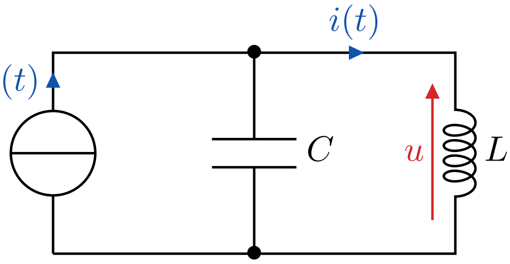
Électrocinétique – chapitres 4 et 5

Correction du TD d'application

I Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

Dans le circuit ci-contre, la source idéale de courant est brusquement éteinte. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.



1 Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de i, $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$.

Réponse

Une fois le générateur de courant stoppé, l'énergie totale est la somme de l'énergie stockée dans le condensateur et de celle stockée dans la bobine, soit

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

En dérivant on a donc

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}C \cdot 2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\cdot 2i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Comme on demande de ne faire apparaître que i dans le résultat, on remplace u avec la relation courant-tension de la bobine et on développe :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}C\cdot 2L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{2}L\cdot 2i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} && \text{On développe}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = L^2C\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} && \text{On factorise par } \tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\left(LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i\right)}
\end{aligned}$$

Attention E4 et 5.1 : Courant de C

Le courant circulant dans le condensateur est $i_C = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, mais i_C n'est **pas** i : $\eta = i_C + i$.

2 Justifier qualitativement que $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i. Que peut-on en conclure ?

Réponse

Le circuit ne compte qu'une bobine et un condensateur qui stockent de l'énergie sans la dissiper, et donc aucune résistance. L'énergie électrique dans le circuit est donc constante, et on en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{donc} \quad L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\left(LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i\right) = 0$$

On a donc un produit qui est nul. Or, la tension de la bobine $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ ne peut être constamment nulle, c'est donc le terme entre parenthèses qui est nul, c'est-à-dire :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 i = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Important E4 et 5.1 : Équation différentielle

On retrouve bien l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, sans passer par les lois des nœuds et des mailles. Cette approche énergétique est très élégante et efficace ; nous la reverrons en mécanique puis partout en physique.

3 Retrouver cette équation par application des lois des nœuds et des mailles.

Réponse

C et L sont en parallèle, donc partagent la même tension u. Soit i_C le courant traversant C. Comme $\eta(t \geq 0) = 0$, la loi des nœuds donne

$$0 = i_C + i \quad \text{donc} \quad C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i = 0$$

avec la RCT du condensateur. Comme u est aussi la tension de L, avec la RCT de la bobine on retrouve bien

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0}$$

◇

4 Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée, par deux schémas d'abord puis en explicitant la détermination.

Réponse

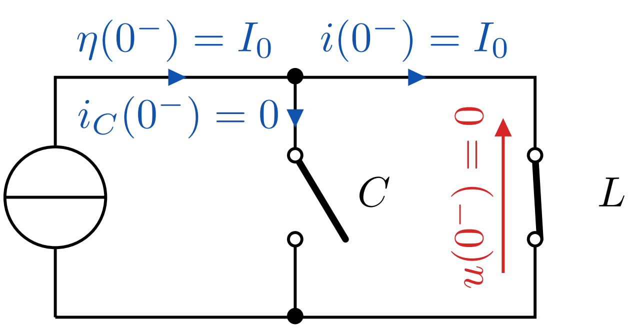


FIGURE E4.1 – En 0^-

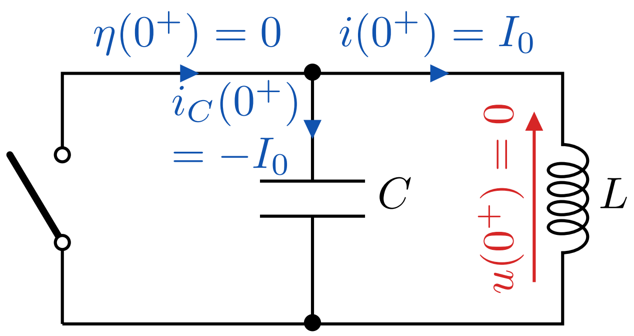


FIGURE E4.2 – En 0^+

À $t = 0^-$, le circuit est alimenté par $\eta(0^-) = I_0$ et on suppose le régime permanent atteint : la bobine est donc équivalente à un fil, et le condensateur à un interrupteur ouvert. On en déduit donc

$$i(0^-) = I_0 \quad \text{et} \quad u(0^-) = 0$$

Par continuité de i traversant la bobine et de u aux bornes du condensateur, on a

$$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = I_0} \quad \text{et} \quad u(0^-) = u(0^+) = 0$$

Or, $u(0^+) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ d'après la RCT de la bobine. La seconde condition initiale est donc $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} = 0}$

◇

5 En déduire l'expression de $i(t)$, puis celle de $u(t)$.

Réponse

L'équation étant homogène, on injecte la forme générique :

$$i(t) = K\mathrm{e}^{rt} \Rightarrow r_\pm = \pm \mathrm{j}\omega_0$$
$$\Leftrightarrow i(t) = K_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + K_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \Leftrightarrow i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Première CI : $$i(0) = I_0 = A$$

Seconde CI : $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \omega_0 B = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0$$

D'où $$\boxed{i(t) = I_0\cos(\omega_0 t)}$$

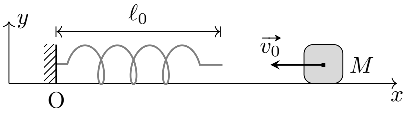
et $$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{u(t) = -LI_0\omega_0\sin(\omega_0 t)}$$

On retrouverait bien $i_C = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -i$ d'après la loi des nœuds.

◇

II Masse percutant un ressort

Un ressort (raideur k et longueur à vide ℓ_0) fixé en O est initialement au repos. Une masse m glisse sans frottement à vitesse constante $\vec{v} = -v_0\,\vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$ et s'accroche *définitivement* au ressort à l'instant $t = 0$.



