Travaux pratiques – TP 7

Circuits du premier ordre en régime transitoire

Capacités exigibles

- ▢ Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.
- ▢ Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.
- ▢ Capacité numérique : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.

Objectifs

- ◇ Réaliser des montages simples d'électricité.
- ◇ Déterminer expérimentalement un temps de relaxation.
- ◇ Observer les différents paramètres qui influent sur un régime transitoire.
- ◇ Observer les différents régimes du second ordre.
- ◇ Découvrir quelques fonctions nouvelles de l'oscilloscope et du GBF.
- ◇ Mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide de `Python` pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation quelconque.

I S'approprier

I/A Circuit intégrateur

Définition TP7.1 : Circuit intégrateur

Un montage est considéré comme **intégrateur** (on le verra en cours dans quelques semaines) si la tension de sortie (dans notre cas $u_c(t)$) est une primitive, à une constante multiplicative K près, de la tension d'entrée (dans notre cas $e(t)$), soit encore

$$u_c(t) = K \int e(t) \mathrm{d}t$$

I/B Détermination numérique de la solution

I/B) 1 Position du problème

Soit $u_C(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$$

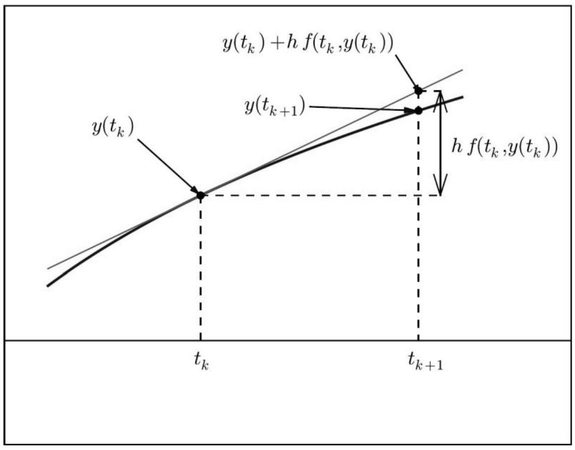
L'objectif de cette partie est de déterminer **numériquement** la solution $u_C(t)$ de cette équation pour une entrée quelconque $e(t)$ pour laquelle il n'existe pas toujours de solutions analytiques. Nous allons utiliser un schéma numérique classique appelé méthode d'Euler. En pratique, elle est relativement peu efficace, mais très simple à comprendre et à mettre en place, et permet une première approche simple du problème.

I/B) 2 Méthode d'Euler : mathématiquement

Des théorèmes assurent que, sous des conditions raisonnables, il existe une unique application y de classe C^1 sur $[a,b]$ dont la valeur est imposée en a et qui vérifie une équation différentielle de la forme $y'(t) = f(t,y(t))$ pour tout $t \in [a,b]$. L'objet des *schémas numériques* est d'obtenir des approximations de cette solution.

En pratique, on tente d'approcher y en un certain nombre de points répartis sur l'intervalle $[a,b]$. Plus précisément, on veut calculer une approximation y_k des $y(t_k)$ avec $t_k = a{+}kh$ où $h = \dfrac{b-a}{n}$ est un pas qu'il conviendra d'ajuster (on peut supposer que plus le pas est petit, meilleure sera l'approximation). De façon simple, on peut écrire :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(u)\mathrm{d}u = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(u,y(u))\mathrm{d}u$$
$$\Leftrightarrow y(t_{k+1}) - y(t_k) \approx hf(t_k,y(t_k))$$



Outils TP7.1 : Méthode d'Euler

On obtient alors la méthode d'Euler explicite : les approximations sont calculées de proche en proche sur l'intervalle $[a,b]$ via la formule suivante :

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + hf(t_k,y_k)} \quad \text{avec} \quad \boxed{t_k = a + kh} \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

On initialise bien entendu avec $y_0 = y(a)$, qui sera la seule valeur « exacte » calculée.

