Correction du TP

I S'approprier

I/A Rappel concernant l'oscillateur mécanique vertical

(1)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \\ m = 0{,}200\,\mathrm{kg} \end{cases}$$
$$\text{A.N. : } \underline{T_0 = 8{,}9\times 10^{-1}\,\mathrm{s}}$$

On ne peut pas déterminer T car il dépend de Q qui dépend de α, non indiqué.

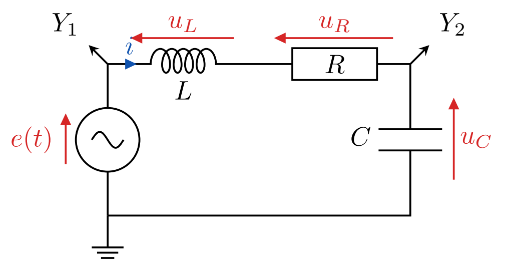
(2)

I/B Décrément logarithmique

$$u(t+nT) - u_\infty = \mathrm{e}^{-n\frac{T}{\tau}} \times \overbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\underbrace{\cos(\Omega(t+nT))}_{=\cos\Omega t} + B\underbrace{\sin(\Omega(t+nT))}_{=\sin\Omega t}\right)}^{=u(t)-u_\infty}$$
$$\Leftrightarrow u(t+nT) - u_\infty = \mathrm{e}^{-n\frac{T}{\tau}}\left(u(t)-u_\infty\right)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{\cancel{u(t)-u_\infty}}{\mathrm{e}^{-n\frac{T}{\tau}}\left(\cancel{u(t)-u_\infty}\right)}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\mathrm{e}^{n\frac{T}{\tau}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \delta = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\tau\Omega} \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}} \Rightarrow \boxed{\delta \underset{Q\gg 1}{\sim} \frac{\pi}{Q}}$$

II Analyser : régime pseudo-périodique du RLC série



(3)

Figure TP8.1

(4)

$$u_L + u_R + u_C = E$$
$$\Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = E \qquad u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \text{ et } u_R = Ri$$
$$\Leftrightarrow LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E \qquad i = C\tfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC} \qquad \text{forme canonique}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2u_C = {\omega_0}^2E$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2q = {\omega_0}^2CE \qquad q = Cu_C$$

Régime critique pour $Q = 1/2$:

$$Q = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L = 0{,}1\,\mathrm{H} \\ C = 0{,}01 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{R_c = 6{,}3 \times 10^{3}\,\Omega}$$

III Réaliser et valider

III/A Étude expérimentale du régime pseudo-périodique du RLC

III/A) 1 Visualisation et mesure de la pseudo-période

1 En cours…

2 Correction sur https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/0882-2427384

On mesure $\begin{cases} t_3 = 0{,}5\,\mathrm{s} & \text{avec} \quad \Delta(t_3) = 0{,}050\,\mathrm{s} \\ t_0 = 2{,}50\,\mathrm{s} & \text{avec} \quad \Delta(t_0) = 0{,}050\,\mathrm{s} \end{cases}$ donc $u(t_n) = \dfrac{\Delta(t_n)}{\sqrt{3}} = 0{,}029\,\mathrm{s}$

Ainsi $3T = t_3 - t_0 \Leftrightarrow \boxed{T = \dfrac{t_3 - t_0}{3}}$ et $\boxed{u(T) = \dfrac{u(3T)}{3} = \dfrac{\sqrt{u(t_3)^2 + u(t_0)^2}}{3}}$

$$\text{A.N. : } \underline{T = (0{,}50 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}}$$

Or, $\boxed{T_{\text{theo}} = 2\pi\sqrt{LC}}$ avec $\begin{cases} L = 0{,}1\,\mathrm{H} \\ C = 0{,}01\,\mathrm{\mu F} \end{cases}$

$$\text{A.N. : } \underline{T_{\text{theo}} = 2{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_N = \frac{|T_{\text{exp}} - T_{\text{theo}}|}{u(T_{\text{exp}})}}$$

$$\text{A.N. : } \underline{E_N = 0{,}3} \leq 2$$

Les valeurs sont bien compatibles : on a en effet un amortissement très faible.

III/A) 2 Décroissance exponentielle de l'amplitude

3

Tableau TP8.1

n	$u_{c,\max}$	δ
0	…	…
1	…	…
2	…	…
3	…	…
4	…	…
⋮	⋮	⋮

On obtient $\delta = \bar{\delta} \pm u(\bar{\delta})$ avec $u(\bar{\delta}) = \dfrac{\sigma(\delta)}{\sqrt{n-1}}$ $\Rightarrow$ $\underline{\delta = 0{,}45 \pm 0{,}09}$

De plus $\boxed{Q = \dfrac{\pi}{\delta}}$ avec $\boxed{u(Q) = \left|\dfrac{\partial Q}{\partial \delta}\right| u(\delta) = \dfrac{\pi}{\delta^2} u(\delta)}$

D'où $\underline{Q = 7{,}01 \pm 1{,}35}$

Valeur exacte : $\boxed{Q_{\text{exact}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + 4\left(\dfrac{\pi}{\delta}\right)^2}} \Rightarrow \underline{Q_{\text{exact}} = 7{,}03}$

Écart normalisé : $\boxed{E_{N,\text{exact}} = \dfrac{|Q - Q_{\text{exact}}|}{u(Q)}} \Rightarrow \underline{E_{N,\text{exact}} = 0{,}01} \ll 2$

Les valeurs sont très compatibles. On confirme encore que l'on peut supposer er un amortissement faible.

