

1^{er} ordre et oscillateurs en RSF

Sommaire

I Introduction au filtrage	2
II Filtres RC	4
II/A Filtre RC sur C : passe-bas ordre 1	4
II/B Filtre RC sur R : passe-haut ordre 1	5
III Résonance en tension, en élongation	6
III/A Filtre RLC sur C : passe-bas d'ordre 2	7
III/B Exemple mécanique : résonance en élongation	9
IV Résonance en intensité, en vitesse	11
IV/A Filtre RLC sur R : passe-bande d'ordre 2	11
IV/B Résonance en vitesse	13

Capacités exigibles

- ☐ Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale.
- ☐ Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.
- ☐ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- ☐ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale.
- ☐ Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

L'essentiel

Propriétés

☐ E7.1 : Filtre RC sur C	4
☐ E7.2 : Bande passante RC sur C	5
☐ E7.3 : Filtre RC sur R	6
☐ E7.4 : Bande passante RC sur R	6
☐ E7.5 : Filtre RLC sur C	8
☐ E7.6 : Résonance en tension RLC sur C	9
☐ E7.7 : Filtre RLC sur R	12
☐ E7.8 : Résonance en intensité RLC sur R	12
☐ E7.9 : Bande passante en intensité	13

Démonstrations

☐ E7.1 : Filtre RC sur C	4
☐ E7.2 : Bande passante RC sur C	5
☐ E7.3 : Filtre RC sur R	5
☐ E7.4 : Bande passante RC sur R	6
☐ E7.5 : Filtre RLC sur C	7
☐ E7.6 : Résonance en tension RLC sur C	8
☐ E7.7 : Filtre RLC sur R	11
☐ E7.8 : Résonance en intensité RLC sur R	12
☐ E7.9 : Bande passante en intensité	13

Applications

☐ E7.1 : Amplitude complexe $\underline{X}$	10
☐ E7.2 : Amplitude complexe $\underline{V}$	13

Définitions

☐ E7.1 : Filtre et fonction de transfert	3
☐ E7.2 : Bande passante	5
☐ E7.3 : Résonance	7
☐ E7.4 : RLC série sur C en RSF	7
☐ E7.5 : Ressort amorti en RSF	9
☐ E7.6 : RLC série sur R en RSF	11

Implications

☐ E7.1 : Résonance en élongation	10
☐ E7.2 : Résonance en vitesse	14

Exemples

☐ E7.1 : Rappels du TP07	2
☐ E7.2 : Filtre RC	3
☐ E7.3 : $u_R(t)$ du RC	6
☐ E7.4 : Résonances	6

Outils

☐ E7.1 : Circuits en RSF	3
---	---

Points importants

☐ E7.1 : Analyse réponse de $u_C(t)$	2
☐ E7.2 : À retenir pour $\underline{U}_C$ RLC série	9
☐ E7.3 : À retenir pour $\underline{I}$ RLC série	12
☐ E7.4 : Synthèse résonances	14

I Introduction au filtrage

Exemple E7.1 : Rappels du TP07

Avant de savoir résoudre analytiquement l'équation différentielle sur u_C du circuit RC soumis à $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, on a étudié sa réponse à une tension crêteau, succession d'échelons montants et descendants, puis à une tension sinusoïdale. On avait observé les réponses suivantes :

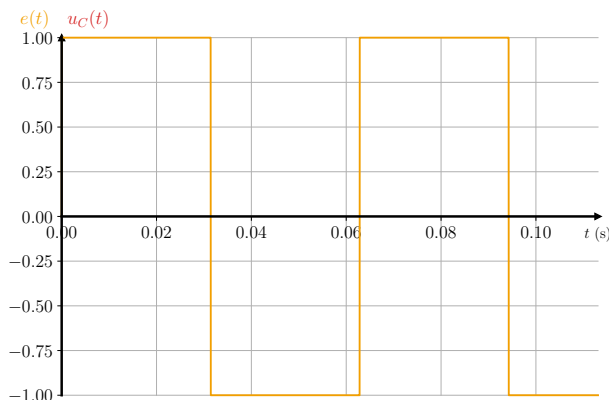
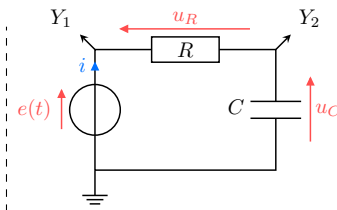