1 Déterminer l'équation du mouvement de la masse une fois qu'elle est accrochée (pour $t \geq 0$).

Réponse

- **Système** : {point M} de masse m
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
- **Repère** : $(\text{O}, \vec{u_x}, \vec{u_y})$ (voir schéma)
- **Repérage** : avec $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ la dérivée **temporelle**,

$$\overrightarrow{\text{OM}} = x(t)\vec{u_x}\ ;\ \vec{v} = \dot{x}(t)\vec{u_x}\ ;\ \vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{u_x}$$

- **Longueur du ressort** : $\ell(t) = x_\text{M}(t) - x_\text{O} = x(t)$
- **Longueur initiale** : $\ell(0) = \ell_0$
- **Vitesse initiale** : $\vec{v}(0) = -v_0\vec{u_x}$

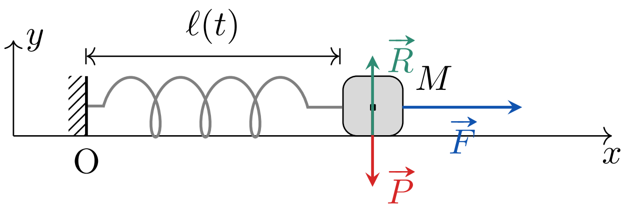


Figure E4.3

- **Bilan des forces :**

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$
Réaction	$\vec{R} = R\vec{u_y}$
Hooke	$\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_x}$

Avec le PFD on a donc

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{x}(t)\vec{u_x} = -mg\vec{u_y} + R\vec{u_y} - k(\underbrace{\ell(t)}_{=x(t)} - \ell_0)\vec{u_x}$$

On effectue le changement de variable $x_h(t) = x(t) - \ell_0$, et sur l'axe $\vec{u_x}$ on trouve bien

$$\boxed{m\ddot{x}_h(t) + kx_h(t) = 0} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}_h(t) + {\omega_0}^2 x_h(t) = 0}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. La projection sur $\vec{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids.

2 Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

Réponse

On a : $\boxed{x_h(0) = 0}$ et $\boxed{\left.\dfrac{\mathrm{d}x_h}{\mathrm{d}t}\right|_0 = -v_0}$

Forme générique : $x_h(t) = K\mathrm{e}^{rt} \Rightarrow r_\pm = \pm \mathrm{j}\omega_0$ soit $x_h(t) = K_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + K_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

CI : $x_h(0) = A\underbrace{\cos(0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(0)}_{=0} \Leftrightarrow A = 0$

$$\left.\frac{\mathrm{d}x_h}{\mathrm{d}t}\right|_0 = -A\omega_0\underbrace{\sin(0)}_{=0} + B\omega_0\underbrace{\cos(0)}_{=1} \Leftrightarrow B = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

On a donc $x_h(t) = -\dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow \boxed{x(t) = \ell_0 - \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

3 À quelle condition la masse vient-elle percuter la paroi en O ?

Réponse

En supposant que le ressort puisse se comprimer à l'infini, la masse vient percuter la paroi située en O si l'amplitude de $x(t)$ est égale à 0, c'est-à-dire

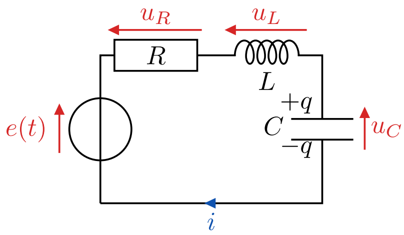
$$\boxed{\frac{v_0}{\omega_0} = \ell_0} \Leftrightarrow \boxed{v_0 = \omega_0\ell_0}$$

On remarque donc que plus v_0 est grande, plus cela est facile, mais également que plus ω_0 est faible est plus cela est facile.

En effet, plus la pulsation est élevée et moins la masse a d'amplitude à v_0 fixée. Ceci correspond bien à l'intuition qu'on pourrait en avoir énergétiquement : une énergie mécanique totale se répartit dans l'énergie potentielle élastique d'une part, c'est-à-dire la distance d'élongation du ressort, et dans l'énergie cinétique d'autre part, donc dans sa vitesse.

III RLC sur q et bilan d'énergie

Un circuit électrique est composé d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension tel que : $\begin{cases} e(t<0) = 0 \\ e(t \geq 0) = E \end{cases}$. On pose $\gamma = \dfrac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$



1 Expliquer simplement pourquoi à $t = 0^-$ la charge q et le courant i sont nuls. En déduire les conditions initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée. Deux schémas sont attendus.

Réponse

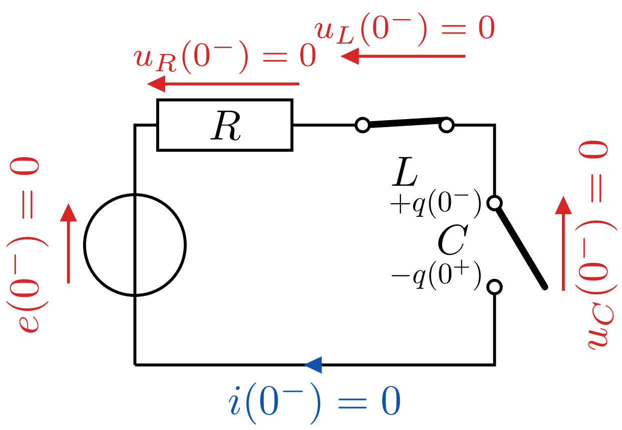


FIGURE E5.4 – En 0^-

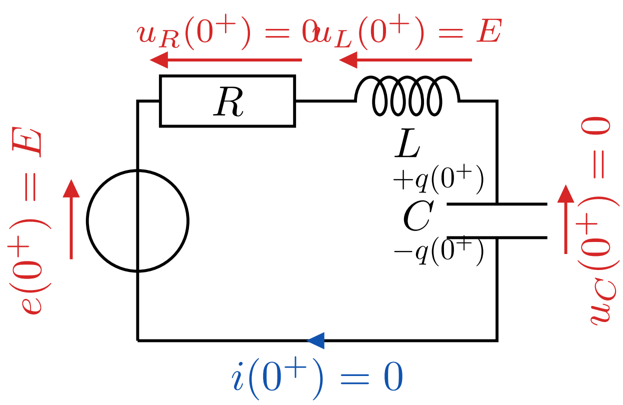


FIGURE E5.5 – En 0^+

À $t = 0^-$, le circuit est depuis longtemps sous la tension $e = 0$; il a donc atteint son régime permanent, et le condensateur s'est déchargé et est équivalent à un interrupteur ouvert : forcément,

$$\boxed{i(0^-) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{q(0^-) = Cu(0^-) = 0}$$

De plus, la tension aux bornes d'un condensateur est continue donc sa charge aussi, c'est-à-dire

$$\boxed{q(0^-) = q(0^+) = 0}$$

et comme le courant traversant une bobine est également continu, on a

$$i(0^-) = i(0^+) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} = 0}$$

2 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t \geq 0$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 q = \frac{E}{L}$$

Préciser, en les justifiant, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée.

