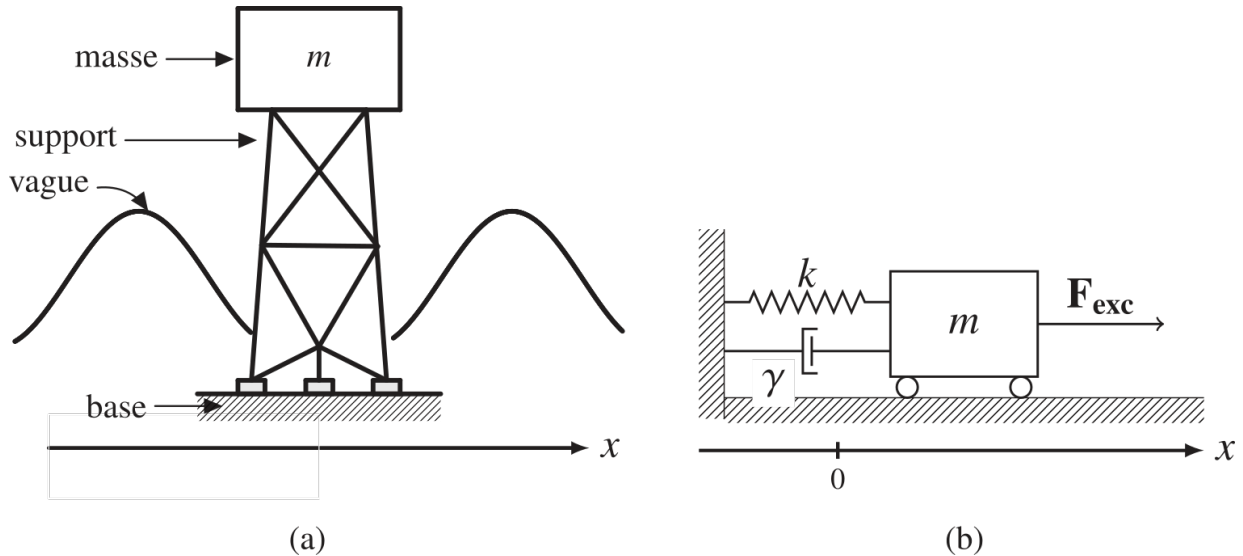


Oscillateurs amortis – corrigé

/52 P1 Mouvements d'une plateforme *offshore* (CCP modélisation 2019)

On s'intéresse à la résolution d'une équation du mouvement dans une approche classique de la mécanique afin d'étudier le mouvement simplifié d'une plateforme en mer. Le modèle envisagé est un système à un degré de liberté considéré comme un oscillateur harmonique : une masse est reliée à un ressort, avec amortissement.

On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse $m = 110$ tonnes est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (cf figure 1(a)).



Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m , liée à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante d'amortissement γ comme schématisé sur la figure 1(b). La masse se déplace selon une seule direction, parallèle à l'axe Ox en fonction du temps t .

Ainsi, les projections sur l'axe Ox de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$. Le vecteur unitaire de l'axe Ox est noté $\vec{u}_x$.

La masse se déplace sur la base horizontale sans frottements sur le support. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x = 0$.

La force totale $\vec{F}_{tot}$ agissant sur la masse correspond à la réaction normale à la base horizontale $\vec{R}_N$, à la force de frottement $\vec{F}_d = -\gamma \vec{v}$ où γ est la constante d'amortissement positive, permettant de prendre en compte l'effet de l'eau environnante, à la force de rappel $\vec{F}_k$ du ressort et au poids $\vec{P}$ de la masse m .

Outils mathématiques

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

/8 1 Établir entièrement le système d'étude.

Réponse

- ① ◇ Système : la plateforme M de masse m .
- ① ◇ Référentiel d'étude : Référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, x, y)$ supposé galiléen.
- ① ◇ Base de projection : Base cartésienne (O, x, y) de vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. L'origine est prise à la position d'équilibre comme indiqué dans l'énoncé. $\vec{u}_y$ est orienté vers le haut.
- ① ◇ Repérage : $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x$; $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x$; $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x$.
- ◇ Bilan des forces :
- ① 1) Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$;

- ①2) Réaction du support : $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_y$;
 ①3) Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x = -kx \vec{u}_x$, car $\ell = \ell_0 + x$;
 ①4) Force de frottement $\vec{F}_d = -\gamma \vec{v} = -\gamma \dot{x} \vec{u}_x$



/5 2 Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse m . La mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{DM1.1})$$

On exprimera ω_0 et ξ en fonction de k , m et γ .

