cdot \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}f^2 \right) \end{array} \right\}$$

Interprétation E5.1 : Évolution énergétique RLC série

On a donc bien une perte d'énergie à cause de la dissipation dans la résistance. Il y aura donc progressivement une perte de la tension de u_C , d'où l'amortissement.

I/C Équation différentielle du circuit

♥ Démonstration E5.3 : Équation différentielle RLC libre

Équation différentielle

$$\begin{aligned} u_C &= u_L + u_R \\ \Leftrightarrow u_C &= L \frac{di}{dt} + Ri \\ \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} u_L = L \frac{di}{dt} \\ \text{et } u_R = Ri \\ i = -C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \div LC \\ \text{Canonique} \end{array}$$

On détermine l'expression de Q par identification :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{Q} &= \frac{R}{L} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{Q\sqrt{LC}} &= \frac{R}{L} \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{L}{R\sqrt{LC}} \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \text{On isole } Q \\ L = \sqrt{L^2} \end{array} \right\}$$

Conditions initiales

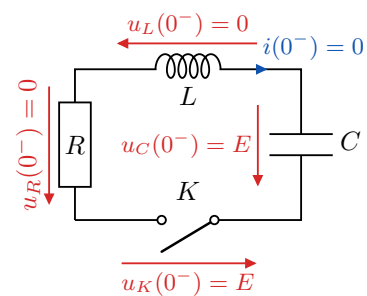


FIGURE E5.3 – En 0^-

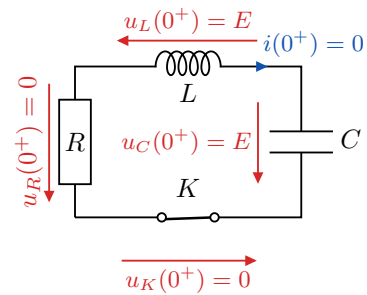


FIGURE E5.4 – En 0^+

♥ Propriété E5.3 : Équation différentielle RLC libre

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC en régime libre est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

◇ ω_0 la pulsation propre ◇ Q le facteur de qualité

Par **continuité de la tension aux bornes d'un condensateur** et **continuité de l'intensité traversant une bobine**, on trouve les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_C(0^-) = u_C(0^+) = E \\ i(0^-) = i(0^+) = 0 \end{cases}$$

I/D Résolutions pour chaque cas

I/D) 1 Cas $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$: régime pseudo-périodique

I/D) 1.1 Solution de l'équation

♥ Démonstration E5.4 : Solution pseudo-périodique

1

Déjà homogène

2

$$u_C(t) = Ke^{rt} \Rightarrow r^2 \cancel{Ke^{rt}} + \frac{\omega_0}{Q} r \cancel{Ke^{rt}} + \omega_0^2 \cancel{Ke^{rt}} = 0$$

3

$$\boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0} \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) < 0$$

Ainsi,

$$r_{\pm} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{j}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} (4Q^2 - 1)}$$

$$\Leftrightarrow r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$$

On injecte Δ
 On extrait $\frac{\omega_0}{Q}$
 $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q}$
 On définit Ω

d'où les définitions de τ et Ω :

$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Omega = \frac{1}{\tau} \sqrt{4Q^2 - 1}}$$

4

$$u_C(t) = K_1 e^{r_+ t} + K_2 e^{r_- t} = K_1 e^{-\frac{1}{\tau} t} e^{j\Omega t} + K_2 e^{-\frac{1}{\tau} t} e^{-j\Omega t}$$

$$\Leftrightarrow u_C(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (K_1 e^{j\Omega t} + K_2 e^{-j\Omega t}) \stackrel{\text{F07}}{=} e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \quad (\text{E5.3})$$

7 ◇

$$u_C(0) \stackrel{\text{CI}}{=} 0 \stackrel{(\text{E5.3})}{=} 1 (A \cdot 1 + B \cdot 0) = A \Leftrightarrow \boxed{A = E} \quad (\text{E5.4})$$