II Analyser : régime transitoire du circuit RC

Attention TP7.1 :

Vous prendrez soin de refaire tous les schémas des circuits mis en place ou étudiés.

II/A Charge et décharge du condensateur

On considère le montage Figure TP7.1 ci-contre de constante de temps $\tau = RC$, et $e(t)$ est une tension créneau de fréquence $f = 1{,}0\,\mathrm{kHz}$.

(1) Recopier la Figure TP7.2 ci-dessous sur votre copie, et y dessiner la forme de la réponse de $u_C(t)$ aux différents échelons en supposant que l'on n'observe **que** le régime transitoire, mais dans son entièreté. Relier alors dans ce cas-là τ à T, puis à f. Expliquer en français ce qui nous contraint dans ce choix. Application numérique pour la fréquence indiquée.

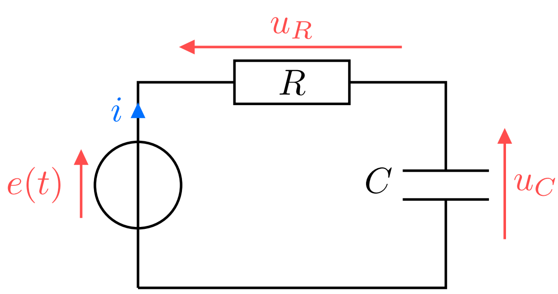


Figure TP7.1

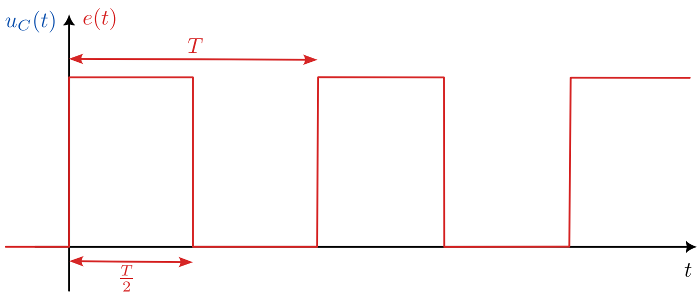


Figure TP7.2

(2) Si $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, quelle valeur faut-il alors donner à C ? Répondre en µF.

(3) Sur les boîtes de résistances et de capacités, on trouve les informations suivantes concernant les demi-largeurs :

$$\Delta_r(R) = \frac{\Delta(R)}{R} = 0{,}5\,\% \quad \text{et} \quad \Delta_r(C) = \frac{\Delta(C)}{C} = 0{,}15\,\%$$

Rappeler le lien entre incertitude-type $u(x)$ et demi-largeur $\Delta(x)$ pour une incertitude de type B ; en déduire le lien entre l'incertitude-type relative $u_r(x)$ et la demi-largeur relative $\Delta_r(x)$. Calculer alors l'incertitude sur la valeur théorique en **convertissant bien les demi-largeurs de pourcentages en valeurs décimales sans unité**. **Écrire le résultat final sous la forme** $\tau = \ldots \pm \ldots$ ms.

Rappel TP7.1 : Incertitude composée pour multiplication

$$y = x_1 x_2 \Rightarrow \boxed{u_r(y) = \sqrt{u_r(x_1)^2 + u_r(x_2)^2}} \quad \text{avec} \quad u_r(x) = \frac{u(x)}{x} \quad \text{incertitude relative}$$

2 Recopier deux fois la Figure TP7.2 en dessinant ce qu'il se passe si τ est trop grand ou si τ est trop petit par rapport à T (ou si T est trop petit ou trop grand par rapport à τ). Expliquer en français ce qu'il se passe.

3 On veut visualiser à l'oscilloscope simultanément $e(t)$ sur la voie 1 et $u_C(t)$ sur la voie 2 ; indiquer sur un schéma à l'aide des Y_1 et Y_2 les connexions à réaliser.

II/B Étude théorique du circuit intégrateur

L'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ est

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$$

Supposons que à $t = 0$, $e(t)$ passe de 0 à E.