Réponse

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} m \vec{a} \\ \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F} + \vec{F}_d &= m \vec{a} \\ \Rightarrow m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sur } \vec{u}_x \\ \text{Forme canonique} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \text{avec } \omega_0 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 a = \frac{\gamma}{m} \\ \Rightarrow \xi &= \frac{\gamma}{2m\omega_0} = \frac{\gamma}{2m} \sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow \xi \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{1}{mk}} \end{aligned}$$



/7 3 Dans le cas où $\xi < 1$, justifier que $x(t)$ peut prendre la forme suivante :

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

où Ω est la pseudo-pulsation que l'on exprimera en fonction de ω_0 et ξ .

Réponse

On injecte la forme générique $x(t) = Ke^{rt}$ ① pour trouver l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \\ \Rightarrow \Delta = 4\xi^2 \omega_0^2 - 4\omega_0^2 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 4\omega_0^2 (\xi^2 - 1) \end{aligned}$$

Or, $\xi < 1$, donc $\Delta < 0$ ① ; ainsi

$$\begin{aligned} r_{1,2} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{-2\xi\omega_0 \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} \\ \Leftrightarrow r_{1,2} &= -\omega_0 \xi \pm j \underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}_{=\Omega \textcircled{1}} \end{aligned}$$

En réinjectant dans la forme générique, on trouve donc une exponentielle réelle décroissante multipliée à une exponentielle complexe oscillante, qu'on écrit

$$x(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} e^{-\xi\omega_0 t} [A \cos \Omega t + B \sin(\Omega t)]$$



/4 4 En remarquant qu'à $t = 0$, $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, déterminer les expressions des deux coefficients réels A et B en fonction de x_0 , v_0 , ξ , ω_0 et Ω .

Réponse

De plus, les conditions initiales sont, à $t = 0$, $x(0) = x_0$, donc $A = x_0$. ① Calculons de plus la dérivée :

$$\dot{x}(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} e^{-\xi\omega_0 t} [-A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)] - \xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

$$\text{Or } \dot{x}(0) = v_0 \text{ soit } B\Omega - \xi\omega_0 A \stackrel{\textcircled{1}}{=} v_0 \Leftrightarrow B = \frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\Omega} \Leftrightarrow B \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$



/7 5 Montrer que l'on peut aussi obtenir une forme de la solution du type :

$$x(t) = X_m e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (\text{DM1.2})$$

On exprimera X_m et φ en fonction de A et B . Quelques outils mathématiques sont donnés en début de cet exercice.

Réponse

On nous donne

$$x(t) = X_m e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

et $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

soit $x(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} X_m e^{-\xi\omega_0 t} [\cos(\Omega t)\cos(\varphi) - \sin(\Omega t)\sin(\varphi)]$

Par identification avec $x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$, il vient

$$X_m \cos(\varphi) \stackrel{\textcircled{1}}{=} A \quad \text{et} \quad -X_m \sin(\varphi) \stackrel{\textcircled{1}}{=} B$$

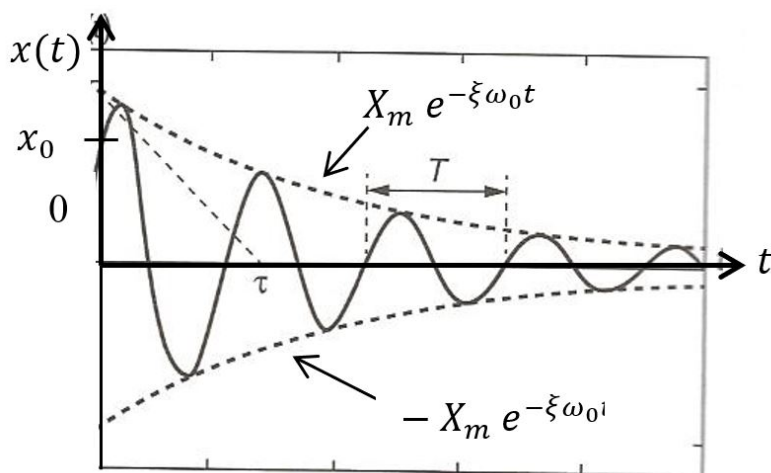
Ainsi $\tan(\varphi) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{B}{A} \quad \text{et} \quad A^2 + B^2 = X_m^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \stackrel{\textcircled{1}}{=} X_m^2$

D'où $\varphi \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\arctan\left(\frac{B}{A}\right) \quad \text{et} \quad X_m \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{A^2 + B^2}$

- /4 6 Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé $X_m e^{-\xi\omega_0 t}$, x_0 , v_0 et $T = 2\pi/\Omega$ la pseudo-période.

