Électrocinétique – chapitre 6

# Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

## Sommaire



## Capacités exigibles

- ◯ Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
- ◯ Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
- ◯ Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
- ◯ Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.

## L'essentiel

# I Présentation du régime forcé

## I/A Réponse d'un système en RSF

**Définition E6.1 : Régimes de forçages**

◇ **Libre** : $\sum_i f_i(t) \left.\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i}\right|_t =$

◇ **Forçage constant** : $\sum_i f_i(t) \left.\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i}\right|_t =$

◇ **Forçage sinusoïdal** : $\sum_i f_i(t) \left.\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i}\right|_t = F(t) =$

**Rappel E6.1 : Réponses système amorti**

Avec ce qu'on a vu précédemment pour les systèmes amortis, on sait que :

◇ **Libre** :

◇ **Forçage constant** : $y_p =$ cte, même forme que forçage.

**Important E6.1 : Système amorti en RSF**

Pour un système amorti soumis à un forçage sinusoïdal, on cherche une **solution particulière** $y_p(t)$ **de la même forme que le forçage**, telle que :

◇ **Forçage sinusoïdal** : avec

◇ Ainsi en RSF, la solution particulière oscille à la **même pulsation** que l'entrée :

$\Rightarrow$ et

◇ On cherche à déterminer l'**amplitude et la phase** $Y$ et $\varphi$, donc ici $U$ ou $I$ et $\varphi_u$ ou $\varphi_i$.

◇ À l'inverse des $K_1$, $K_2$ constantes de $y_h(t)$, les **constantes de** $y_p(t)$ $Y$ et $\varphi$ ne ~~dépendent pas des conditions initiales~~, mais des **composants du système**, ici $R$, $L$, $C$, $\omega$...

**Définition E6.2 : Régime sinusoïdal forcé**

Le **régime sinusoïdal forcé** (RSF) est le **régime permanent** d'un système soumis à une **entrée sinusoïdale**.

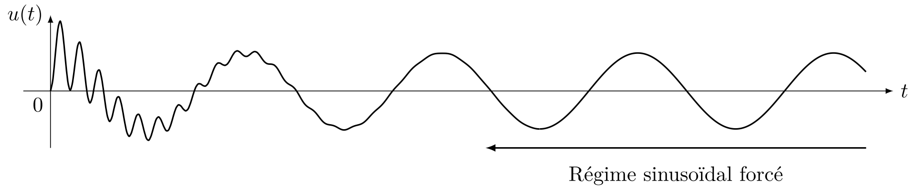



**Figure E6.1** – Exemple d'un signal en RSF.

◇ On est en régime transitoire tant que $y_h(t) \approx y_p(t)$, $\boxed{\text{permanent}}$ quand $\boxed{y_p(t) \gg y_h(t)}$.

◇ Pour un forçage sinusoïdal, quand $y_{\text{forcé}}(t) = y_p(t)$, on est en **régime permanent** **variable**.

◇ Précédemment en forçage constant, on atteignait $y_{\text{forcé}} = y_p$, c'était un **régime permanent** **continu**.

## I/B Notions de signaux périodiques

### I/B) 1 Période

**Définition E6.3 : Période**

### I/B) 2 Moyenne

**Définition E6.4 : Valeur moyenne**

Pour un **signal périodique** $s(t)$, on définit sa valeur moyenne $\langle s(t) \rangle$ par

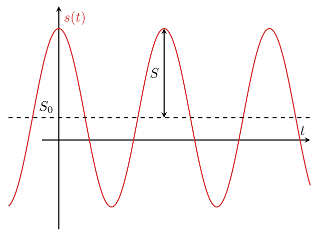
**Propriété E6.1 : Moyenne sinusoïdale**

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal pur $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$ est nulle :

**Démonstration E6.1 : Moyenne sinusoïdale**

**Implication E6.1 : Signaux décalés**

Pour un signal $s(t)$ sinusoïdal décalé (*offset* en anglais) d'une valeur constante $S_0$, sa moyenne est égale à cette valeur constante :




### I/B) 3 Valeur efficace

Même si la **tension moyenne est nulle**, **l'énergie moyenne transmise par le signal n'est pas nulle** !