Réponse

Avec une loi des mailles, les RCT de la résistance, de la bobine et du condensateur et la relation $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, on a

$$u_L + u_R + u_C = E \Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{q}{C} = E$$

$$\Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=E \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{CL}=\frac{E}{L}$$

◇

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R, L et C. On suppose dans la suite la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.

3 Montrer que l'expression de la charge pour $t \geq 0$ peut se mettre sous la forme

$$q(t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\mathrm{e}^{-\gamma t} + D$$

avec ω une constant à exprimer en fonction de ω_0 et γ, et A, B et D des constantes à exprimer en fonction de C, E, ω et γ.

Réponse

L'équation caractéristique de discriminant Δ de l'équation homogène est

$$r^2 + 2\gamma r + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(\gamma^2 - {\omega_0}^2)$$

Comme $\omega_0 > \gamma$, on a $\Delta < 0$ et on est donc dans un régime pseudo-périodique. On aura donc

$$r_\pm = -\frac{\cancel{2}\gamma}{\cancel{2}} \pm \mathrm{j}\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\cancel{4}({\omega_0}^2-\gamma^2)} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm = -\gamma \pm \mathrm{j}\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{{\omega_0}^2-\gamma^2}}$$

La solution particulière est $\frac{E}{L{\omega_0}^2} = CE$, donc on aura la forme générale

$$\boxed{q(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) + CE}$$

Avec la première CI,

$$q(0) = A + CE = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = -CE}$$

et avec la seconde,

$$\left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|_0 = -\gamma A + B\omega = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = -CE\frac{\gamma}{\omega}}$$

soit finalement

$$\boxed{q(t) = CE - CE\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)\right)}$$

◇

4 Exprimer le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C, E, ω_0 et γ.

Réponse

On dérive q :

$$\begin{aligned}
& i(t) = CE\gamma\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)\right) - CE\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(-\omega\sin(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega}\omega\cos(\omega t)\right) && \text{On factorise} \\
\Leftrightarrow\ & i(t) = CE\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(\cos(\omega t)\left[\gamma - \gamma\right] + \sin(\omega t)\left[\frac{\gamma^2}{\omega} + \omega\right]\right) && \text{Même dénominateur} \\
\Leftrightarrow\ & i(t) = CE\mathrm{e}^{-\gamma t}\cdot\frac{\gamma^2+\omega^2}{\omega}\sin(\omega t) && \omega^2 - {\omega_0}^2 - \gamma^2 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{i(t) = CE\mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{\omega_0^2}{\omega}\sin(\omega t)}
\end{aligned}$$

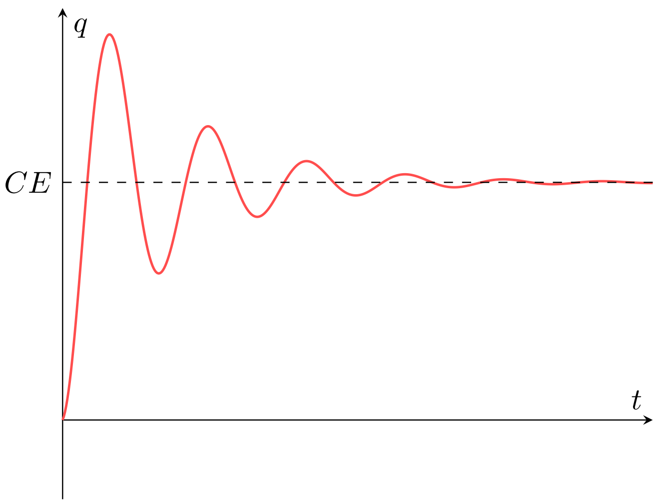
■

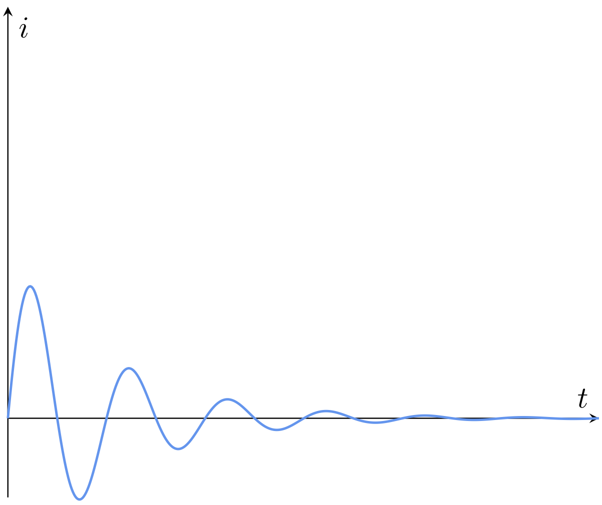
◇

5 Donner l'allure des courbes $q(t)$ et $i(t)$. Quelles sont leurs valeurs à la fin du régime transitoire ? Justifier par des considérations simples ces valeurs atteintes.

Réponse

La charge finale atteinte est CE et le courant final est nul. Ces valeurs se retrouvent facilement en remarquant qu'en régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil ; le courant est alors nul, et ainsi les tensions aux bornes de L et R le sont également : la tension E du circuit est entièrement dans u_C, et sa charge est donc CE.





6 Déterminer l'énergie totale $\mathcal{E}_G$ fournie par le générateur ainsi que l'énergie $\mathcal{E}_{LC}$ emmagasinée dans la bobine et le condensateur à la fin du régime transitoire en fonction de C et E. En déduire l'énergie dissipée par effet JOULE dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat paradoxal qui apparaît dans le cas limite $R \longrightarrow 0$.

Réponse

Un bilan de puissance sur le circuit, (i.e. **loi des mailles**$\times i$) donne

$$\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_J = \mathcal{P}_G \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{LC} + \mathcal{E}_J = \mathcal{E}_G}$$

On trouve donc naturellement que l'énergie du générateur se répartit entre la bobine, l'inductance et la résistance. On va donc déterminer $\mathcal{E}_G$ et $\mathcal{E}_{LC}$ pour trouver $\mathcal{E}_J$ par différence.