FIGURE E7.1 – $u_C(t)$ du RC crêteau pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$

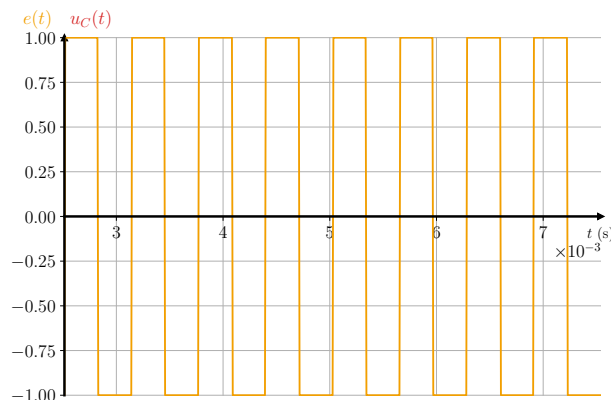


FIGURE E7.2 – $u_C(t)$ du RC crêteau pour $\omega \gg \frac{1}{\tau}$

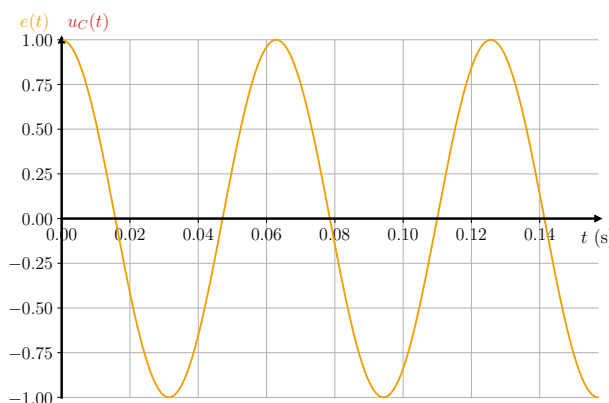


FIGURE E7.3 – $u_C(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$



FIGURE E7.4 – $u_C(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \gg \frac{1}{\tau}$

Observation E7.1 : Résultats observés

◇ Tension crêteau :

▷ Basses fréquences :

▷ Hautes fréquences :

◇ Tension sinusoïdale :

▷ Basses fréquences :

▷ Hautes fréquences :

Important E7.1 : Analyse réponse de $u_C(t)$

On a bien $u_C(t)$ qui oscille à la **même pulsation** que $e(t)$, mais avec une **amplitude** et une **phase** qui dépendent de la pulsation ω .

Plus précisément, dans le cas du circuit RC, on trouve que les signaux **basses fréquences** ($\omega \ll \frac{1}{\tau}$) sont **intégralement transmis** ($u_C(t) \approx e(t)$), tandis que les signaux **hautes fréquences** ($\omega \gg \frac{1}{\tau}$) sont **intégralement coupés** ($u_C(t) \approx 0$) : on dit qu'il **filtre les fréquences**, et en l'occurrence que c'est un **filtre passe-bas**.

♥ Définition E7.1 : Filtre et fonction de transfert

Définition et types

Système qui **traite un signal** sur un **critère fréquentiel**. On le représente par un **quadripôle** dans les schémas électrique, avec $e(t)$ l'entrée et $s(t)$ la sortie. On en distingue 3 types principaux :

- ◇
- ◇
- ◇

FIGURE E7.5 – Filtre.

Il est dit **linéaire** si la sortie est de même fréquence que l'entrée.

Fonction de transfert

Son action est de passer de $\underline{E}$ l'amplitude complexe d'un signal d'entrée à $\underline{S}$ celle d'un signal de sortie associé. Elle est caractérisée par sa **fonction de transfert** $\underline{H}(\omega)$:

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

Gain

Le **gain** traduit l'effet du filtre sur l'**amplitude réelle** d'un signal ; on a

Unité

- ◇ $G(\omega) = 1 \Leftrightarrow S(\omega) = E$: composante de sortie **conservée** à cette fréquence.
- ◇ $G(\omega) > 1 \Leftrightarrow S(\omega) > E$: composante de sortie **amplifiée** à cette fréquence.
- ◇ $G(\omega) < 1 \Leftrightarrow S(\omega) < E$: composante de sortie **atténuée** à cette fréquence.

