

Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

Sommaire

I Présentation du régime forcé	2
I/A Réponse d'un système en RSF	2
I/B Notions de signaux périodiques	2
I/C Passage en complexes	3
II Circuits électriques en RSF	6
II/A Lois de KIRCHHOFF en RSF	6
II/B Impédance et admittance complexes	7
II/C Associations d'impédances et ponts diviseurs	8
II/D Déphasage	8

Capacités exigibles

- | | |
|---|---|
| ☐ Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.

☐ Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. | ☐ Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

☐ Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. |
|---|---|

L'essentiel

Définitions

☐ E6.1 : Régimes de forçages	2
☐ E6.2 : Régime sinusoïdal forcé	2
☐ E6.3 : Période	2
☐ E6.4 : Valeur moyenne	3
☐ E6.5 : Valeur efficace	3
☐ E6.6 : Impédance complexe	7
☐ E6.7 : Admittance	7
☐ E6.8 : Déphasage	8
☐ E6.9 : Déphasages particuliers	9

Propriétés

☐ E6.1 : Moyenne sinusoïdale	3
☐ E6.2 : Valeur efficace sinus	3
☐ E6.3 : Passage en complexes	4
☐ E6.4 : Impédances des dipôles de base	7
☐ E6.5 : Dipôles équivalents aux limites	7

Rappels

☐ E6.1 : Réponses système amorti	2
☐ E6.2 : ARQS	6

Exemples

☐ E6.1 : Approche naïve	4
☐ E6.2 : Déphasage des impédances	9

Démonstrations

☐ E6.1 : Moyenne sinusoïdale	3
☐ E6.2 : Valeur efficace sinus	3
☐ E6.3 : Passage en complexes	4
☐ E6.4 : Impédances des dipôles de base	7
☐ E6.5 : Dipôles équivalents aux limites	8

Implications

☐ E6.1 : Signaux décalés	3
☐ E6.2 : Loi des nœuds en $\mathbb{C}$	6
☐ E6.3 : Loi des mailles en $\mathbb{C}$	6

Applications

☐ E6.1 : Circuit RC en RSF	5
☐ E6.2 : Calcul d'un argument	6
☐ E6.3 : Association d'impédances	8

Outils

☐ E6.1 : Module et arguments de $z = x + jy$	5
---	---

Points importants

☐ E6.1 : Système amorti en RSF	2
☐ E6.2 : Associations d'impédances	8
☐ E6.3 : Lecture d'un déphasage	9
☐ E6.4 : Résumé méthode	10

Erreurs communes

☐ E6.1 : Valeur efficace autres signaux	3
☐ E6.2 : Passage en complexes	4
☐ E6.3 : Arguments en physique complexe	5

I Présentation du régime forcé

I/A Réponse d'un système en RSF

Définition E6.1 : Régimes de forçages

- ◇ Libre : $\sum_i f_i(t) \left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_t = 0_{\text{libre}}$
- ◇ Forçage constant : $\sum_i f_i(t) \left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_t = K_{\text{forçage cst.}}$
- ◇ Forçage sinusoïdal : $\sum_i f_i(t) \left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_t = F(t) = \underbrace{F_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}_{\text{forçage sinusoïdal}}$

Rappel E6.1 : Réponses système amorti

Avec ce qu'on a vu précédemment pour les systèmes amortis, on sait que :

- ◇ Libre : $y_{\text{libre}}(t) = y_h(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$
- ◇ Forçage constant : $y_{\text{forcé}}(t) = y_h(t) + y_p \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_p$ $y_p = \text{cte}$, même forme que forçage.

Important E6.1 : Système amorti en RSF

Pour un système amorti soumis à un forçage sinusoïdal, on cherche une **solution particulière** $y_p(t)$ de la **même forme que le forçage**, telle que :

- ◇ Forçage sinusoïdal : $y_{\text{forcé}}(t) = y_h(t) + y_p(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y_p(t)$ avec $y_p(t) = Y \cos(\omega t + \varphi)$
 - ◇ Ainsi en RSF, la solution particulière oscille à la **même pulsation** que l'entrée :
- $$e(t) = E_0 \cos(\omega t) \Rightarrow u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$$
- ◇ On cherche à déterminer l'**amplitude** et la **phase** Y et φ , donc ici U ou I et φ_u ou φ_i .
 - ◇ À l'inverse des K_1, K_2 constantes de $y_h(t)$, les **constantes de** $y_p(t)$ Y et φ ne dépendent pas des conditions initiales, mais des **composants du système**, ici $R, L, C, \omega \dots$

Définition E6.2 : Régime sinusoïdal forcé

Le **régime sinusoïdal forcé** (RSF) est le **régime permanent** d'un système soumis à une **entrée sinusoïdale**.