◇

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_t = -\frac{1}{\tau} u_C(t) + e^{-\frac{t}{\tau}} (-A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)) \quad (\text{E5.5})$$

$$\Rightarrow \left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \frac{i(0)}{C} \stackrel{\text{CI}}{=} 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\tau} A + \Omega B = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{E}{\Omega \tau} = \frac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}} \quad (\text{E5.6})$$

8

$$\boxed{u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega \tau} \sin(\Omega t) \right)} \quad \blacksquare$$

♥ Propriété E5.4 : Solution pseudo-périodique

Pour un facteur de qualité $Q > 1/2$, u_C s'exprime par

$$\boxed{u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega \tau} \sin(\Omega t) \right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \\ \Omega = \frac{1}{\tau} \sqrt{4Q^2 - 1} \end{cases}$$

Le signal est alors **sinusoïdal amorti**, de période

$$T \triangleq \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \Leftrightarrow \boxed{T = T_0 \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} > T_0}$$

d'enveloppes

$$f_{\pm}(t) = \pm E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

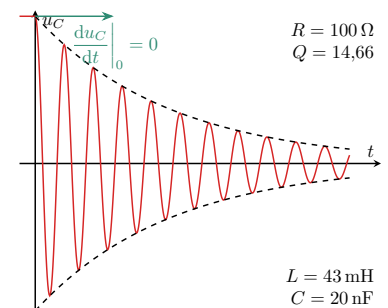


FIGURE E5.5

Interprétation E5.2 : Solution amortie par intuition

La **solution du polynôme caractéristique** s'écrit alors comme la **somme de la solution d'ordre 1 et de la solution harmonique**, mais de **pulsation différente** :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega \equiv \ll -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_0 \gg \quad \text{soit} \quad \boxed{r_{\pm} = r_{\text{ordre 1}} + r_{\text{ordre 2 harmonique}}}$$

Ceci n'est pas très étonnant puisque l'EDLHC d'ordre 2 amortie est la somme d'une EDLHC d'ordre 2 harmonique et d'une EDLHC d'ordre 1. Avec les propriétés de l'exponentielle ($e^{a+b} = e^a e^b$), il est donc naturel que la solution amortie soit le **produit** des solutions d'ordre 1 et d'ordre 2.

Remarque E5.2 : Forme du résultat

On peut tout à fait écrire le résultat sous la forme $u_C(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} A' \cos(\Omega t + \varphi_0)$, avec A' et φ_0 à déterminer.

I/D) 1.2 Régime transitoire

♥ Propriété E5.5 : t_{95} pseudo-périodique

Le temps de réponse à 95% est atteint à :

$$t_{95} \approx QT_0 \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



Ainsi, Q correspond au nombre d'oscillations observées.

Un calcul précis montre que le régime le plus court est atteint pour $Q \approx 0,72$, mais il y a alors un **dépassement de la consigne**.

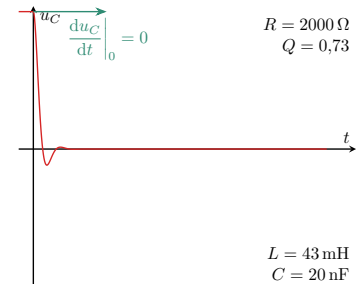


FIGURE E5.6 – Plus court transitoire avec dépassement.