Exemple E7.2 : Filtre RC

FIGURE E7.6 – Filtre RC à vide

FIGURE E7.7 – Filtre RC sur micro

♥ Outils E7.1 : Circuits en RSF

- ◇ On remplace $e(t)$, tous les $u(t)$ et $i(t)$ par leurs amplitudes complexes ;
- ◇ On remplace les dipôles par leurs impédances ;
- ◇ On simplifie le circuit avec des associations d'impédances (série ou parallèle) ;
 - ▷ **Attention** : Après une association en série, **la tension de la somme a changé** !
- ◇ On applique les ponts diviseurs de tension ou de courant pour exprimer la grandeur d'intérêt, éventuellement en cascade ;
- ◇ On se ramène dans le domaine réel en prenant le module et l'argument des amplitudes complexes obtenues.

II Filtres RC

II/A Filtre RC sur C : passe-bas ordre 1

♥ Démonstration E7.1 : Filtre RC sur C

Prévision du comportement

FIGURE E7.8 – RC sur C en BF.

Ainsi $\Rightarrow \left\{ \right.$

FIGURE E7.9 – RC sur C en HF.

Ainsi $\Rightarrow \left\{ \right.$

Fonction de transfert

FIGURE E7.10 – RC sur C.

Module

Argument

Propriété E7.1 : Filtre RC sur C

Le filtre RC sur C est un **passe-bas** d'ordre 1, dont la fonction de transfert s'écrit

avec et où $\Leftrightarrow \left\{ \right.$

tel que $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \Rightarrow u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi_u)$ avec $\left\{ \right.$

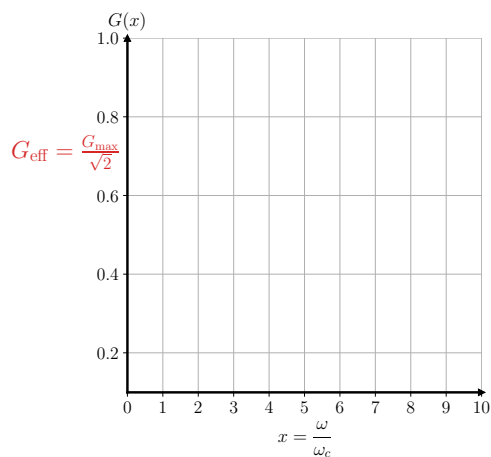


FIGURE E7.11 – Gain $G(x)$ du RC sur C

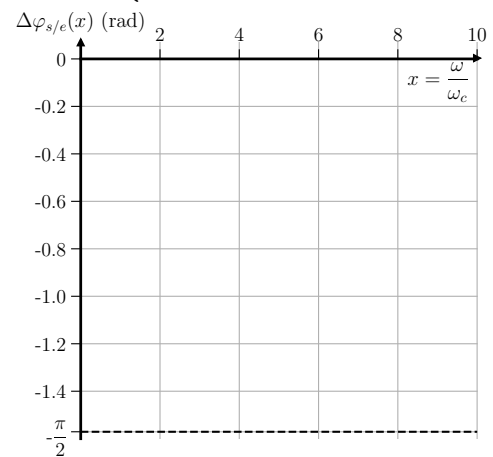


FIGURE E7.12 – Phase $\arg(H(x))$ du RC sur C

♥ Définition E7.2 : Bande passante

On appelle **bande passante** la **plage de fréquences** pour laquelle le gain est **supérieur au gain efficace** :

- ◇ ω_1 et ω_2 sont les **pulsations de coupures**, telles que
- ◇ Sa **largeur** est la **différence** entre ces valeurs :
- ◇ Son **acuité** représente sa **sélectivité** :

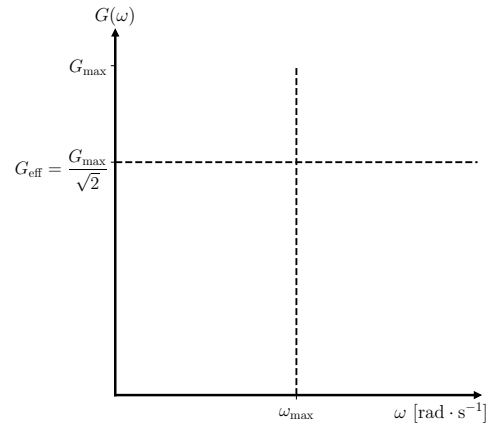


FIGURE E7.13 – Bande passante.