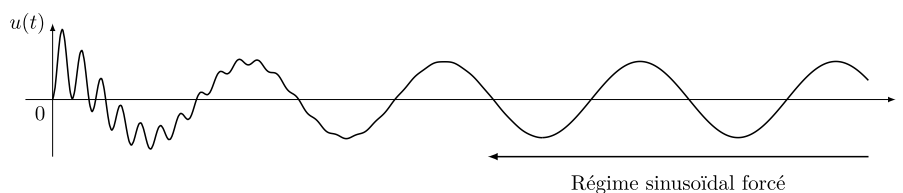


FIGURE E6.1 – Exemple d'un signal en RSF.

- ◇ On est en régime transitoire tant que $y_h(t) \approx y_p(t)$, permanent quand $y_p(t) \gg y_h(t)$.
- ◇ Pour un forçage sinusoïdal, quand $y_{\text{forcé}}(t) = y_p(t)$, on est en **régime permanent variable**.
- ◇ Précédemment en forçage constant, on atteignait $y_{\text{forcé}} = y_p$, c'était un **régime permanent continu**.

I/B Notions de signaux périodiques

I/B) 1 Période

Définition E6.3 : Période

$$s(t) \text{ périodique} \equiv \exists T : \forall t \in \mathbb{R}^+, s(t+T) = s(t)$$

I/B) 2 Moyenne

Définition E6.4 : Valeur moyenne

Pour un **signal périodique** $s(t)$, on définit sa valeur moyenne $\langle s(t) \rangle$ par

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

♥ Propriété E6.1 : Moyenne sinusoïdale

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal pur $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$ est nulle :

$$\langle s(t) \rangle = \langle S \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0$$

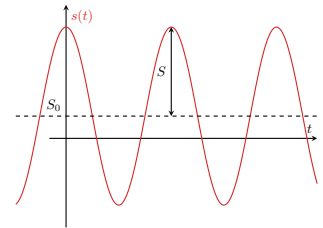
♥ Démonstration E6.1 : Moyenne sinusoïdale

$$\begin{aligned} \langle s(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T S \cos(\omega t + \varphi) dt \\ \Leftrightarrow \langle s(t) \rangle &= \frac{1}{T} \left[\frac{S}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \right]_0^T \\ \Leftrightarrow \langle s(t) \rangle &= \frac{S}{\omega T} \underbrace{(\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\omega \cdot 0 + \varphi))}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Implication E6.1 : Signaux décalés

Pour un signal $s(t)$ sinusoïdal décalé (*offset* en anglais) d'une valeur constante S_0 , sa moyenne est égale à cette valeur constante :

$$s(t) = S_0 + S \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \langle s(t) \rangle = S_0$$



I/B) 3 Valeur efficace

Même si la **tension moyenne** est nulle, l'**énergie moyenne** transmise par le signal n'est pas nulle !

♥ Définition E6.5 : Valeur efficace

L'énergie étant **proportionnelle au carré des signaux**, on définit la valeur efficace d'un signal **périodique** par

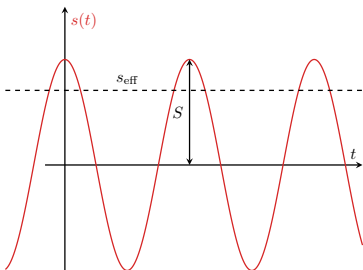
$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$$

Ainsi, s_{eff}^2 représente l'**énergie moyenne** du signal.