L'énergie fournie par le générateur s'obtient en intégrant la puissance fournie Ei par le générateur entre $t = 0$ et $t \to \infty$. En se rappelant que $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, cette intégrale se ramène à une simple intégration sur q de valeur initiale 0 et de valeur finale CE :

$$\mathcal{E}_G = \int_0^{\infty} Ei\mathrm{d}t = \int_0^{CE} E\mathrm{d}q = E\,[q]_{q=CE}^{q=0} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_G = CE^2}$$

L'énergie $\mathcal{E}_{LC}$ emmagasinée par l'inductance et la capacité se calcule par différence des énergies stockées dans ces dipôles entre l'instant final et l'instant initial. Or, les deux dipôles sont initialement déchargés, et comme $i = 0$ à la fin l'énergie de la bobine est nulle. Ainsi,

$$\mathcal{E}_{LC} = \left[\frac{1}{2}Li(t)^2 + \frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C}\right]_{t=0}^{t=\infty} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{LC} = \frac{1}{2}CE^2}$$

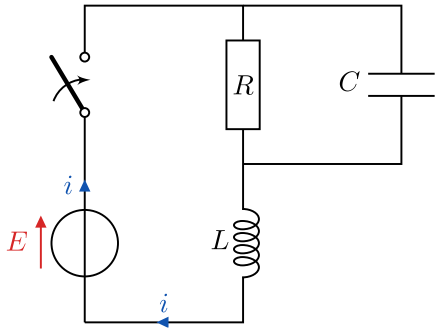
Ainsi,
$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_G - \mathcal{E}_{LC} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_J = \frac{1}{2}CE^2}$$

Ces calculs sont indépendants du régime dans lequel se trouve le circuit. L'énergie fournie par le générateur est donc deux fois plus grande que celle stockée par la bobine et le condensateur, **indépendamment de la valeur de la résistance du circuit**.

Extrapolé à $R \longrightarrow 0$, ce résultat semble contredire le principe de conservation de l'énergie, puisque la seconde moitié d'énergie ne peut plus être dissipée par effet JOULE. En fait, pour $R \longrightarrow 0$, le circuit oscille de façon sinusoïdale : on n'atteint jamais de régime permanent continu, et la bobine et le condensateur stockent et restituent alternativement de l'énergie.

IV Oscillateur amorti RLC à 2 mailles

Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.

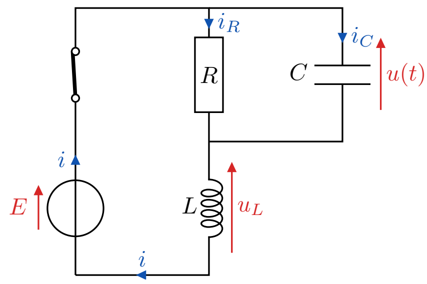


1 Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

Réponse

On est en présence d'un circuit à deux mailles. On applique la loi des nœuds :

$$\begin{aligned} & i = i_R + i_C \\ \Leftrightarrow\ & i = \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i_C &= C\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ i_R &= \tfrac{u}{R} \end{aligned}$$



Il faut changer u en i. Or, $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$; il nous suffit donc de relier u à u_L par la loi des mailles :

$$\begin{aligned} & E = u + u_L \\ \Leftrightarrow\ & u_L = E - u \end{aligned}$$

Ainsi, en réinjectant :

$$\begin{aligned} & i = \frac{E}{R} - \frac{u_L}{R} - C\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}} \end{aligned} \qquad u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

◇

2 L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

Réponse

On cherche à l'écrire sous la forme canonique classique

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = {\omega_0}^2 i_\infty$$

L'identification à la forme précédente permet alors d'obtenir :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad i_\infty = \frac{E}{R}$$

Avec ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur, Q le facteur de qualité et i_∞ la valeur prise par i pour $t \to \infty$.

◇

3 Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.

Réponse

Contrairement au RLC série, Q est proportionnel à R (et non inversement proportionnel). C'est normal car ici, l'énergie est plus rapidement dissipée si R est faible. Au contraire, si R est élevée ($R \to \infty$), la branche contenant R devient un interrupteur ouvert et le circuit devient équivalent à un oscillateur harmonique type LC série. Q tend alors logiquement vers l'infini.

◇

4 Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

Réponse

On étudie les conditions initiales grâce à deux schémas :

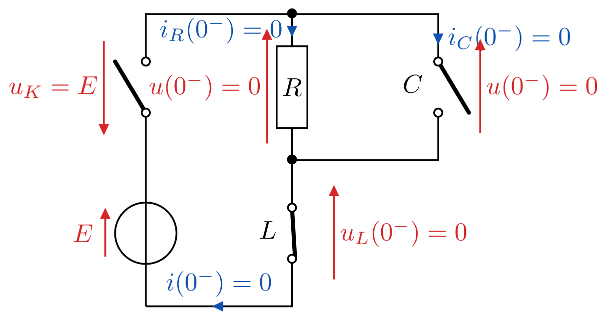


Figure E5.6 – Circuit à $\boxed{t = 0^-}$

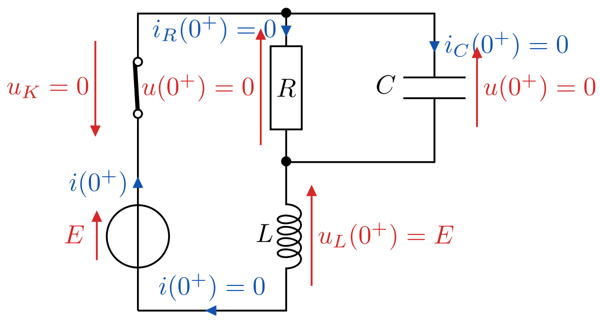


Figure E5.7 – Circuit à $\boxed{t = 0^+}$

◇ Analysons le régime permanent à $t = 0^-$, où le forçage est nul. Ce régime est continu, donc la bobine y est équivalente à un fil. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$0 = u(0^-) + 0 \quad \text{donc} \quad u(0^-) = 0$$

Par ailleurs, d'après la loi des nœuds,

$$i(0^-) = i_R(0^-) + i_C(0^-) = \frac{u(0^-)}{R} + 0 = 0$$

En effet, $i_C(0^-) = 0$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent.