Propriété E7.2 : BP de RC sur C

La bande passante du filtre RC sur C est

♥ Démonstration E7.2 : BP de RC sur C

II/B Filtre RC sur R : passe-haut ordre 1

♥ Démonstration E7.3 : Filtre RC sur R

Prévision du comportement

FIGURE E7.14 – RC sur R en BF

Ainsi $\Rightarrow \left\{ \right.$

FIGURE E7.15 – RC sur R en HF

Ainsi $\Rightarrow \left\{ \right.$

Fonction de transfert

FIGURE E7.16 – RC sur R.

Module

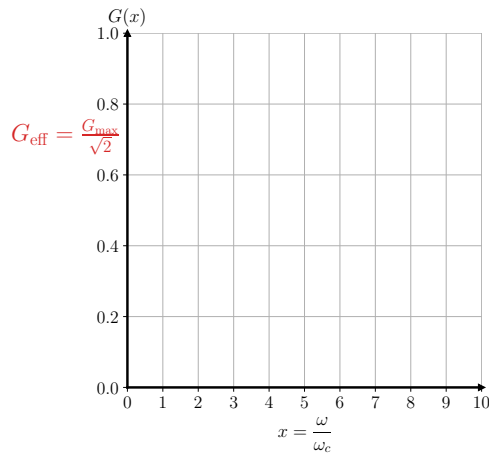
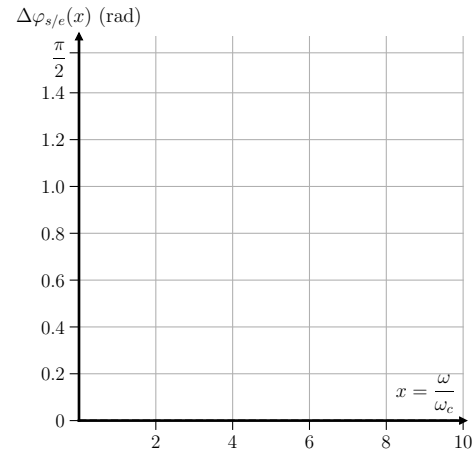
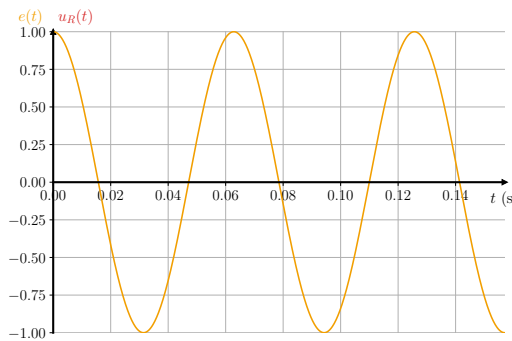
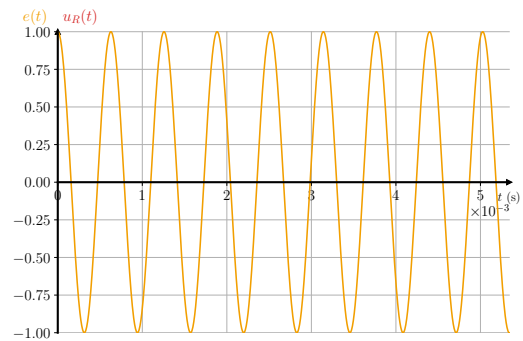
Argument

Propriété E7.3 : Filtre RC sur R

Le filtre RC sur R est un **pas-se-haut** d'ordre 1, dont la fonction de transfert s'écrit

avec et où $\Leftrightarrow \left\{ \right.$

tel que $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \Rightarrow u_R(t) = U_R \cos(\omega t + \varphi_u)$ avec $\left\{ \right.$