♥ Propriété E6.2 : Valeur efficace sinus

La valeur efficace de $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$ est

$$s_{\text{eff}} = \frac{S}{\sqrt{2}}$$



♥ Démonstration E6.2 : Valeur efficace sinus

$$\begin{aligned} \langle s^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T (S^2 \cos^2(\omega t + \varphi)) dt \\ \Leftrightarrow \langle s^2(t) \rangle &= \frac{S^2}{2T} \left(\int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt \right) \quad \left(\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \langle s^2(t) \rangle &= \frac{S^2}{2T} \left(\underbrace{\left[t \right]_0^T}_{=T} + \underbrace{\left[\frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + \varphi) \right]_0^T}_{=0} \right) \\ \Leftrightarrow \langle s^2(t) \rangle &= \frac{S^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{s_{\text{eff}} = \frac{S}{\sqrt{2}}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Attention E6.1 : Valeur efficace autres signaux

Il n'y a pas toujours de rapport $\sqrt{2}$ entre amplitude et valeur efficace ! Pour un signal triangle, la valeur efficace est $S/\sqrt{3}$, et pour un créneau pur sa valeur efficace est son amplitude S .

I/C Passage en complexes

Exemple E6.1 : Approche naïve

On peut essayer de résoudre un circuit en RSF en utilisant la forme de solution particulière et prier pour que ça marche. Par exemple, en reprenant l'équation différentielle sur $u_C(t)$ du circuit LC :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) &= \omega_0^2 e(t) \\ \Rightarrow (-\omega^2 + \omega_0^2) U \cos(\omega t + \varphi_u) &= \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} e(t) = E_0 \cos(\omega t) \\ u_{C,p}(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_u = 0 \\ U = \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

Par contre, en reprenant le même raisonnement pour $u_C(t)$ du circuit RC, on tombe sur une embûche :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C(t)}{\tau} &= e(t) \\ \Rightarrow -\omega U \sin(\omega t + \varphi_u) + \frac{U}{\tau} \cos(\omega t + \varphi_u) &= \frac{E_0}{\tau} \cos(\omega t) \\ \Leftrightarrow -\omega U \cos\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{U}{\tau} \cos(\omega t + \varphi_u) &= \frac{E_0}{\tau} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} e(t) = E_0 \cos(\omega t) \\ u_{C,p}(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u) \\ \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right.$$

Ici, la dérivation nous complique la tâche : on se retrouve avec deux fonctions cosinus décalées, et on ne peut pas identifier directement les amplitudes et les phases... et si on essayait la même approche que pour $y_h(t)$?

♥ Propriété E6.3 : Passage en complexes

Passer en complexes, c'est **transformer un cosinus en exponentielle complexe**, donnant ainsi :

$$\underline{y}(t) = \underline{Y} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \boxed{\underline{Y} = Y e^{j\varphi}} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} Y = |\underline{Y}| \\ \varphi = \arg(\underline{Y}) \end{cases}$$

Ce qui permet de passer d'une équation **différentielle** à une équation **algébrique** ; en effet on a alors :

Dérivée

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = j\omega \underline{y}(t)}$$

Primitive

$$\boxed{\int \underline{y}(t) dt = \frac{\underline{y}(t)}{j\omega}}$$

Démonstration E6.3 : Passage en complexes

$$\begin{aligned} y(t) &= Y \cos(\omega t + \varphi) \\ \Leftrightarrow \underline{y}(t) &= Y e^{j(\omega t + \varphi)} && \left. \begin{array}{l} \text{Passage } \mathbb{C} \\ \text{Séparation de } t \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \underline{y}(t) &= \underbrace{Y e^{j\varphi}}_{=\text{cte}} \cdot e^{j\omega t} && \left. \begin{array}{l} \text{Séparation de } t \\ \text{Réécriture} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \underline{y}(t) &= \underline{Y} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Dérivée

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(Y e^{j\omega t})}{dt} = j\omega \cdot Y e^{j\omega t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = j\omega \underline{y}(t)}$$

Primitive

$$\int \underline{y}(t) dt = \int \underline{Y} e^{j\omega t} dt = \frac{\underline{Y} e^{j\omega t}}{j\omega} \Leftrightarrow \boxed{\int \underline{y}(t) dt = \frac{\underline{y}(t)}{j\omega}}$$

Attention E6.2 : Passage en complexes

Le passage ne fonctionne **que si le signal est un cosinus** ! Sinon, **on se ramène à un cosinus** par un terme de phase ($\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$) car l'**opération inverse** du passage en complexe est la **partie réelle** :

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{Re}(y(t)) = \text{Re}(Y e^{j(\omega t + \varphi)}) \\ \Leftrightarrow y(t) &= \text{Re}(Y (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi))) = Y \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Il faut donc bien que l'on ait transformé un cosinus et non un sinus !