Réponse

Allure du graphe ci-contre. La pente à l'origine est $v_0 \neq 0$.



- /1 7 Justifier qualitativement que l'énergie mécanique $\mathcal{E}(t)$ est une fonction décroissante de t . À quoi cela est-il dû ?

Réponse

À cause des frottements, l'énergie mécanique $\mathcal{E}(t)$ est une fonction décroissante de t .

- /6 8 On envisage deux temps successifs t_1 et t_2 pour lesquels les déplacements sont x_1 et x_2 , tels que $t_2 > t_1$ et $t_2 - t_1 = T$, où T est la période des oscillations amorties. En utilisant l'équation (DM1.2) et en considérant que $\xi \ll 1$, montrer que :

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx 2\pi\xi$$

Réponse

Cela fait penser au décrement logarithmique :

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \ln\left(\frac{X_m e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\Omega t + \varphi)}{X_m e^{-\xi\omega_0(t+T)} \cos(\Omega(T+t) + \varphi)}\right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \ln(e^{\xi\omega_0 T})$$

car cosinus est une fonction périodique de période T . Soit :

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \xi\omega_0 T = \xi\omega_0 \frac{2\pi}{\Omega} = \xi\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \delta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \xi \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Or par hypothèse, $\xi \ll 1$, donc $1 - \xi^2 \approx 1$ $\textcircled{1}$; alors

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} 2\pi\xi$$

- /10 9 Toujours dans le cas où $\xi \ll 1$, le relevé du déplacement horizontal de la plateforme en fonction du temps est représenté en figure 2 ci-dessous. En utilisant les deux points qui sont indiqués sur la figure 2, déterminer les valeurs numériques de k , ξ et γ (avec leurs unités). Comment ce tracé serait-il modifié si ξ augmentait (un rapide graphique peut permettre d'être plus explicite) ?

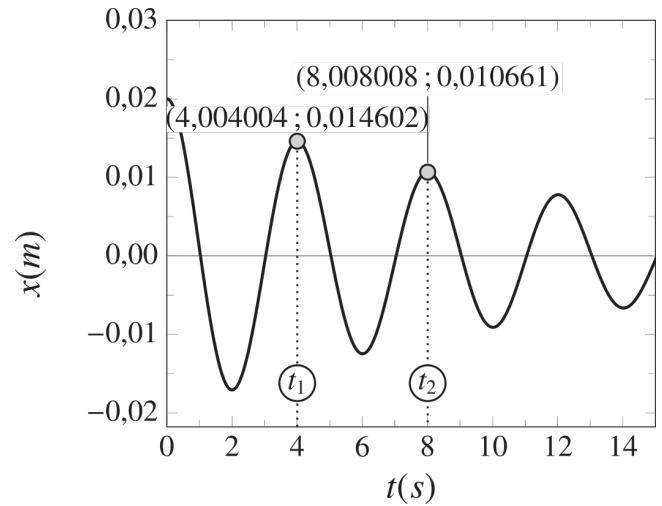


FIGURE DM1.1 – Déplacement horizontal de la plateforme dans le temps.

Réponse

On lit $x_1 = 0,014\,602\text{ m}$ et $t_1 = 4,004\,004\text{ s}$, puis $x_2 = 0,010\,661\text{ m}$ et $t_2 = 8,008\,008\text{ s}$. D'après l'énoncé, on a $T = t_2 - t_1$ et comme $\xi \ll 1$ alors

$$\omega_0 \approx \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

car $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$. De plus, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc

$$k = m\omega_0^2 = m \frac{4\pi^2}{(t_2 - t_1)^2} \Rightarrow k = 2,71 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$

et

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{2\pi} \Rightarrow \xi = 5,01 \times 10^{-2}$$

On trouve en effet comme attendu $\xi \ll 1$: c'est cohérent.

Enfin, d'après Q1,

$$\xi = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{1}{mk}}$$

soit

$$\gamma = 2\xi\sqrt{mk} \Rightarrow \gamma = 1,73 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

Si ξ augmentait, l'amortissement augmenterait, la décroissance exponentielle serait plus rapide, on verrait moins d'oscillations ① ; la pseudo-pulsation Ω diminuerait et la pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$ augmenterait. ①