FIGURE E7.17 – Gain $G(x)$ du RC sur RFIGURE E7.18 – Phase $\arg(H(x))$ du RC sur R**Exemple E7.3 : $u_R(t)$ du RC**FIGURE E7.19 – $u_R(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \ll \omega_c$ FIGURE E7.20 – $u_R(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \gg \omega_c$ **Propriété E7.4 : BP de RC sur R**

La bande passante du filtre RC sur R est

♥ Démonstration E7.4 : BP de RC sur R**III Résonance en tension, en élongation****Exemple E7.4 : Résonances**

Dans le cas des circuits d'ordre 1, on obtient un maximum d'amplitude pour $\omega = 0$ ou $\omega = +\infty$: on a un simple amortissement ou passage des fréquences. Dans des cas plus compliqués, on va voir apparaître un **maximum d'amplitude à une fréquence finie** : c'est ce qu'on appelle la résonance. Quelques exemples :

▶ Résonance de diapasons

▶ Effondrement du pont TACOMA

▶ Visualisations détaillées

Mais également la balançoire, les caisses de résonance des instruments de musique, les piscines à vagues...

Définition E7.3 : Résonance

Un oscillateur forcé présente une résonance si l'**amplitude de ses oscillations est maximale** pour une **fréquence de forçage finie et non nulle, proche de sa fréquence propre**.

La fréquence correspondante est appelée **fréquence de résonance** f_r (ou ω_r ou x_r).

Soit, pour une amplitude réelle $S(\omega)$,

Interprétation E7.1 : Résonance

Le forçage apporte périodiquement de l'énergie à l'oscillateur, et à la résonance elle est toujours apportée « au bon moment » pour augmenter l'amplitude des oscillations, jusqu'à ce que des phénomènes dissipatifs ou des non-linéarités viennent la limiter.

III/A Filtre RLC sur C : passe-bas d'ordre 2**Définition E7.4 : RLC série sur C en RSF**

On s'intéresse à la tension $u_C(t)$ d'un circuit RLC série, alimenté par un GBF tel que :

donc

et

FIGURE E7.21 – RLC série sur C en RSF.

♥ Démonstration E7.5 : Filtre RLC sur C**Prévision du comportement**

FIGURE E7.22 – RLC sur C en BF.

Ainsi $\Rightarrow \left\{ \right.$

FIGURE E7.23 – RLC sur C en HF.

Ainsi $\Rightarrow \left\{ \right.$

Fonction de transfert

On identifie :

FIGURE E7.24 – RLC sur C.

Module

Argument

Propriété E7.5 : Filtre RLC sur C

Le filtre RLC sur C est un **passe-bas** d'ordre 2, dont la fonction de transfert s'écrit

avec et où {

Ainsi {

⇔ {

♥ Démonstration E7.6 : Résonance en tension RLC sur C**Comportement à $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$**

Gain

Déphasage

Condition de résonance

On cherche le maximum de

$$G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Comme le numérateur est constant, cette fonction est maximale si le **dénominateur est minimal**. On cherche alors le minimum sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction :

Soit

$$x_r \neq 0 \Rightarrow$$

or

condition de résonance

Dans ce cas, on a donc :

Amplitude à la résonance

Propriété E7.6 : Résonance en tension RLC sur C

$\forall Q$: À ω_0 on trouve

$Q \leq 1/\sqrt{2}$: pas de résonance, l'amplitude est maximale pour

$Q > 1/\sqrt{2}$: La résonance existe, l'amplitude est maximale pour

$Q > 5$:

Important E7.2 : À retenir pour $\underline{U}_C$ RLC série

- ◇
- ◇
- ◇
- ◇

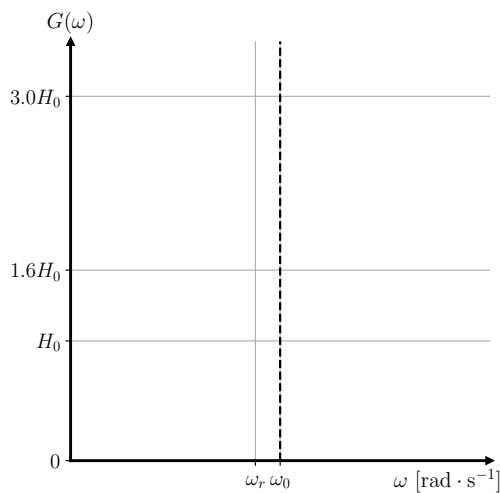


FIGURE E7.25 – $G(\omega)$ selon Q pour RLC sur C.