Outils E6.1 : Module et arguments de $\underline{z} = x + jy$

Module

Son module est la **norme de son vecteur dans $\mathbb{C}$** , d'où

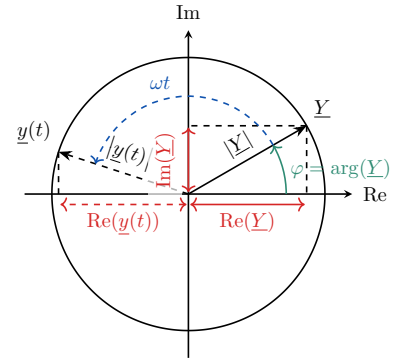
$$\diamond \quad |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \diamond \quad \left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}$$

Argument

Son argument est l'**angle dans le plan complexe**, $\arg(\underline{z}) = \varphi$, d'où

$$\diamond \quad \cos(\arg(\underline{z})) = \frac{\operatorname{Re}(\underline{z})}{|\underline{z}|} \quad ; \quad \sin(\arg(\underline{z})) = \frac{\operatorname{Im}(\underline{z})}{|\underline{z}|} \quad ; \quad \tan(\arg(\underline{z})) = \frac{\operatorname{Im}(\underline{z})}{\operatorname{Re}(\underline{z})}$$

$$\diamond \quad \arg\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2) \quad \text{et} \quad \arg(x + jy) = -\arg(x - jy)$$

FIGURE E6.2 – Grandeurs dans $\mathbb{C}$

Application E6.1 : Circuit RC en RSF

Reprenons l'équation différentielle du circuit RC :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} &= \frac{e}{\tau} \\ \Leftrightarrow j\omega \underline{U}_C e^{j\omega t} + \frac{\underline{U}_C e^{j\omega t}}{RC} &= \frac{E_0 e^{j\omega t}}{RC} \\ \Leftrightarrow \underline{U}_C (RCj\omega + 1) &= E_0 \\ \Leftrightarrow \underline{U}_C &= \frac{E_0}{1 + jRC\omega} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \underline{u}_C = \underline{U}_C e^{j\omega t} \\ \text{et } \frac{dy}{dt} = j\omega y(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{On factorise} \\ \text{On isole} \end{array}$$

Module

$$U_C = |\underline{U}_C| = \left| \frac{E_0}{1 + jRC\omega} \right| \Leftrightarrow U_C = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

Argument

$$\varphi = \arg\left(\frac{E_0}{1 + jRC\omega}\right) = \underbrace{\arg(E_0)}_{=0} - \arg(1 + jRC\omega)$$

$$\Rightarrow \tan(\varphi) = -\tan(\arg(\underbrace{1 + jRC\omega}_{\operatorname{Re}>0})) = -\frac{RC\omega}{1}$$

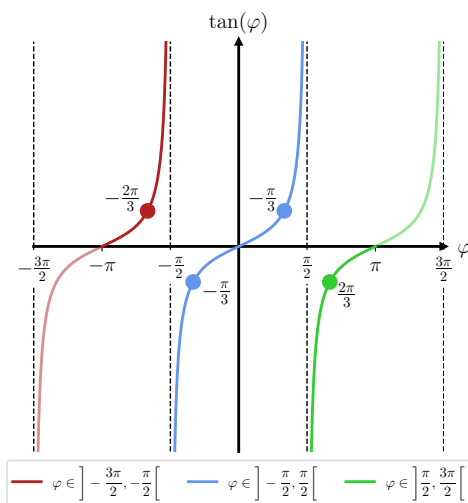
$$\Leftrightarrow \varphi = -\arctan(RC\omega)$$

♥ Attention E6.3 : Arguments en physique complexe

Par convention, $\varphi \in [-\pi ; \pi]$.