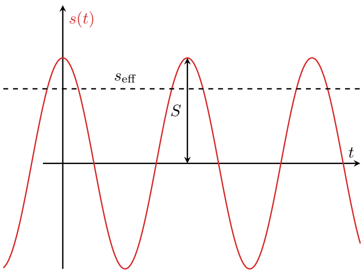
**Définition E6.5 : Valeur efficace**

L'énergie étant **proportionnelle au carré des signaux**, on définit la valeur efficace d'un signal **périodique** par

Ainsi, $s_{\text{eff}}^2$ représente l'**énergie moyenne du signal**.

**Propriété E6.2 : Valeur efficace sinus**

La valeur efficace de $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$ est




**Démonstration E6.2 : Valeur efficace sinus**

■

**Attention E6.1 : Valeur efficace autres signaux**

Il n'y a pas toujours de rapport $\sqrt{2}$ entre amplitude et valeur efficace ! Pour un signal triangle, la valeur efficace est $S/\sqrt{3}$, et pour un créneau pur sa valeur efficace est son amplitude $S$.

## I/C Passage en complexes

**Exemple E6.1 : Approche naïve**

On peut essayer de résoudre un circuit en RSF en utilisant la forme de solution particulière et prier pour que ça marche. Par exemple, en reprenant l'équation différentielle sur $u_C(t)$ du circuit LC :

Par contre, en reprenant le même raisonnement pour $u_C(t)$ du circuit RC, on tombe sur une embûche :

Ici, la dérivation nous complique la tâche : on se retrouve avec deux fonctions cosinus décalées, et on ne peut pas identifier directement les amplitudes et les phases... et si on essayait la même approche que pour $y_h(t)$ ?

**Propriété E6.3 : Passage en complexes**

Passer en complexes, c'est **transformer un cosinus en exponentielle complexe**, donnant ainsi :

avec tel que $\{$

Ce qui permet de passer d'une équation **différentielle** à une équation **algébrique** ; en effet on a alors :

| **Dérivée** | **Primitive** |
|---|---|
| | |

**Démonstration E6.3 : Passage en complexes**

■

| **Dérivée** | **Primitive** |
|---|---|
| | |

**Attention E6.2 : Passage en complexes**

Le passage ne fonctionne **que si le signal est un cosinus** ! Sinon, **on se ramène à un cosinus** par un terme de phase ($\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$) car l'**opération inverse** du passage en complexe est la **partie réelle** :

Il faut donc bien que l'on ait transformé un cosinus et non un sinus !

## Outils E6.1 : Module et arguments de $\underline{z} = x + \mathrm{j}y$

### Module

Son module est **la norme de son vecteur dans** $\mathbb{C}$, d'où

◇ ◇

### Argument

Son argument est **l'angle dans le plan complexe**, $\arg(\underline{z}) = \varphi$, d'où

◇

◇ et

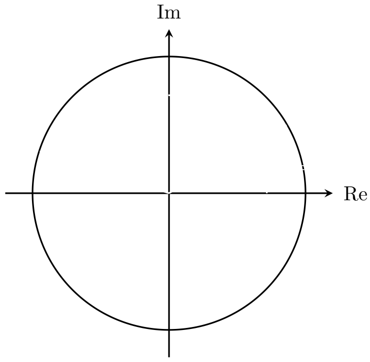



**Figure E6.2** – Grandeurs dans $\mathbb{C}$

## Exemple E6.2 : Utilisation des complexes

Reprenons l'équation différentielle du circuit RC :

### Module

### Argument

## Attention E6.3 : Arguments en physique complexe

**Par convention,** $\varphi \in [-\pi\ ;\ \pi]$**.**

tan est définie **par morceaux** :

$$\tan\ :\ \mathbb{R} \setminus \left\{ k \in \mathbb{Z}\ :\ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\} \to \mathbb{R}$$