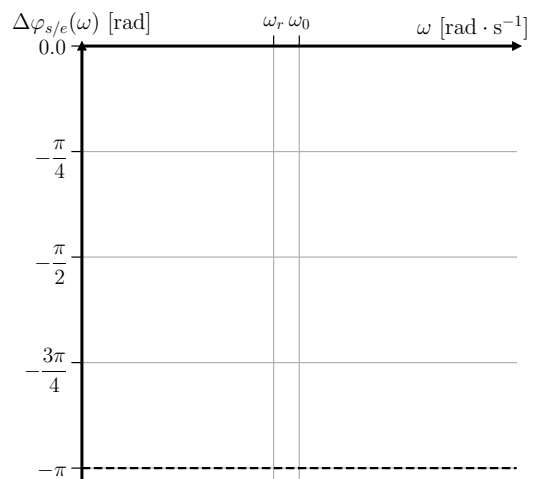


FIGURE E7.26 – $\Delta\varphi_{s/e}(\omega)$ selon Q pour RLC sur C.

III/B Exemple mécanique : résonance en élongation**♥ Définition E7.5 : Ressort amorti en RSF**

- ◇ **Système** : point $\{M\}$ masse m dans $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ terrestre supposé galiléen ;
- ◇ **Repère et repérage** : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, et
- ◇ **Longueur ressort** :
- ◇ **Bilan des forces** :

FIGURE E7.27 – Schéma du ressort en RSF.

Notation E7.1 : pulsations réduites

- ◇ Chaque filtre a une **pulsation de référence**, différente selon son ordre, mais la notion de pulsation réduite est la même :
- ◇ Il peut arriver très vite de confondre $x(t)$ la position et $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite, d'où la notation proposée de $u = \omega/\omega_0$, à ne pas confondre avec la tension. Soyez vigilant-es.

♥ Application E7.1 : Amplitude complexe $\underline{X}$

Avec le PFD :

Soit $x_h(t) = X \cos(\omega t + \varphi_x) \Leftrightarrow \underline{x}_h(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$:

■

Implication E7.1 : Résonance en élongation

On retrouve donc la **même réponse** que pour la tension de C dans le RLC série, et donc les **mêmes conditions et comportements** :

$\forall Q$: À ω_0 on trouve

$Q \leq 1/\sqrt{2}$: **pas de résonance**, l'amplitude est maximale pour

$Q > 1/\sqrt{2}$: La résonance existe, l'amplitude est maximale pour

$Q > 5$:

♥ Attention E7.1 : Maxima d'un rapport

Dans ces cas simples, on trouve une expression du gain de numérateur constant, donc on se limite à chercher le minimum du dénominateur.

Cependant, pour des expressions plus complexes, on peut chercher **on peut tomber sur un gain de numérateur dépendant de la pulsation**. Il faut alors **se ramener à un numérateur constant en divisant par le numérateur**.

IV Résonance en intensité, en vitesse

IV/A Filtre RLC sur R : passe-bande d'ordre 2

Définition E7.6 : RLC série sur R en RSF

Pour étudier l'intensité dans un circuit RLC série alimenté par un GBF, on s'intéresse à la tension $u_R(t)$:

donc

soit

avec

FIGURE E7.28 – RLC série sur R en RSF.

♥ Démonstration E7.7 : Filtre RLC sur R

Prévision du comportement

FIGURE E7.29 – RLC sur R en BF.

Ainsi $\Rightarrow \left\{ \right.$

FIGURE E7.30 – RLC sur C en HF.

Ainsi $\Rightarrow \left\{ \right.$

Fonction de transfert

FIGURE E7.31 – RLC sur R.