Démonstration E5.5 : t_{95} pseudo-périodique

Il suffit de chercher t_{95} tel que l'enveloppe soit réduite de 95%, soit :

$$\begin{aligned} \cancel{e^{-\frac{t_{95}}{\tau}}} &= 0,05 \cancel{e^{\frac{t_{95}}{\tau}}} \\ \Leftrightarrow -\frac{t_{95}}{\tau} &= \ln(0,05) \quad \begin{matrix} \text{(\ln(\cdot))} \\ 0,05 = 1/20 \\ \ln(a^b) = b \ln a \end{matrix} \\ \Leftrightarrow t_{95} &= \tau \ln(20) \end{aligned}$$

Or, $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ donc

$$\begin{aligned} t_{95} &= \frac{2Q}{\omega_0} \ln(20) \\ \Leftrightarrow t_{95} &\approx \frac{2\pi}{\omega_0} Q \quad \left. \begin{matrix} \ln(20) \approx \pi \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

Implication E5.1 : Résultat $R \rightarrow 0 \Leftrightarrow Q \rightarrow \infty$

On remarque que quand $R \rightarrow 0$, alors $Q \rightarrow \infty$: on a donc des oscillations « infinies », puisqu'alors :

$$\Omega \approx \omega_0 \quad \text{donc} \quad T \approx T_0 \quad \text{mais aussi} \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad \text{donc} \quad u_C(t) = E \cos(\omega_0 t)$$

On retrouve toutes les caractéristiques de la situation harmonique, sans perte d'énergie par effet JOULE.

Interprétation E5.3 : Espace des phases pseudo-pér. (HP)

Contrairement à la situation harmonique, le tracé de la solution dans l'espace (u_C, i) n'est **pas symétrique par inversion du temps** : la dissipation par effet JOULE diminue l'énergie du système, et la **tension diminue progressivement**. On observera donc une **spirale décroissante** avec beaucoup d'oscillations quand les amortissements ne sont pas trop élevés, et de moins en moins quand Q diminue.

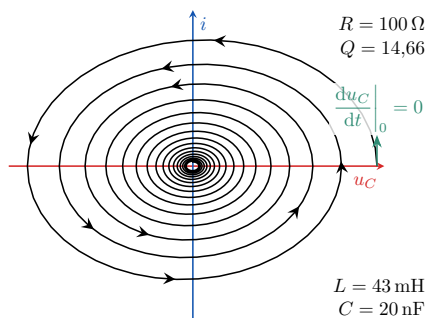


FIGURE E5.7 – Faible amortissement

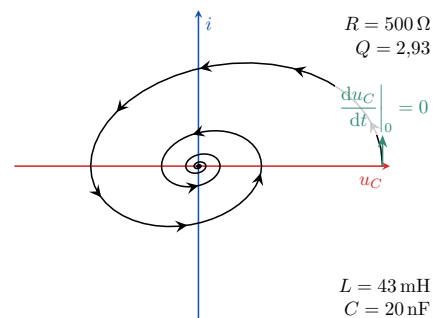


FIGURE E5.8 – Moyen amortissement

I/D) 1.3 Décroissement logarithmique

Définition E5.2 : Décroissement logarithmique

Soit $u_{C,eq} \neq 0$ la valeur d'équilibre de $u_C(t)$, telle que $u_C(t) = u_{C,eq} + e^{-\frac{t}{\tau}} (A' \cos(\Omega t + \varphi_0))$. Le **décroissement logarithmique** entre 2 instants séparés de n périodes s'exprime :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u_C(t) - u_{C,eq}}{u_C(t + nT) - u_{C,eq}} \right)$$

avec n le nombre de périodes utilisées pour le calcul. Il permet de **quantifier l'amortissement** : plus δ est grand, plus l'amortissement est important.

Propriété E5.6 : Décrément et facteur de qualité

Le décrément logarithmique et le facteur de qualité sont reliés par :

$$\delta = \frac{T}{\tau} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\delta^2}}$$