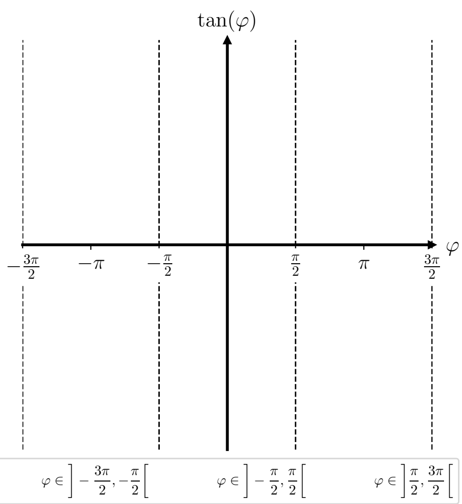



**Figure E6.3** – $\tan(\varphi)$
**Il n'y a jamais de problème pour calculer** $\tan(\varphi)$

Or arctan est définie sur un **intervalle restreint** :

$$\arctan\ :\ \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

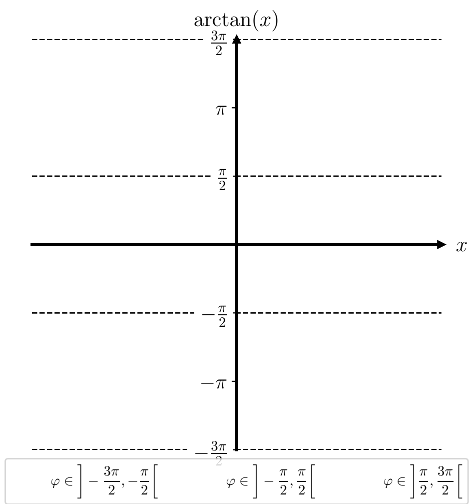



**Figure E6.4** – $\arctan(x)$
**On n'a** $\arctan(\tan(\varphi)) = \varphi$ **que pour** $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

◇ Dans le cas $\varphi = \arg(\underline{Y})$, cela revient à vérifier que

◇ Si $\mathrm{Re}(\underline{Y}) < 0$, alors on **multiplie par** $\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}}$ de sorte à **échanger** Re **et** Im et **ajouter/soustraire** $\pi/2$ à l'argument.

**Application E6.1 : Calcul d'un argument**

Soit $$\underline{U} = \frac{E_0}{1 - \mathrm{j}\frac{R}{L\omega} - \frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}}$$ Déterminer $\varphi = \arg(\underline{U})$

On pourrait appliquer tan sans souci, mais on ne peut appliquer arctan que si

Pour se ramener à une solution $\forall\omega$, on « échange » les parties imaginaires et réelles en tournant de $\pi/2$ dans $\mathbb{C}$ grâce à la multiplication par j/j :

# II Circuits électriques en RSF

**Rappel E6.2 : ARQS**

Comme au début de l'année, nous nous plaçons toujours dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), c'est-à-dire que pour un circuit de taille $L$ alimenté par une source sinusoïdale de fréquence $f$, on doit avoir $\boxed{Lf \ll c}$ avec $c$ la célérité de la lumière/des ondes électromagnétiques.

## II/A Lois de Kirchhoff en RSF

**Implication E6.2 : Loi des nœuds en $\mathbb{C}$**

On se place en RSF, avec $i_k(t) = I_k\cos(\omega t + \varphi_k)$ les intensités dans les branches. En passant en complexes, on aura

$$\underline{i_k}(t) = \underline{I_k}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{I_k} = I_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}$$

$\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$

**Figure E6.5** – Loi des nœuds

**Implication E6.3 : Loi des mailles en $\mathbb{C}$**

On se place en RSF, avec $u_k(t) = U_k\cos(\omega t + \varphi_k)$ les tensions aux bornes des dipôles. Ainsi, en passant en complexes, on aura

$$\underline{u_k}(t) = \underline{U_k}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U_k} = U_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}$$