$\tan$ est définie **par morceaux** :

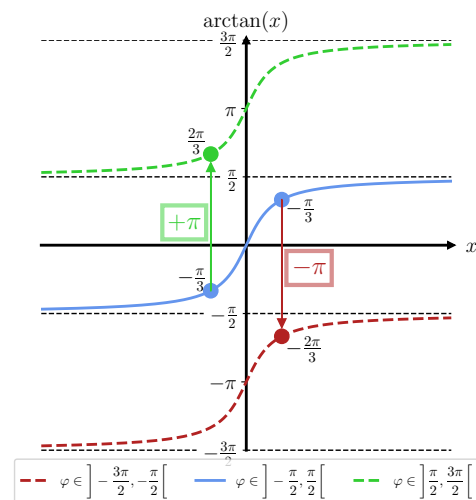
$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ k \in \mathbb{Z} : (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

FIGURE E6.3 – $\tan(\varphi)$

Il n'y a jamais de problème pour calculer $\tan(\varphi)$

Or $\arctan$ est définie sur un **intervalle restreint** :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

FIGURE E6.4 – $\arctan(x)$

On n'a $\arctan(\tan(\varphi)) = \varphi$ que pour $\varphi \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

◇ Dans le cas $\varphi = \arg(\underline{Y})$, cela revient à vérifier que $\text{Re}(\underline{Y}) > 0$.

◇ Si $\text{Re}(\underline{Y}) < 0$, alors on **multiplie par $\frac{1}{j}$** de sorte à **échanger Re et Im** et **ajouter/soustraire $\pi/2$** à l'argument.

♥ Application E6.2 : Calcul d'un argument

Soit

$$\underline{U} = \frac{E_0}{1 - j\frac{R}{L\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

Déterminer $\varphi = \arg(\underline{U})$

$$\varphi = \arg(\underline{U}) = \underbrace{\arg(E_0)}_{=0} - \arg\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - j\frac{R}{L\omega}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arg\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + j\frac{R}{L\omega}\right) \quad \text{car} \quad \arg(x + jy) = -\arg(x - jy)$$

On pourrait appliquer tan sans souci, mais on ne peut appliquer arctan que si

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} > 0 \Leftrightarrow \omega > \omega_0$$

Pour se ramener à une solution $\forall \omega$, on « échange » les parties imaginaires et réelles en tournant de $\pi/2$ dans $\mathbb{C}$ grâce à la multiplication par j/j :

$$\varphi = \arg\left(\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + j\frac{R}{L\omega}\right) \frac{j}{j}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arg\left(\frac{R}{L\omega} + \frac{1}{j}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right) + \arg(j)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arg\left(\frac{R}{L\omega} + j\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)\right) + \frac{\pi}{2}$$

On distribue $\frac{1}{j}$
On sort $\arg(j)$
 $\frac{1}{j} = -j$
 $\arg(j) = \frac{\pi}{2}$

$\arctan(\tan(\varphi)) = \varphi$
car partie réelle > 0

II Circuits électriques en RSF

Rappel E6.2 : ARQS

Comme au début de l'année, nous nous plaçons toujours dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), c'est-à-dire que pour un circuit de taille L alimenté par une source sinusoïdale de fréquence f , on doit avoir $Lf \ll c$ avec c la célérité de la lumière/des ondes électromagnétiques.

II/A Lois de KIRCHHOFF en RSF

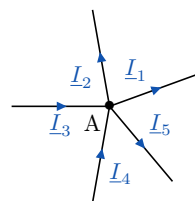
Implication E6.2 : Loi des nœuds en $\mathbb{C}$

On se place en RSF, avec $i_k(t) = I_k \cos(\omega t + \varphi_k)$ les intensités dans les branches. En passant en complexes, on aura

$$\underline{i}_k(t) = \underline{I}_k \cdot e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{I}_k = I_k e^{j\varphi_k}$$

$$\Rightarrow \underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_5(t) = \underline{i}_3(t) + \underline{i}_4(t)$$

$$\Leftrightarrow \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_5 = \underline{I}_3 + \underline{I}_4$$



$$\Rightarrow \begin{cases} I_3 + I_4 - I_1 - I_2 - I_5 = 0 \\ \Leftrightarrow I_3 + I_4 = I_1 + I_2 + I_5 \end{cases}$$