4 Déterminer la solution de l'équation différentielle précédente dans le cas où $u_C(t = 0) = 0$ et pour l'échelon montant ($e(t)$ vaut E pour $t \geq 0$).

5 En utilisant un développement limité du terme exponentiel autour de $t = 0$, montrer que le montage est intégrateur (la sortie est une primitive de l'entrée, cf. Df.TP7.1). Indiquer ce que vaut la constante multiplicative.

Aide

Le développement limité de l'exponentielle s'écrit

$$e^x \underset{x \to 0}{\sim} 1 + x$$

II/C Circuit RC avec visualisation de $e(t)$ et $u_R(t)$

On souhaite maintenant visualiser $e(t)$ sur la voie 1 et $\boxed{u_R(t)}$ sur la voie 2.

6 Sur votre feuille, faire le schéma du montage correspondant en indiquant les branchements de l'oscilloscope par des Y_1 et Y_2.

7 Écrire l'équation différentielle vérifiée par la variable $u_R(t)$ et en donner la solution pour $e(t) = E$ et $u_R(t = 0^-) = 0$. Attention, la tension n'est *a priori* pas continue aux bornes de R...

III Réaliser et valider

Rappel TP7.2 : Règles de bonne pratique

- En pratique, on commence toujours par effectuer les branchements du circuit sans insérer les appareils de mesure.
- Puis, on **relie toutes les masses entre elles** afin d'éviter de fixer par erreur une autre masse dans le circuit. Ainsi, un bon circuit aura une « ligne de masse » à laquelle seront reliés obligatoirement tous les câbles noirs provenant des câbles coaxiaux-filaires reliés à l'oscilloscope ou au GBF.
- Enfin, on place alors les fils colorés des câbles de mesure aux endroits où on désire relever la tension. Vous serez d'ailleurs également vigilant-es au choix de couleurs des fils, sinon on se perd rapidement...

Ces règles sont fondamentales et ne doivent pas être négligées si on veut que le circuit fonctionne.

III/A Étude expérimentale du régime transitoire du circuit RC

III/A) 1 Cas général : charge et décharge du condensateur

Expérience TP7.1 : Charge et décharge de C

1) Réaliser le montage RC proposé dans la partie II.A.
2) $e(t)$ est une tension créneau (alternance de tension nulle et de tension constante E) d'un générateur basses fréquences, réglé sur une fréquence de 1,0 kHz.
3) R est une boîte de résistances variables ; prendre $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$.
4) C est une boîte de capacités réglables ; prendre la valeur calculée dans la partir analyse.
5) Observer $e(t)$ et $u_C(t)$.
6) Imprimer vos courbes en suivant le protocole imprimé et plastifié sur vos paillasses.

Attention TP7.2 : Impression

Pensez à inverser la couleur de l'écran pour ne pas imprimer sur un fond noir et à **imprimer le plus grand possible**. Pensez à **mettre vos noms et à numéroter vos annexes**.

1 Déterminer la constante de temps τ_{exp} ainsi que son incertitude à partir des courbes imprimées. Expliquer votre démarche et **faire apparaître les traits de mesure** sur vos courbes.

2 Calculer **et commenter** l'écart normalisé E_N avec la valeur théorique, dont on a déterminé l'incertitude Question 3.

3 Étudier l'influence de R et de C sur le signal, à la lumière de la Question 2: comment varie de le temps de charge ? Comment est modifiée la courbe observée ?

4 Faire varier également la **fréquence** du signal périodique et **commenter vos observations**, en lien avec la question précédente. Il n'est pas demandé de refaire de nouvelles mesures : une analyse qualitative est suffisante.

III/A) 2 Cas particulier du circuit intégrateur

Attention TP7.3 : Attention

Pour toute mesure, vérifier que la source du menu mesure correspond bien à la courbe sur laquelle vous faites des mesures.

Expérience TP7.2 : RC intégrateur

Ne pas modifier le montage précédent : $e(t)$ est toujours une tension créneau et on observe$e(t)$ et $u_C(t)$. Augmenter R vers $50\,\mathrm{k\Omega}$: on a alors $\tau \approx 25\,T$.