$\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$

**Figure E6.6** – Loi des mailles.

## II/B Impédance et admittance complexes

**Définition E6.6 : Impédance complexe**

Comme $\underline{u}(t) = \underline{U}e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$ et $\underline{i}(t) = \underline{I}e^{j\omega t}$ avec $\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$, on peut étendre la loi d'Ohm aux complexes en définissant l'**impédance complexe** $\underline{Z}$ d'un dipôle telle que :

◇ **Unité**

◇

◇

Figure E6.7

**Définition E6.7 : Admittance**

Assez naturellement, comme on avait la conductance égale à l'inverse d'une résistance, on peut définir l'inverse d'une impédance : c'est l'**admittance complexe** $\underline{Y}$ :

Pour trouver les impédances des dipôles de base, on utilise leurs relations courant-tension qu'on convertit en complexes, **en se souvenant de dériver en complexes équivaut à multiplier par** $j\omega$.

**Propriété E6.4 : Impédances des dipôles de base**

| | Résistance | Inductance | Capacité |
|---|---|---|---|
| Schéma | Figure E6.8 – $\underline{Z_R}$ | Figure E6.9 – $\underline{Z_L}$ | Figure E6.10 – $\underline{Z_C}$ |

**Démonstration E6.4 : Impédances des dipôles de base**

| | Résistance | Inductance | Capacité |
|---|---|---|---|
| Démonstration | | | |

Ainsi, la **résistance ne change pas** d'expression entre les réels et les complexes, alors que les **bobines et condensateurs** ont des caractéristiques complexes différentes. En plus de ça, leurs impédances **dépendent de** $\omega$ : on peut notamment étudier deux cas limites, quand $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$ :

**Propriété E6.5 : Dipôles équivalents aux limites**

| | $\omega \to 0$ | $\omega \to +\infty$ |
|---|---|---|
| Bobine | | |
| Condensateur | | |

**Démonstration E6.5 : Dipôleséquivalents aux limites**

| | $\omega \to 0$ | $\omega \to +\infty$ |
|---|---|---|
| Bobine | | |
| Cond. | | |

## II/C Associations d'impédances et ponts diviseurs

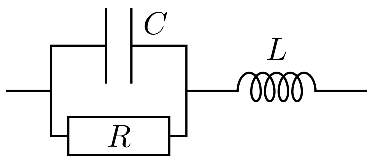
Enfin, comme la relation courant-tension avec l'impédance complexe est analogue à celle d'une résistance, on peut facilement démontrer que les associations d'impédances suivent les associations de résistances, et qu'on peut donc appliquer les ponts diviseurs de tension et de courant comme si on n'avait que des résistances.

**Important E6.2 : Associations d'impédances**

| | **Schéma** | **Relations** |
|---|---|---|
| **En série** | | ◇ **Impédance équivalente** :<br><br>◇ **Diviseur de tension** : |
| **En parallèle** | | ◇ **Dipôle équivalent** :<br><br>◇ **Diviseur de courant** : |

**Application E6.2 : Association d'impédances**

Établir $\underline{Z}_{\text{eq}}$ pour :




## II/D Déphasage

**Définition E6.8 : Déphasage**

Pour deux signaux sinusoïdaux **de mêmes fréquences** $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, on définit le **déphasage** entre $s_2$ et $s_1$ comme étant la **différence de leurs phases instantanées** :

**Important E6.3 : Lecture d'un déphasage**

Le déphasage $\Delta\varphi_{1/2}$ est lié au **retard temporel** $\Delta t_{1/2} = t_1 - t_2$ du signal $s_1$ par rapport au signal $s_2$ :

Le déphasage obtenu est entre $-\pi$ et $+\pi$. On définit :