◇ En $t = 0^+$, la continuité de i au travers de la bobine impose :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

Afin de trouver la condition sur $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, il faut déterminer la valeur de $u_L(0^+)$. Comme on cherche une tension, on utilise la loi des mailles à $t = 0^+$

$$E = u(0^+) + u_L(0^+)$$

Or, u étant la tension au borne d'un condensateur, elle est nécessairement continue et égale à sa valeur en 0^- donc

$$\boxed{u_L(0^+) = E \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{L}}$$

◇

$\boxed{5}$ En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

Réponse

Le courant $i(t)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle complète et d'une solution de l'équation homogène. Comme le forçage (qui se lit dans le second membre) est constant, le régime permanent (qui se lit dans la solution particulière) est constant aussi. La solution particulière est donc telle que

$$0 + 0 + \frac{1}{LC} i_p = \frac{E}{RLC} \quad \text{d'où} \quad i_p = \frac{E}{R}$$

Remarque : La solution i_p déterminée sous forme d'une constante est toujours égale à i_∞ identifiée dans la forme canonique.

Pour trouver la solution homogène, écrivons l'équation caractéristique,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0$$

$Q = 2$ donc

$$\Delta = {\omega_0}^2 \left(\frac{1}{4} - 4 \right) = -\frac{15}{4} {\omega_0}^2 < 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées,

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{4} \pm \mathrm{j} \frac{\omega_0}{4} \sqrt{15} \quad \text{soit} \quad r_{1,2} = -\mu \pm \mathrm{j}\omega_p$$

où μ est le taux d'amortissement et ω_p la pseudo-pulsation des oscillations. La solution homogène s'écrit alors

$$i_h(t) = \mathrm{e}^{-\mu t} \left(A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t) \right)$$

Avec A et B deux constantes d'intégration réelles. En sommant solution homogène et particulière, on obtient la solution générale :

$$i(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\left(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right) + \frac{E}{R}$$

Reste à déterminer les constantes d'intégration A et B en $t = 0^+$

$$i(0^+) = \frac{E}{R} + A = 0 \quad \text{donc} \quad A = -\frac{E}{R}$$

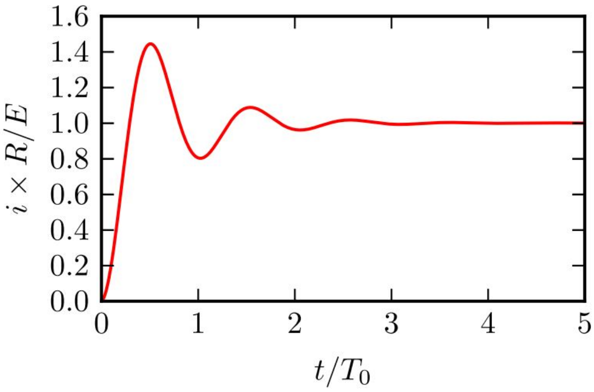
Calculons l'expression de la dérivée

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega_p\left[-A\sin(\omega_p t) + B\cos(\omega_p t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t} - \mu\left[A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t}$$

Ainsi
$$\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} = B\omega_p - \mu A = \frac{E}{L} \quad \text{donc} \quad B = \frac{E}{\omega_p}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)$$

Finalement
$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\mu t}\left[\cos(\omega_p t) - \frac{R}{\omega_p}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)\sin(\omega_p t)\right]$$

Le tracé « direct » n'est pas possible, il faut donc utiliser les informations à disposition : conditions initiales, qui donne la valeur à $t = 0$ et le signe de la pente de la tangente, régime pseudo-périodique avec environ $Q = 2$ oscillations, et solution particulière qui donne le régime permanent asymptotique. Un exemple de chronogramme acceptable est représenté figure ci-contre).

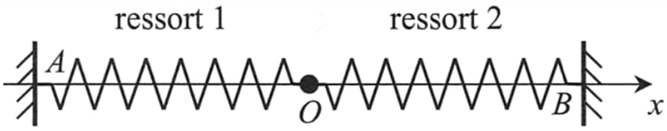


Électrocinétique – chapitres 4 et 5

Correction du TD d'entraînement

I Oscillateur à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Ce mobile est relié par deux ressort linéaires à deux points fixes A et B. On le repère par sa position $\mathrm{OM} = x$.



Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0. Dans la **position d'équilibre** du système, les longueurs des ressorts sont identiques et **valent** ℓ_{eq} (avec $\ell_{\text{eq}} \neq \ell_0$), et le mobile se trouve à l'origine O de l'axe.

On se place dans le référentiel terrestre (lié au sol), considérée comme galiléen. À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0 \neq 0$.

1 Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

a) Refaire un schéma **hors équilibre**, indiquant notamment ce que représente ℓ_{eq} et les distances ℓ_1 et ℓ_2, puis établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

b) Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 propres en fonction de k et m.

c) Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

Réponse

a) Cette fois-ci, on a deux ressorts : le premier tire dans le sens $-\overrightarrow{u_x}$ et le second dans le sens $+\overrightarrow{u_x}$. On étudie leurs longueurs :

◇ $\ell_1(t)$ la longueur du ressort 1 s'exprime $\ell_1 = \mathrm{AM}$. Or, d'après l'énoncé $\ell_{\text{eq}} = \mathrm{AO} = \mathrm{OB}$: en décomposant (**puisque les distances sont sur le même axe**), on a donc $\mathrm{AM} = \mathrm{AO} + \mathrm{OM} = \ell_{\text{eq}} + x$.

◇ Le ressort 2 a comme longueur $\ell_2(t) = \mathrm{MB} = \mathrm{MO} + \mathrm{OB}$ soit $\ell_2(t) = \ell_{\text{eq}} - x(t)$.

Ainsi, le bilan des forces s'exprime :

Poids	$\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_y}$
Support	$\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{u_y}$
Ressort 1	$\overrightarrow{F}_1 = -k(\ell_1(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_x} = -k(\ell_{\text{eq}} + x(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$
Ressort 2	$\overrightarrow{F}_2 = +k(\ell_2(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_x} = +k(\ell_{\text{eq}} - x(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$

Ainsi, le PFD donne

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2$$

$$\Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u_x} = -k(\cancel{\ell_{\text{eq}}} + x - \cancel{\ell_0})\overrightarrow{u_x} + k(\cancel{\ell_{\text{eq}}} - x - \cancel{\ell_0})\overrightarrow{u_x} - mg\overrightarrow{u_y} + R\overrightarrow{u_y}$$

Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve alors

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2kx = 0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2k}{m}x = 0}$$

La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids.

b) Sous forme canonique, cette équation se réécrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = 0}$$

C'est bien l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$ et donc de période $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$.