5 Quel problème se pose vis-à-vis de l'observation de u_C quand τ est « trop grand » ? Justifier en utilisant la Question 5. Dans quel sens faut-il modifier le calibre vertical pour observer le signal ?

6 Après recalibrage des échelles, quelle est l'allure de $u_C(t)$? **Faire un schéma ou imprimer**. $u_C(t)$ est-elle bien la primitive de $e(t)$ à une constante multiplicative près ? Que vaut cette constante ?

7 Déterminer expérimentalement la pente de la courbe $u_C(t)$ en vous aidant des curseurs. Comparer à la valeur théorique.

Expérience TP7.3 : Entrée sinusoïdale

Conserver les valeurs de τ et T. Changer la tension créneau par une tension sinusoïdale.

8 Recopier la Figure TP7.3 et compléter ce que vous voyez. En supposant que l'entrée est un cosinus de la forme $e(t) = A\cos(\omega t)$ (comme sur la Figure), quelle fonction décrit $u_C(t)$? Écrire sa forme mathématique générale. Quel est le déphasage entre les deux signaux ? Le circuit est-il toujours intégrateur ?

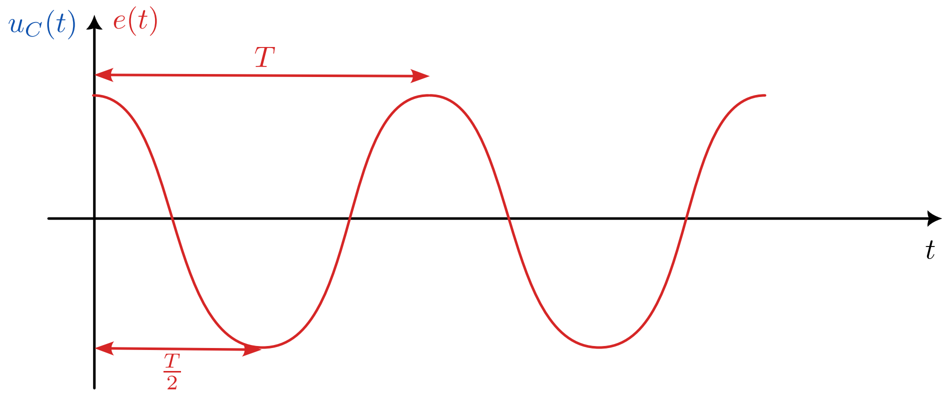


Figure TP7.3

Expérience TP7.4 : Entrée triangulaire

Conserver les valeurs de τ et T. Changer la tension créneau par un signal triangulaire.

9 Recopier la Figure TP7.4 et compléter ce que vous voyez. L'entrée étant une succession de droites affines, par quelle fonction pourrait-on décrire le signal $u_C(t)$? Le circuit est-il toujours intégrateur ?

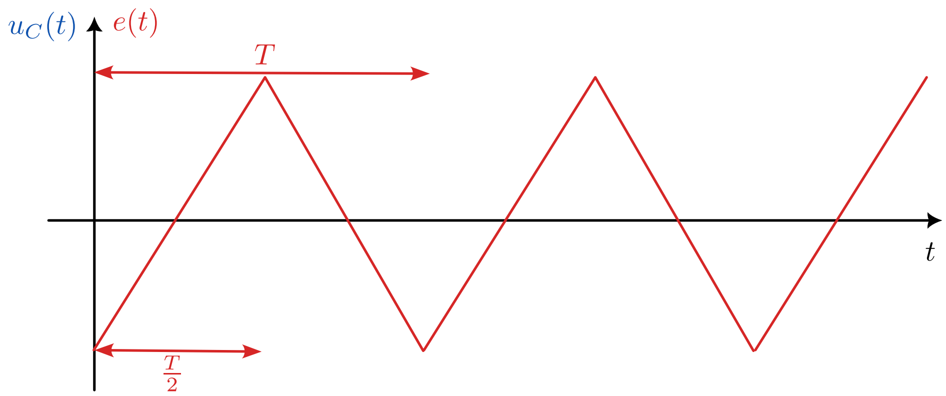


Figure TP7.4

Expérience TP7.5 : Limite de l'intégrateur

Augmenter **encore** la valeur de τ en jouant sur R ou C. Observer $e(t)$ et $u_C(t)$.