◇

◇

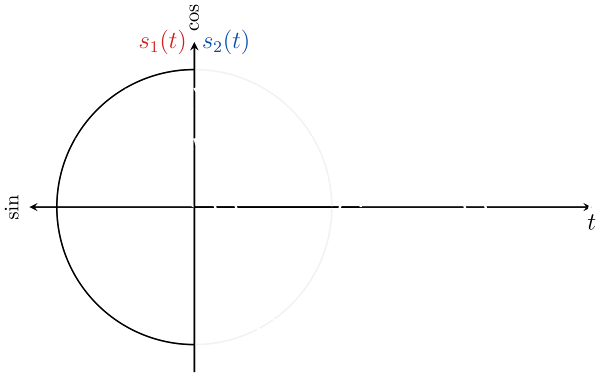



**Figure E6.11** – Déphasage

Le principe est de mesurer la différence de temps entre les deux moments les plus proches tels que les deux signaux s'annulent **avec la même pente**, et de « convertir » cet écart temporel en déphasage *via* la pulsation.

**Définition E6.9 : Déphasages particuliers**

**En phase**

Deux signaux sont **en phase** si leur **déphasage est nul** (modulo $2\pi$) :

Les signaux passent par leurs valeurs maximales et minimales aux mêmes instants, et s'annulent simultanément.

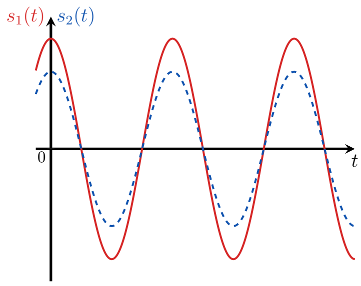



**Figure E6.12** – En phase.

**En quadrature**

Deux signaux sont en **quadrature phase** si leur déphasage est de $\pm\pi/2$ (modulo $2\pi$) :

Quand un signal s'annule, l'autre est à son maximum où à son minimum : c'est la relation entre un cosinus et un sinus.

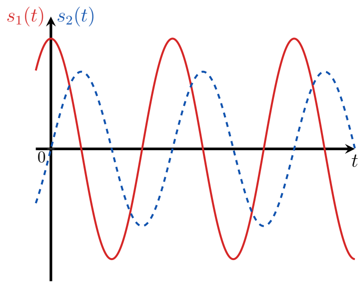



**Figure E6.13** – Quadrature.

**En opposition**

Deux signaux sont en **opposition de phase** si leur déphasage est de $\pm\pi$ (modulo $2\pi$) :

Lorsqu'un signal passe par sa valeur maximale, l'autre est à sa valeur minimale, mais ils s'annulent simultanément.

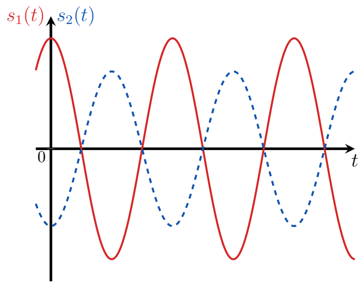



**Figure E6.14** – Opposition.

**Exemple E6.3 : Déphasage des impédances**

Pour un dipôle de tension $\underline{U}$ traversé par une intensité $\underline{I}$, on définit $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$, et on a donc $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$. Ainsi, la phase d'une impédance représente le déphasage entre la tension et le courant. Pour les différents dipôles classiques, on trouve :

◇

◇

◇

**Important E6.4 : Résumé méthode**

Un système soumis à une excitation sinusoïdale du type $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ se comporte de la manière suivante :

◇ On observe un court régime transitoire dû à la solution homogène de l'ED ($A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ pour ordre 1, pseudo-périodique ou apériodique pour l'ordre 2) ;

◇ Après ce régime, on obtient la solution particulière :

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega$ la **pulsation d'entrée**, $Y$ et $\varphi$ définies **par le système** (et non pas des conditions initiales).

◇ Pour trouver ces valeurs, on définit :

▷ l'entrée complexe :

▷ les signaux de sortie complexes :

▷ les amplitudes complexes :

▷ On retrouve les grandeurs réelles en en prenant le module et la phase :