Doubler la constante de raideur divise par $\sqrt{2}$ la période : le ressort oscille plus vite qu'avec un seul ressort.

c) L'expression générale de $x(t)$ est donc $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Or, en $t = 0$, on a $x(0) = x_0 = A$, et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 = \omega_0 B$; ainsi

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}$$

---

2 En fait il existe entre le mobile et la tige un frottement de type visqueux linéaire, la force de frottement s'exprime $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ (avec $\alpha > 0$ et $\vec{v}$ la vitesse de la masse m dans le référentiel terrestre).

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $h = \dfrac{\alpha}{m}$.

b) Montrer que lorsque $\alpha < 2^{3/2}\sqrt{km}$, le mouvement comporte des oscillations amorties. Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales et exprimer la pseudo-période T en fonction de ω_0 et h.

Réponse

a) On ajoute $\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha v\vec{u_x}$ au PFD, ce qui donne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = 0}$$

b) On sait qu'on a des oscillations amorties quand le discriminant Δ de l'équation caractéristique est négatif : $\Delta < 0$. Or ici, l'équation caractéristique est

$$r^2 + hr + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = h^2 - 4{\omega_0}^2$$
$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\cancel{2}} < \underset{2}{\cancel{4}}\omega_0^{\cancel{2}} \Leftrightarrow \alpha < 2m\sqrt{\frac{2k}{m}}$$
$$\Leftrightarrow \alpha < 2^{3/2}\sqrt{km}$$

Dans ce régime, on aura donc les racines

$$r_\pm = -\frac{h}{2} \pm \mathrm{j}\sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{h^2}{4}} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm = -\frac{h}{2} \pm \mathrm{j}\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{h^2}{4}}}$$

La solution générale est alors

$$x(t) = \mathrm{e}^{-ht/2}\left(K_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + K_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) \Leftrightarrow \boxed{x(t) = \mathrm{e}^{-ht/2}\left[D\cos(\omega t) + E\sin(\omega t)\right]}$$

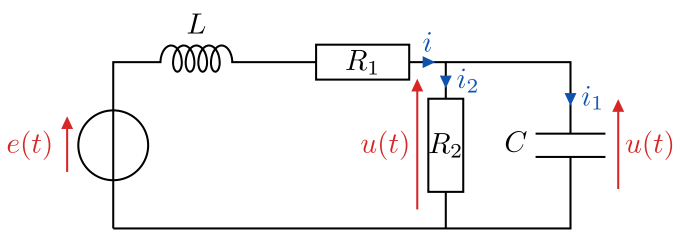
On a les mêmes conditions initiales, soit $x(0) = x_0 = D$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 = -\frac{h}{2}x_0 + \omega E$, d'où $E = \frac{h}{2\omega}x_0$. Ainsi,

$$\boxed{x(t) = x_0\mathrm{e}^{-ht/2}\left[\cos(\omega t) + \frac{h}{2\omega}\sin(\omega t)\right]}$$

On a donc une pseudo-période $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{h^2}{4}}}}$

II Décrément logarithmique électrique

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ tel que $\begin{cases} e(t<0) = 0 \\ e(t \geq 0) = E \end{cases}$ dans le circuit ci-dessous.



1 Déterminer la valeur u_∞ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$. Un schéma équivalent est attendu.

Réponse

R_2 et C sont en parallèle, donc $u(t)$ est à la fois la tension aux bornes de C et de R_2. De plus, à $t \longrightarrow \infty$, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert : le circuit est donc équivalent à un diviseur de tension avec R_1 et R_2 en série alimentées par la tension E, et on a donc

$$\boxed{u(\infty) = u_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E}$$

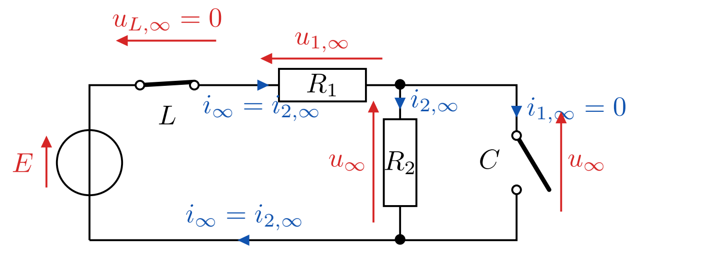


FIGURE E5.1 – Pour $t \to \infty$

2 Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 u_\infty$. Exprimer λ et ω_0 en fonction de L, C, R_1 et R_2.

Réponse

On applique les lois de KIRCHHOFF :

Avec une loi des mailles et les relations courant-tension :

$$u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i = E$$

Avec la loi des nœuds :

$$i = i_1 + i_2 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}$$

En combinant :

$$\begin{aligned}
& u + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}\right) + R_1 C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1\frac{u}{R_2} = E && \text{Distribution de la dérivée} \\
\Leftrightarrow\ & u + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1 C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{R_2}u = E && \text{Factorisation} \\
\Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \cancel{1}_{\frac{R_2}{R_2}}\right)u = E && \text{Division par } LC \text{ et même dénominateur} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} = \frac{E}{LC} && \text{Expression de } E \text{ selon } u_\infty \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} = \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u_\infty}{LC} && \text{Canonique} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 u_\infty}
\end{aligned}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_2}\right)}}$ et $\boxed{\lambda = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_2C} + \dfrac{R_1}{L}\right)}$

3 En supposant un régime pseudo-périodique, exprimer la forme générale de $u(t)$ en fonction de u_∞, λ, de la pulsation et de deux constantes d'intégration qu'on ne cherche pas à déterminer pour le moment.

Réponse

Pour la solution de l'équation homogène, on injecte $u_h(t) = K\mathrm{e}^{rt}$ la forme générique pour obtenir l'équation caractéristique. On en cherche alors les racines grâce au discriminant Δ :

$$r^2 + 2\lambda r + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(\lambda^2 - {\omega_0}^2)$$

On sait que $\Delta < 0$ puisqu'on observe des oscillations amorties. On aura donc

$$r_\pm = -\frac{\cancel{2}\lambda}{\cancel{2}} \pm \mathrm{j}\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\cancel{4}({\omega_0}^2 - \lambda^2)} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm = -\lambda \pm \mathrm{j}\Omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\Omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

La solution particulière étant visiblement $u_p = u_\infty$, on aura la forme générale

$$u(t) = u_h(t) + u_p \Leftrightarrow \boxed{u(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) + u_\infty}$$

4 Justifier entièrement les conditions initiales. Deux schémas sont attendus.

Réponse

$\boxed{\textbf{En } t = 0^-}$

Or, avant l'échelon montant, le générateur est éteint depuis longtemps. Ainsi, le condensateur est déchargé, et $\boxed{u(0^-) = 0}$, et aucun courant ne circule dans le circuit, donc $\boxed{i(0^-) = 0}$.