FIGURE E6.5 – Loi des nœuds

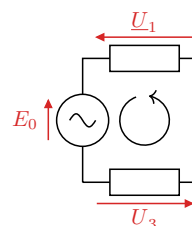
Implication E6.3 : Loi des mailles en $\mathbb{C}$

On se place en RSF, avec $u_k(t) = U_k \cos(\omega t + \varphi_k)$ les tensions aux bornes des dipôles. Ainsi, en passant en complexes, on aura

$$\underline{u}_k(t) = \underline{U}_k \cdot e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_k = U_k e^{j\varphi_k}$$

$$\Rightarrow \underline{e}(t) + \underline{u}_2(t) = \underline{u}_1(t) + \underline{u}_3(t)$$

$$\Leftrightarrow \underline{E} + \underline{U}_2 = \underline{U}_1 + \underline{U}_3$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{U}_1 - E_0 + \underline{U}_3 - \underline{U}_2 = 0 \\ \Leftrightarrow E_0 + \underline{U}_2 = \underline{U}_1 + \underline{U}_3 \end{cases}$$

FIGURE E6.6 – Loi des mailles.

II/B Impédance et admittance complexes

♥ Définition E6.6 : Impédance complexe

Comme $\underline{u}(t) = \underline{U}e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$ et $\underline{i}(t) = \underline{I}e^{j\omega t}$ avec $\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$, on peut étendre la loi d'OHM aux complexes en définissant l'**impédance complexe** $\underline{Z}$ d'un dipôle telle que :

$$\diamond \quad \underline{u}(t) = \pm \underline{Z} \underline{i}(t) \Leftrightarrow \underline{U} = \pm \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad \text{Unité} \quad [|\underline{Z}|] = \Omega$$

$$\diamond \quad |\underline{Z}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} = \frac{U}{I}$$

$$\diamond \quad \arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right) = \varphi_u - \varphi_i$$

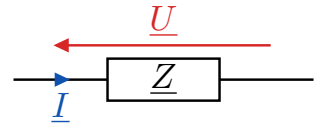


FIGURE E6.7

Définition E6.7 : Admittance

Assez naturellement, comme on avait la conductance égale à l'inverse d'une résistance, on peut définir l'inverse d'une impédance : c'est l'**admittance complexe** $\underline{Y}$:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \Leftrightarrow \underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

Pour trouver les impédances des dipôles de base, on utilise leurs relations courant-tension qu'on convertit en complexes, **en se souvenant de dériver en complexes équivaut à multiplier par $j\omega$** .

♥ Propriété E6.4 : Impédances des dipôles de base

	Résistance	Inductance	Capacité
Schéma			
	FIGURE E6.8 – $\underline{Z}_R$	FIGURE E6.9 – $\underline{Z}_L$	FIGURE E6.10 – $\underline{Z}_C$

Démonstration E6.4 : Impédances des dipôles de base

	Résistance	Inductance	Capacité
Démonstration	$\begin{aligned} u(t) &= Ri(t) \\ \Leftrightarrow \underline{u}(t) &= R\underline{i}(t) \\ \Leftrightarrow \underline{Z}_R &= R \end{aligned}$	$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di}{dt} \Big _t \\ \Leftrightarrow \underline{u}(t) &= jL\omega \cdot \underline{i}(t) \\ \Leftrightarrow \underline{Z}_L &= jL\omega \end{aligned}$	$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du}{dt} \Big _t \\ \Leftrightarrow \underline{i}(t) &= Cj\omega \cdot \underline{u}(t) \\ \Leftrightarrow \underline{Z}_C &= \frac{1}{jC\omega} \end{aligned}$

Ainsi, la **résistance ne change pas** d'expression entre les réels et les complexes, alors que les **bobines et condensateurs** ont des caractéristiques complexes différentes. En plus de ça, leurs impédances **dépendent de ω** : on peut notamment étudier deux cas limites, quand $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$:

♥ Propriété E6.5 : Dipôles équivalents aux limites

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow +\infty$
Bobine		
Condensateur		

Démonstration E6.5 : Dipôles équivalents aux limites

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow +\infty$
Cond. Bobine	$ \underline{Z}_L = L\omega \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$	$ \underline{Z}_L = L\omega \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} +\infty$
	$ \underline{Z}_C = 1/(C\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} +\infty$	$ \underline{Z}_C = 1/(C\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$

II/C Associations d'impédances et ponts diviseurs

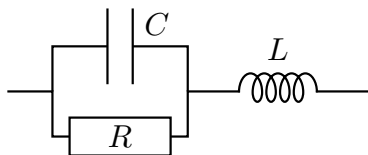
Enfin, comme la relation courant-tension avec l'impédance complexe est analogue à celle d'une résistance, on peut facilement démontrer que les associations d'impédances suivent les associations de résistances, et qu'on peut donc appliquer les ponts diviseurs de tension et de courant comme si on n'avait que des résistances.

Important E6.2 : Associations d'impédances

	Schéma	Relations
En série		◇ Impédance équivalente : $\underline{Z}_{\text{série}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ ◇ Diviseur de tension : $\underline{U}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{\text{série}}} \underline{U}_{AB}$
En parallèle		◇ Dipôle équivalent : $\underline{Y}_{\text{para}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\underline{Z}_{\text{para}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{para}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ ◇ Diviseur de courant : $\underline{I}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{\text{para}}} \underline{I}_{\text{para}} \Leftrightarrow \underline{I}_k = \frac{\underline{Z}_{\text{para}}}{\underline{Z}_k} \underline{I}_{\text{para}}$

Application E6.3 : Association d'impédances

Établir $\underline{Z}_{\text{eq}}$ pour :



On a

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{para}}} = \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{R} + jC\omega$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{para}} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad \text{donc} \quad \underline{Z}_{\text{eq}} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

II/D Déphasage

Définition E6.8 : Déphasage

Pour deux signaux sinusoïdaux de mêmes fréquences $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, on définit le **déphasage** entre s_2 et s_1 comme étant la **différence de leurs phases instantanées** :

$$\Delta\varphi_{2/1} = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) \Leftrightarrow \Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$$

Important E6.3 : Lecture d'un déphasage

Le déphasage $\Delta\varphi_{1/2}$ est lié au **retard temporel** $\Delta t_{1/2} = t_1 - t_2$ du signal s_1 par rapport au signal s_2 :

$$\omega = \left| \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} \right| \Leftrightarrow \Delta\varphi_{1/2} = \pm\omega|\Delta t_{1/2}|$$

Le déphasage obtenu est entre $-\pi$ et $+\pi$. On définit :

- ◇ $\Delta\varphi_{1/2} > 0 \Rightarrow s_1$ est en avance sur s_2 ;
- ◇ $\Delta\varphi_{1/2} < 0 \Rightarrow s_1$ est en retard sur s_2 .

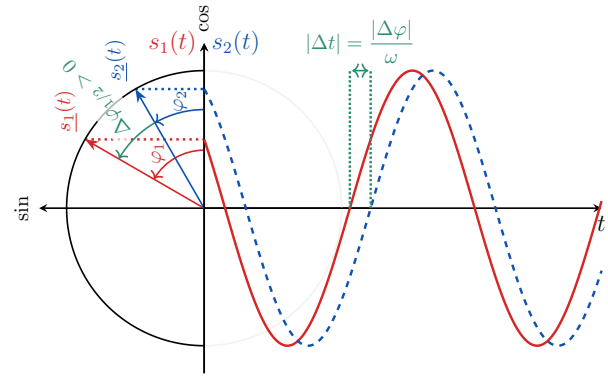


FIGURE E6.11 – Déphasage

Le principe est de mesurer la différence de temps entre les deux moments les plus proches tels que les deux signaux s'annulent **avec la même pente**, et de « convertir » cet écart temporel en déphasage *via* la pulsation.

♥ Définition E6.9 : Déphasages particuliers**En phase**

Deux signaux sont **en phase** si leur **déphasage est nul** (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow \Delta\varphi = 2p\pi \quad p \in \mathbb{Z}$$

Les signaux passent par leurs valeurs maximales et minimales aux mêmes instants, et s'annulent simultanément.