4

On a $$Q_{\text{theo}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \Rightarrow \quad \underline{Q_{\text{theo}} = 31{,}6}$$

D'où $$\boxed{E_N = \frac{|Q_{\text{exp}} - Q_{\text{theo}}|}{u(Q)}} \Rightarrow \underline{E_N = 18{,}2} \gg 2$$

On est censé-es avoir un facteur de qualité bien plus grand !! Or, le facteur le plus important qui réduit le facteur de qualité c'est la résistance. Dans notre valeur théorique, on n'a pris en compte **que la résistance de la boîte à décades**, mais il faut prendre en compte la **résistance totale du circuit**, qui comprend aussi la résistance interne de la bobine, ainsi que celle du GBF (et un peu des fils, un peu du condensateur).

On trouve R_{circuit} en l'isolant dans le Q mesuré :

$$Q = \frac{1}{R_{\text{circuit}}}\sqrt{\frac{L}{C}} \Leftrightarrow \boxed{R_{\text{circuit}} = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{u(R_{\text{circuit}}) = \left|\frac{\partial R_{\text{circuit}}}{\partial Q}\right| u(Q) = \frac{u(Q)}{Q^2}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$\text{A.N. : } \underline{R_{\text{circuit}} = (451 \pm 87)\,\Omega}$$

Ça reste une valeur cohérente avec les résistances internes typiques des composants en TP : de l'ordre de $50\,\Omega$ pour le GBF, et de quelques centaines pour la bobine.

III/B Étude expérimentale d'oscillations mécaniques amorties

5

III/B) 1 Mesures

On trouve $$\underline{u_\infty = 2{,}14\,\text{V}}$$

6

III/B) 4 Exploitation des résultats

On mesure $$\begin{cases} t_0 = 0{,}5\,\text{s} & \text{avec} \quad \Delta(t_3) = 0{,}050\,\text{s} \\ t_{30} = 2{,}50\,\text{s} & \text{avec} \quad \Delta(t_0) = 0{,}050\,\text{s} \end{cases} \quad \text{donc} \quad u(t_n) = \frac{\Delta(t_n)}{\sqrt{3}} = 0{,}029\,\text{s}$$

Ainsi $$30T = t_{30} - t_0 \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{t_{30} - t_0}{30}} \quad \text{et} \quad \boxed{u(T) = \frac{u(30T)}{30} = \frac{\sqrt{u(t_{30})^2 + u(t_0)^2}}{30}}$$

$$\text{A.N. : } \underline{T = (0{,}50 \pm 0{,}02)\,\text{s}}$$

Or, $$\boxed{T_{\text{theo}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 0{,}200\,\text{kg} \\ k = 10\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{T_{\text{theo}} = 0{,}98\,\text{s}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_N = \frac{|T_{\text{exp}} - T_{\text{theo}}|}{u(T_{\text{exp}})}}$$

$$\text{A.N. : } \underline{E_N = 0{,}3} \leq 2$$

7 En cours…

8 On calcule d'abord une liste des valeurs de δ grâce à la formule, en prenant un écart de une période à chaque fois. On en calcule ensuite la moyenne.

Pour l'incertitude de type A, on calcule la différence entre chaque valeur et la moyenne, puis on élève au carré ces différences. On calcule la moyenne de cet écart au carré, que l'on multiplie par $n/(n-1)$ pour obtenir la variance ($\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\langle (x - \overline{x})^2 \rangle}$). On obtient l'incertitude en divisant par le nombre de mesures, ici n.

9

On obtient $$\delta = (24{,}5 \pm 2{,}3) \times 10^{-3}$$

Or, $$Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} = \frac{\pi}{\delta} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \delta\frac{\sqrt{km}}{\pi}} \quad \text{et} \quad \boxed{u(\alpha) = u(\delta)\frac{\sqrt{km}}{\pi}}$$

$$\text{A.N. : } \underline{\alpha = (8{,}80 \pm 0{,}90) \times 10^{-3}\,\text{kg}{\cdot}\text{s}^{-1}}$$

IV Conclure

Tableau TP8.2 – Correspondances

10

Méca	$\longleftrightarrow$	Élec
z	$\longleftrightarrow$	q
v	$\longleftrightarrow$	i
m	$\longleftrightarrow$	L
k	$\longleftrightarrow$	C
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\longleftrightarrow$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
α	$\longleftrightarrow$	R
$Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$	$\longleftrightarrow$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$