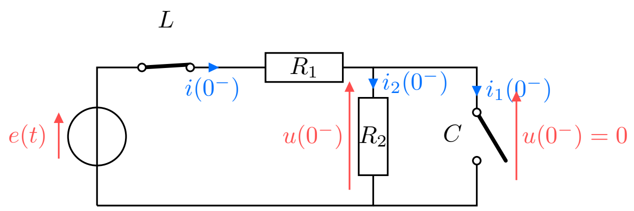


Figure E5.2 – Schéma en $t = 0^-$.

$\boxed{\textbf{En } t = 0^+}$

Or, par continuité de l'intensité traversant une bobine et de la tension aux bornes d'un condensateur, lors de l'échelon de tension on garde $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$ et $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$.

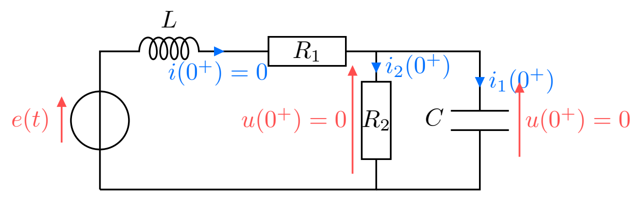


Figure E5.3 – Schéma en $t = 0^+$.

Ainsi, avec une loi des nœuds, on a $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$. Seulement, comme $i_2(0^+)$ est le courant passant dans la résistance R_2 de tension $u(0^+) = 0$, on a $i_2(0^+) = u(0^+)/R = 0$, soit avec la loi des nœuds, $\boxed{i_1(0^+) = 0 = C \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+}}$.

◇

5 Déterminer alors l'expression complète de $u(t)$ en fonction de u_∞, λ et Ω.

Réponse

$\boxed{\textbf{Première condition}}$

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow A + u_\infty = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = -u_\infty}$$

$\boxed{\textbf{Seconde condition}}$

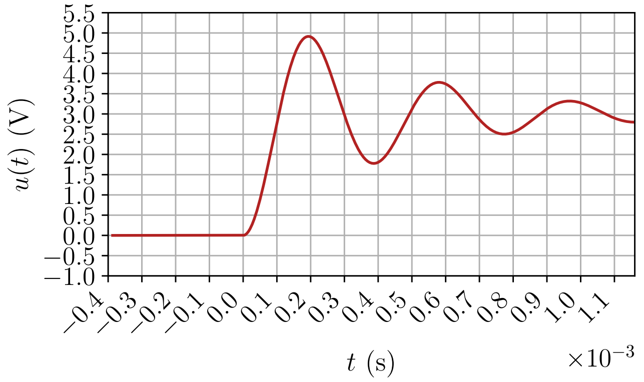
$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_0 = 0 \Leftrightarrow -\lambda A + B\Omega = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{-\lambda u_\infty}{\Omega}}$$

Finalement,

$$\boxed{u(t) = u_\infty \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\right)}$$

◇

On observe à l'oscilloscope la courbe $u(t)$ ci-contre.



6 Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique de la pseudo-période T.

Réponse

On lit l'abscisse du premier et du troisième maximum, qu'on appelle t_1 et t_3 respectivement. On a alors

$$2T = t_3 - t_1 \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{t_3 - t_1}{2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_3 = 0{,}95 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \\ t_1 = 0{,}19 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \underline{T = 3{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}}$$

◇

/4 7 Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique du décrément logarithmique

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t) - u_\infty}{u(t + nT) - u_\infty}\right)}$$

Réponse

On calcule δ avec deux pseudo-périodes ici. On lit la valeur de tension aux premier et troisième pics, à t_1 et t_3 respectivement, ainsi que ce qui semble être la valeur limite u_∞ :

$$\boxed{\delta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u(t_1)-u_\infty}{u(t_3)-u_\infty}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(t_1) = 4{,}9\,\mathrm{V} \\ u(t_3) = 3{,}3\,\mathrm{V} \\ u_\infty = 3{,}0\,\mathrm{V} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \underline{\delta = 0{,}92}$$

◇

8 Déterminer la relation entre δ, λ et T. En déduire la valeur numérique de λ.

Réponse

Avec l'expression de $u(t)$, on peut développer le dénominateur de δ :

$$u(t+nT) - u_\infty = \mathrm{e}^{-\lambda nT} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\underbrace{\cos(\Omega t + n\Omega t)}_{=\cos\Omega t} + B\underbrace{\sin(\Omega t + n\Omega t)}_{=\sin\Omega t}\right)}_{u(t)-u_\infty \, (1)}$$

Ainsi,

$$\frac{u(t)-u_\infty}{u(t+nT)-u_\infty} = \mathrm{e}^{+\lambda nT} \Rightarrow \delta = \frac{1}{n}\ln\left(\mathrm{e}^{\lambda nT}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \lambda T \Leftrightarrow \lambda = \frac{\delta}{T}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta = 0{,}92 \\ T = 3{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{s} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \underline{\lambda = 2{,}3 \times 10^{3}\,\mathrm{s}^{-1}}$$

◇

9 Sachant que $R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 50\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 500\,\mathrm{mH}$, déterminer la valeur de C.