10 Quel inconvénient apparaît ? Commenter vos observations.

III/A) 3 Tension aux bornes de la résistance u_R

Expérience TP7.6 : Observation de $u_R(t)$

Se placer dans les mêmes conditions que dans la partie II.C, en revenant à une **tension créneau** pour $e(t)$. Observer à l'oscilloscope $e(t)$ et $\boxed{u_R(t)}$.

11 Imprimer les résultats. Commenter l'allure de la courbe. Est-elle conforme à l'expression analytique attendue ?

III/B Étude numérique

Effectuez cette étude sur `Capytale` : https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/1092-7786080.

III/B) 1 Écriture du script

On créé la fonction `euler(f, a, b, y0, n)` effectuant les calculs détaillés dans la partie I/B) 2. Ses paramètres d'entrée sont une fonction f, des valeurs de a et b, un entier n et une condition initiale $y0$. Elle calcule les valeurs approchées sur $[a,b]$ de la solution de l'équation différentielle $y'(t) = f(t,y(t))$ avec la condition initiale $y(a) = y0$. Cette fonction renvoie la liste des $n+1$ valeurs approchées y_k de y aux temps $t_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k \in [\![0,n]\!]$.

```python
def euler(f, y0, a, b, n):
    """
    Calcule les points suivants d'une fonction par une approximation
    tangentielle, sur l'intervalle de temps [a,b] à partir de l'ordonnée
    y0 et ce pour n points.
    """
    h = (b - a) / n # le pas temporel
    yk = y0         # on initialise le premier y_k avec y0
    tk = a          # de même avec t_k = t_0
    list_y = [y0]   # on initialise la liste avec la condition initiale
    for k in range(n - 1):
        yk =               # à compléter (voir Otl.TP7.1)
        tk =               # à compléter (voir Otl.TP7.1)
        list_y.append(yk)  # on ajoute la valeur de yk à la liste
    return list_y
```

Il faut ensuite créer la fonction `f` ainsi que la fonction entrée `e` pour plus de clarté. Vous compléterez la fonction `f` pour qu'elle renvoie l'expression correspondant à l'équation différentielle que vous cherchez à résoudre.
On récupère les valeurs y de la solution par :

```python
a = 0   # s
b = 10  # s
n = 100  # points de calculs
y0 = 0  # condition initiale
list_y = euler(f, a, b, y0, n)  # list_y est un vecteur des valeurs de y
```

III/B) 2 Test dans un cas analytique

Tester votre fonction précédente avec une entrée constante $e(t) = E$ afin de résoudre l'équation différentielle sur $u_C(t)$. Afficher sur un même graphique la solution numérique et la solution analytique obtenue question 4 (avant développement limité). On pourra, par choix et pour fixer les idées, sans que cela porte à conséquence prendre :

$$E = 1\,\mathrm{V} \qquad \tau = 1\,\mathrm{s} \qquad u_C(t=0) = 0$$

Vous afficherez également la fonction erreur au cours du temps, qui est la différence entre votre solution numérique et la solution analytique.

Vous testerez la sensibilité au pas de calcul.

III/B) 3 Test dans un cas non analytique

Lorsque la solution $u_C(t)$ peut être obtenue analytiquement, la solution numérique n'a que peu d'intérêt. Elle prend en revanche tout son sens dans des cas non-analytiques.

Testez votre programme pour plusieurs entrées (en changeant le contenu de la fonction `e(t)`) : sinusoïdale, rampe linéaire, exponentielle…