Démonstration E5.6 : Décrément et facteur de qualité

On développe le calcul en commençant par le dénominateur :

$$\begin{aligned} u_C(t+nT) - u_{C,\text{eq}} &= e^{-\frac{t+nT}{\tau}} \underbrace{(A' \cos(\Omega(t+nT) + \varphi_0))}_{= A' \cos(\Omega t + \varphi_0)} \\ \Leftrightarrow u_C(t+nT) - u_{C,\text{eq}} &= e^{-\frac{nT}{\tau}} \underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}} (A' \cos(\Omega t + \varphi_0))}_{= u_C(t) - u_{C,\text{eq}}} \\ \Leftrightarrow \frac{u_C(t) - u_{C,\text{eq}}}{u_C(t+nT) - u_{C,\text{eq}}} &= e^{n \frac{T}{\tau}} \quad (\ln(\cdot)) \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{u_C(t) - u_{C,\text{eq}}}{u_C(t+nT) - u_{C,\text{eq}}}\right) &= n \frac{T}{\tau} \end{aligned}$$

Ainsi, avec la définition du décrément :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \delta &= \frac{T}{\tau} \\ \Leftrightarrow \delta &= \frac{2\pi}{\Omega\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \quad \left\{ \begin{array}{l} T \triangleq \frac{2\pi}{\Omega} \\ \Omega\tau = \sqrt{4Q^2 - 1} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow 4Q^2 - 1 &= \frac{4\pi^2}{\delta^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Au carré} \\ \text{On isole } Q \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\delta^2}} \end{aligned}$$

I/D) 2 Cas $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$: régime critique

I/D) 2.1 Solution de l'équation

♥ Démonstration E5.7 : Solution critique

La seule racine de l'équation caractéristique (E5.1) est double, et vaut

$$r = -\omega_0 \quad \text{soit} \quad u_C(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$$

$$\diamond \text{ On trouve } B : \quad u_C(0) = E = (A \cdot 0 + B) \cdot 1 = B \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{B = E}$$

$$\begin{aligned} \diamond \text{ On trouve } A : \quad \frac{du_C}{dt} \Big|_t &= (A) \exp(-\omega_0 t) + -\omega_0 u_C(t) \\ \Rightarrow \frac{du_C}{dt} \Big|_0 &= \frac{i(0)}{C} = 0 \Leftrightarrow A - \omega_0 E = 0 \quad \boxed{A = \omega_0 E} \end{aligned}$$

♥ Propriété E5.7 : Solution critique

Pour un facteur de qualité $Q = \frac{1}{2}$, u_C s'exprime par

$$\boxed{u_C(t) = E(\omega_0 t + 1) \exp(-\omega_0 t)}$$

et on n'observe **pas une oscillation** : au facteur de qualité critique, l'amortissement est suffisamment important pour empêcher u_C de passer sous 0.

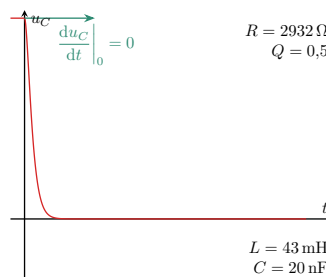


FIGURE E5.9

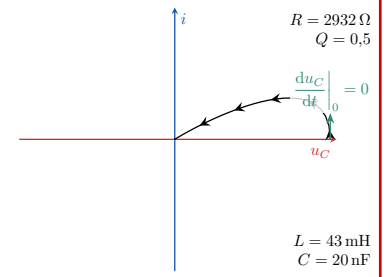


FIGURE E5.10

I/D) 2.2 Régime transitoire

Démonstration E5.8 : Régime transitoire critique

En négligeant le terme linéaire en t devant la décroissance exponentielle, on a

$$\cancel{E} \exp(-\omega_0 t_{95}) = 0,05 \cancel{E} \Leftrightarrow t_{95} = \frac{\ln(20)}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{\omega_0}$$

♥ Propriété E5.8 : Régime transitoire critique

Le temps de réponse à 95% est atteint à t_{95} tel que

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

C'est le régime le plus court sans dépassement.