Réponse

On sait que λ s'exprime en fonction de C, on l'isole donc de son expression :

$$2\lambda = \frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L} \Leftrightarrow R_2C = \frac{1}{2\lambda - \frac{R_1}{L}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C = \frac{1}{2R_2\lambda - \frac{R_1R_2}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega} \\ R_2 = 50\,\mathrm{k\Omega} \\ L = 500\,\mathrm{mH} \\ \lambda = 2{,}3 \times 10^{3}\,\mathrm{s}^{-1} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \underline{C = 7{,}6\,\mathrm{nF}}$$

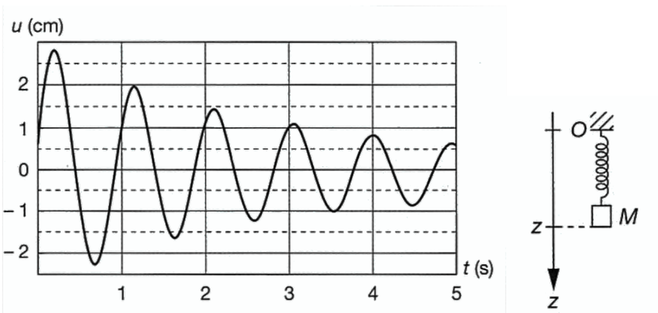
◇

Interprétation E4 et 5.1 : À retenir

En régime pseudo-périodique, l'amortissement du signal est dû à l'exponentielle de la solution générale. En calculant le logarithme du rapport de la solution à un instant t et de la solution à un instant $t + nT$ avec T la période on calcule donc le facteur de l'exponentielle décroissante, ce qui permet de trouver les caractéristiques du circuit.

III Décrément logarithmique mécanique

Une masse m est accrochée à un ressort de raideur $k = 10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10\,\mathrm{cm}$, fixé au point O. En plus de son poids et de la force de rappel du ressort, la masse est soumise à une force de frottement fluide $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$. Un capteur fournit l'évolution de $u(t) = z(t) - z_{\mathrm{eq}}$ au court du temps.



1 Établir l'équation d'évolution de $z(t)$. Quelle est la position d'équilibre z_{eq} de la masse ? En déduire une équation satisfaite par $u(t)$.

Réponse

On repère par $z(t)$ l'altitude du ressort. Étant donné le système, le mouvement ne s'effectue que selon $\overrightarrow{u_z}$, et on a

$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ et $a = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$. De plus, la longueur ℓ du ressort s'identifie à l'altitude $z(t)$ de la masse. On effectue donc le **bilan des forces** en faisant attention au sens de $\overrightarrow{u_z}$:

Poids $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u_z}$
Ressort $\overrightarrow{F}_{\text{ressort}} = -k(z(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$
Frottement $\overrightarrow{F} = -\alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z}$

Ainsi, le **PFD** donne

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = mg - k(z(t) - \ell_0) - \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + kz = mg + k\ell_0}$$

À l'équilibre, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$ et $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = 0$, on trouve donc

$$z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

À cause du poids qui n'est cette fois pas compensé par la réaction du support, la longueur d'équilibre est plus grande que la longueur à vide du ressort. On réexprime l'équation différentielle avec le changement de variable de l'énoncé pour avoir

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + ku = 0}$$

◇

2 Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des données du problème.

Réponse

On met l'équation sous forme canonique et on identifie :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2u = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

◇

3 Résoudre l'équation différentielle. Exprimer la pseudo-période T en fonction de $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ et de Q.

Réponse

On exprime l'équation caractéristique de discriminant Δ :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = {\omega_0}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

On observe des oscillations, donc $\Delta < 0$. Les racines sont donc

$$\boxed{r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}$$

et les solutions sont de la forme

$$\boxed{z(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right]}$$

Sans conditions initiales, on ne peut déterminer A et B. On peut cependant exprimer T :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

◇

4 Montrer que le décrément logarithmique δ, défini par

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t) - u_{\text{eq}}}{u(t+nT) - u_{\text{eq}}}\right)}$$

est indépendant du temps.

Réponse

Par construction, $u_{\text{eq}} = 0$, et on a

$$u(t+nT) = \mathrm{e}^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\underbrace{\cos(\omega(t+nT))}_{=\cos\omega t} + B\underbrace{\sin(\omega(t+nT))}_{=\sin\omega t}\right]}_{=u(t)} \Leftrightarrow u(t+nT) = \mathrm{e}^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T}u(t)$$

Ainsi,

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t)}{\mathrm{e}^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T}u(t)}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\mathrm{e}^{n\frac{\omega_0}{2Q}T}\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{\omega_0}{2Q}T}$$

En développant T on trouve

$$\delta = \frac{1}{2Q}\frac{\overbrace{\omega_0 T_0}^{=2\pi}}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

ce qui est bien indépendant du temps t.

◇

5 Comparer les données expérimentales à l'affirmation précédente. Commenter.

Réponse

Soit $t_{\max}$ le temps du premier maximum. On relève les ordonnées des maximums successifs de $u(t)$, c'est-à-dire $u(t_{\max}+nT)$, et on calcule le logarithme népérien de deux longueurs successives :

n	$u(t_{\max}+nT)$	δ
0	2,9	0,37
1	2,0	0,29
2	1,5	0,31
3	1,1	0,31
4	0,8	0,29
5	0,6	

Mise à part la première valeur, les résultats sont assez peu dispersés. Cela valide bien le modèle d'oscillateur amorti pour cette expérience ; l'écart de la première valeur est sûrement lié à des non-linéarités du ressort aux longueurs importantes.

◇

6 Estimer à l'aide des données expérimentales le facteur de qualité Q et la pseudo-pulsation ω.

Réponse

On peut donc estimer qu'on a $\delta = 0{,}30 \pm 0{,}01$. On isole Q de son expression :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}} \Leftrightarrow \sqrt{4Q^2-1}^2 = \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \Leftrightarrow 4Q^2 = 1 + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2}+\frac{1}{4}}}$$

A.N. : $\boxed{Q \approx 10{,}5}$

On trouve bien $Q \gg 0.5$ comme le montre l'oscillogramme. Quant à ω, on peut estimer T en comptant plusieurs périodes : on a $t_{\max} = 0{,}2\,\mathrm{s}$ et $t_{\max} + 5T = 4{,}9\,\mathrm{s}$, donc on a $5T = 4{,}2\,\mathrm{s}$, c'est-à-dire $\boxed{T \approx 0{,}95\,\mathrm{s}}$. Enfin, $\omega = 2\pi/T$, donc

$$\boxed{\omega = 6{,}6\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

7 En déduire les valeurs de m et α.

Réponse

Comme $Q \gg 0.5$, on a $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On a donc

$$\boxed{m \approx \frac{k}{\omega^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \\ \omega = 6{,}6\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{m \approx 230\,\mathrm{g}}$$

Finalement, on a

$$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{km}}{Q}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \\ m = 230\,\mathrm{g} \\ Q = 10{,}5 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{\alpha \approx 0{,}15\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}}$$