On identifie alors :

et

et

et

Module

Argument

Propriété E7.7 : Filtre RLC sur R

Le filtre RLC sur R est un **pas-se-bande** d'ordre 2, dont la fonction de transfert s'écrit

avec et où

Ainsi

♥ Démonstration E7.8 : Résonance en intensité RLC sur R

Comportement à $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$

Gain

Déphasage

Condition de résonance

On cherche le maximum de

$$G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

de numérateur constant

donc maximal si le **dénominateur est minimal**. On cherche alors le minimum sur $\mathbb{R}^{++}$ de la fonction :

or

Ainsi

Propriété E7.8 : Résonance en intensité RLC sur R

La résonance en intensité existe donc toujours, pour tout Q , et la pulsation de résonance est confondue avec la pulsation propre de l'oscillateur, soit :

Amplitude à la résonance

Phase à la résonance

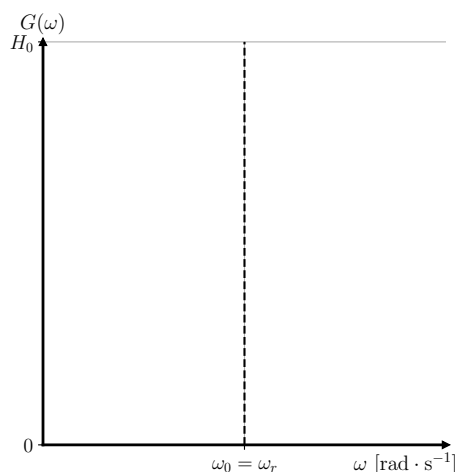
Important E7.3 : À retenir pour $\underline{I}$ RLC série

FIGURE E7.32 – $G(\omega)$ selon Q pour RLC sur R.

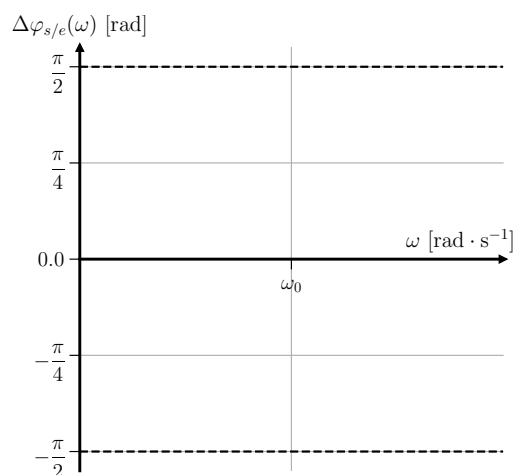


FIGURE E7.33 – $\Delta\varphi_{s/e}(\omega)$ selon Q pour RLC sur R.

- ◇
- ◇
- ◇
- ◇

♥ Démonstration E7.9 : Bande passante en intensité

On cherche les pulsations de coupure réduites telles que $G(x_k) = G_{\text{eff}} = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$:

On a alors **deux trinômes**, soit **quatre racines possibles**.

On ne garde que les racines positives, sachant que $\sqrt{1 + 4Q^2} > 1$:

puis on obtient la largeur de la bande passante en calculant la différence $|x_2 - x_1|$:

Propriété E7.9 : Bande passante en intensité

Plus le facteur de qualité est grand, plus la résonance est sélective. On relie la largeur de la bande passante à la pulsation propre et au facteur de qualité *via* la relation :

Ainsi, le **facteur de qualité** est égal à l'**acuité de la résonance** pour le filtre RLC série sur R.

IV/B Résonance en vitesse

♥ Application E7.2 : Amplitude complexe $\underline{V}$


Implication E7.2 : Résonance en vitesse

La résonance en vitesse existe donc toujours, pour tout Q , et la pulsation de résonance est confondue avec la pulsation propre de l'oscillateur, soit : $\Leftrightarrow$

Amplitude à la résonance
Phase à la résonance
Important E7.4 : Synthèse résonances

Grandeur	Tension/élongation	Intensité/vitesse
Existence		
Pulsation de résonance		
Largeur de résonance		
Aspects à ω_0		
Aspects à ω_r		
Courbes d'amplitude		
Courbes de phase		

Animations interactives

◇ RL ou RC

◇ RLC