I/D) 3 Cas $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$: régime aperiodique

I/D) 3.1 Solution de l'équation

♥ Démonstration E5.9 : Solution aperiodique

Les racines de l'équation caractéristique (E5.1) sont réelles, et on a

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{1}{\tau} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= \frac{1}{\tau} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right) \end{aligned}$$

Dans la forme homogène, on a donc

$$u_C(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$$

◇ Avec la première CI :

$$u_C(0) = E = A + B$$

◇ Avec la seconde CI :

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \frac{i(0)}{C} \Leftrightarrow Ar_+ + Br_- = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{Ar_+}{r_-}$$

En combinant, on trouve

$$A = -\frac{Er_-}{r_+ - r_-} \quad \text{et} \quad B = \frac{Er_+}{r_+ - r_-} \quad \blacksquare$$

♥ Propriété E5.9 : Solution aperiodique

Pour un facteur de qualité $Q < 1/2$, u_C s'exprime par

$$u_C(t) = \frac{E}{r_+ - r_-} (r_+ e^{r_- t} - r_- e^{r_+ t})$$

et on n'observe **pas une oscillation**. Le régime transitoire est *plus long* que pour $Q = 1/2$: l'intensité est plus faible.

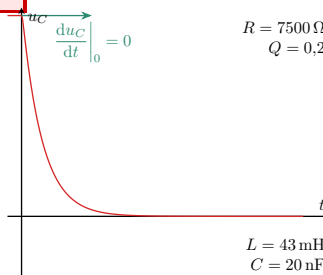


FIGURE E5.11

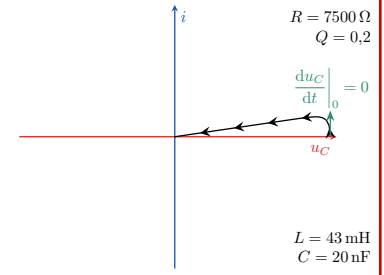


FIGURE E5.12

Remarque E5.3 : Forme de solution aperiodique

Selon les besoins, on peut écrire la solution sous une autre forme. Notamment, on peut montrer qu'elle s'écrit

$$u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\text{ch} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} t \right) + \frac{2}{\tau \sqrt{\Delta}} \text{sh} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} t \right) \right)$$

I/D) 3.2 Régime transitoire

Démonstration E5.10 : Régime transitoire aperiodique

Le transitoire sera contraint par l'exponentielle la « **moins décroissante** » ; on compare donc r_- et r_+ . On remarque d'abord que les deux racines sont négatives (d'où la décroissance exponentielle) :

$$\begin{aligned} r_+ < 0 &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\tau}}_{\omega_0 \text{ et } Q > 0} (1 - \sqrt{1 - 4Q^2}) > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - 4Q^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - 4Q^2} < 1^2 \\ &\Leftrightarrow 4Q^2 > 0 \quad \text{ce qui est vrai.} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} &r_- < r_+ \\ &\Leftrightarrow |r_-| > |r_+| \quad \text{(car } r_{\pm} < 0) \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{r_-} \right| < \left| \frac{1}{r_+} \right| \quad \text{(car } (\cdot)^{-1} \text{ inverse l'ordre)} \\ &\Leftrightarrow \tau_- < \tau_+ \end{aligned}$$

On a donc $t_{95} = \tau_+ \ln(20)$ (cf. démonstration E5.5).

Pour $Q \ll 1$, on utilise $\sqrt{1+x} \sim 1 + x/2$ pour simplifier r_+ :

$$r_+ = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$$

$$\Rightarrow r_+ \underset{Q \ll 1}{\sim} -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \left(1 - \frac{4Q^2}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow r_+ \underset{Q \ll 1}{\sim} -Q\omega_0$$

Avec $\ln(20) \approx \pi$:

$$t_{95} \approx \frac{\pi}{Q\omega_0} \quad \text{soit} \quad t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}$$

♥ Propriété E5.10 : Régime transitoire apériodique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Implication E5.2 : Résultat $R \rightarrow \infty \Leftrightarrow Q \rightarrow 0$

Quand $Q \rightarrow 0$, on peut négliger le terme d'ordre 2 dans l'équation différentielle devant le terme d'ordre 1 ; on se retrouve alors avec une équation différentielle du premier ordre, ce qui est cohérent avec l'amortissement exponentiel !

II Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides

II/A Présentation

♥ Définition E5.3 : Situation initiale et bilan des forces

- ◇ **Système** : {point M} de masse m
- ◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
- ◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (voir schéma)
- ◇ **Repérage** :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u}_x ; \vec{v} = \dot{x}(t)\vec{u}_x ; \vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{u}_x$$

- ◇ **Longueur du ressort** : $\ell(t) = x_M(t) - x_O = x(t)$
- ◇ **Position initiale** : $x(0) = L_0 > 0$
- ◇ **Vitesse initiale** : $\vec{v}(0) = \vec{0}$

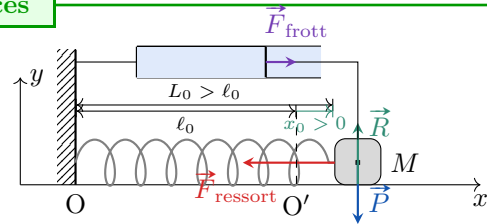


FIGURE E5.13

- ◇ **Bilan des forces** :

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$

Réaction $\vec{R} = R\vec{u}_y$

HOOKE $\vec{F}_r = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x$

Frotte^t $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}(t) = -\alpha\dot{x}(t)\vec{u}_x$

II/B Équation différentielle

♥ Démonstration E5.11 : Équation ressort amorti

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_f + \vec{F}_r$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}(t)\vec{u}_x = -mg\vec{u}_y + R\vec{u}_y - k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x - \alpha\dot{x}(t)\vec{u}_x$$

$$\overset{\vec{u}_x}{\Rightarrow} m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = k\ell_0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}\ell_0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = \omega_0^2\ell_0$$

Canonique ■

On identifie ω_0 et Q :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et $\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ ■

♥ Propriété E5.11 : Équation ressort amorti

La position x de la masse est régie par :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \ell_0$$

ℓ_0 reste donc la longueur d'équilibre du système.

◇ $\omega_0 = \frac{k}{m}$ la pulsation propre ;

◇ $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ le facteur de qualité.

Important E5.3 : Analogie RLC-ressort amorti

Ici aussi, les deux systèmes sont **régis par la même équation différentielle**. On observe une **oscillation amortie** du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x_{\text{eq}} = \ell_0$.

Ici, c'est le coefficient de frottements α qui dissipe l'énergie sous forme de chaleur : on l'associe à R .

Élec $\longleftrightarrow$ Méca
LdM $\longleftrightarrow$ PFD
$u \longleftrightarrow \vec{F}$
$q \longleftrightarrow x$
$i \longleftrightarrow v$
$L \longleftrightarrow m$
$C^{-1} \longleftrightarrow k$
$R \longleftrightarrow \alpha$

II/C Bilan de puissance

Propriété E5.12 : $\mathcal{P}$ ressort

Dans le système masse-ressort horizontal avec frottements fluides, l'énergie mécanique diminue proportionnellement au coefficient de friction α :

$$\frac{d\varepsilon_m}{dt} = -\alpha v(t)^2 < 0 \quad \text{donc} \quad \varepsilon_m(t) \searrow$$

Démonstration E5.12 : $\mathcal{P}$ ressort

À partir du PFD $\times v$:

$$m\ddot{x}_h\dot{x}_h + \alpha\dot{x}_h\dot{x}_h + kx_h\dot{x}_h = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{=\varepsilon_c} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_h^2}_{=\varepsilon_p^{\text{el}}} \right) = -\alpha v^2 \quad \left. \vphantom{\frac{d}{dt}} \right) f \cdot \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}f^2 \right) \quad \blacksquare$$

II/D Solutions

Implication E5.3 : Solutions ressort

On a les mêmes solutions en changeant u_C par x et E par L_0