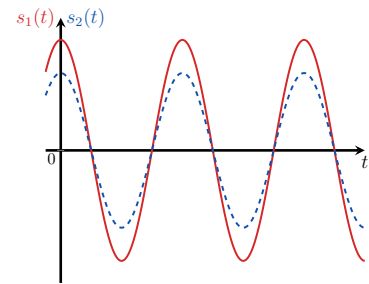


FIGURE E6.12 – En phase.

En quadrature

Deux signaux sont en **quadrature phase** si leur déphasage est de $\pm\pi/2$ (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv \pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \Leftrightarrow \Delta\varphi = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi \quad p \in \mathbb{Z}$$

Quand un signal s'annule, l'autre est à son maximum où à son minimum : c'est la relation entre un cosinus et un sinus.

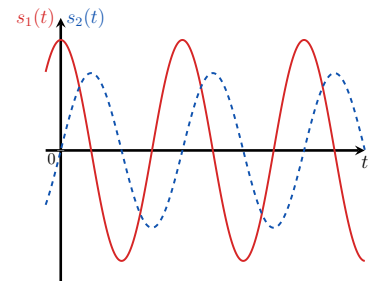


FIGURE E6.13 – Quadrature.

En opposition

Deux signaux sont en **opposition de phase** si leur déphasage est de $\pm\pi$ (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv \pm\pi \quad [2\pi] \Leftrightarrow \Delta\varphi = (2p + 1)\pi \quad p \in \mathbb{Z}$$

Lorsqu'un signal passe par sa valeur maximale, l'autre est à sa valeur minimale, mais ils s'annulent simultanément.

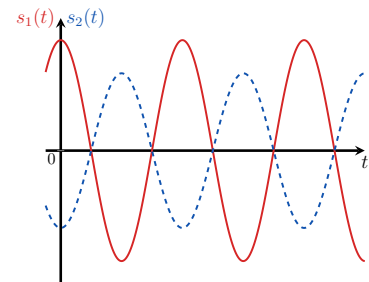


FIGURE E6.14 – Opposition.

Exemple E6.2 : Déphasage des impédances

Pour un dipôle de tension $\underline{U}$ traversé par une intensité $\underline{I}$, on définit $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$, et on a donc $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$. Ainsi, la phase d'une impédance représente le déphasage entre la tension et le courant. Pour les différents dipôles classiques, on trouve :

- ◇ $\arg(\underline{Z}_R) = 0 \Rightarrow$ signaux en phase ;
- ◇ $\arg(\underline{Z}_L) = \arg(jL\omega) = \pi/2 \Rightarrow$ signaux en quadrature de phase, avec $\underline{u}$ en avance sur $\underline{i}$;

◇ $\arg(\underline{Z}_C) = \arg(1/jC\omega) = -\pi/2 \Rightarrow$ signaux en quadrature de phase, avec $\underline{u}$ en retard sur $\underline{i}$.

Important E6.4 : Résumé méthode

Un système soumis à une excitation sinusoïdale du type $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ se comporte de la manière suivante :

- ◇ On observe un court régime transitoire dû à la solution homogène de l'ED ($Ae^{-t/\tau}$ pour ordre 1, pseudo-périodique ou apériodique pour l'ordre 2) ;
- ◇ Après ce régime, on obtient la solution particulière :

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \varphi)$$

avec ω la **pulsation d'entrée**, Y et φ définies **par le système** (et non pas des conditions initiales).

- ◇ Pour trouver ces valeurs, on définit :

▷ l'entrée complexe :

$$\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$$

▷ les signaux de sortie complexes :

$$\underline{y}(t) = Y e^{j(\omega t + \varphi)} ;$$

▷ les amplitudes complexes :

$$\underline{Y} = Y e^{j\varphi} \Rightarrow \underline{y}(t) = \underline{Y} e^{j\omega t} ;$$

▷ On retrouve les grandeurs réelles en en prenant le module et la phase :

$$\boxed{Y = |\underline{Y}|} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = \arg(\underline{Y})}$$