Électrocinétique – chapitre 7

1er ordre et oscillateurs en RSF

Sommaire

Capacités exigibles

- ◯ Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale.
- ◯ Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.
- ◯ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- ◯ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale.
- ◯ Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

L'essentiel

Propriétés

Démonstrations

Définitions

Implications

Exemples

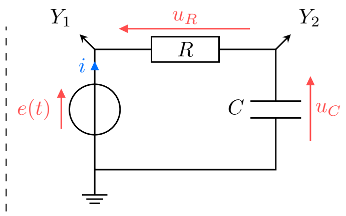
Outils

Points importants

I Introduction au filtrage

Exemple E7.1 : Rappels du TP07

Avant de savoir résoudre analytiquement l'équation différentielle sur u_C du circuit RC soumis à $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, on a étudié sa réponse à une tension créneau, succession d'échelons montants et descendants, puis à une tension sinusoïdale. On avait observé les réponses suivantes :



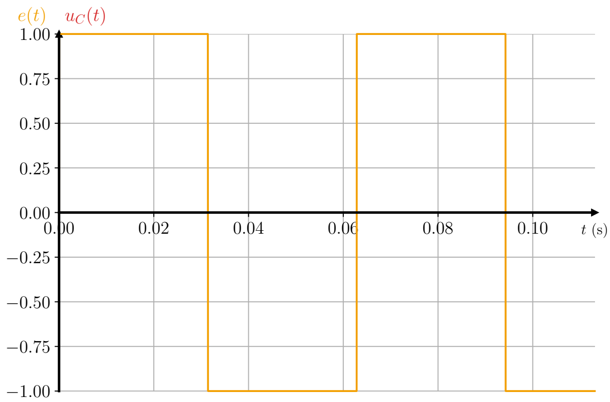


Figure E7.1 – $u_C(t)$ du RC créneau pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$

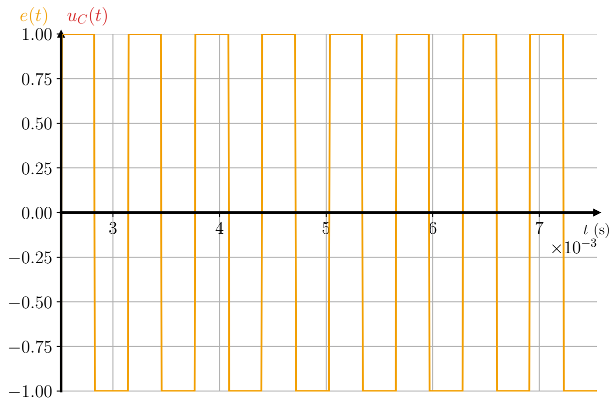


Figure E7.2 – $u_C(t)$ du RC créneau pour $\omega \gg \frac{1}{\tau}$

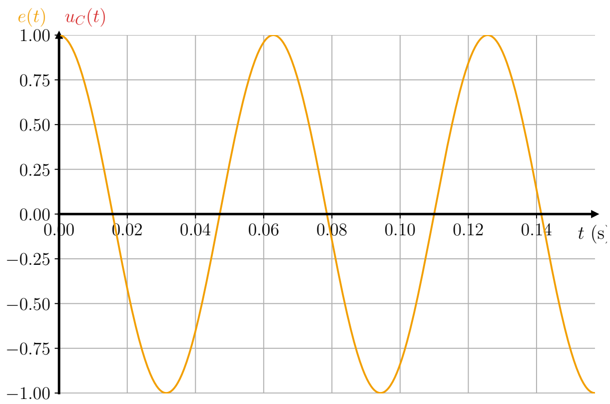


Figure E7.3 – $u_C(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$

Figure E7.4 – $u_C(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \gg \frac{1}{\tau}$

Observation E7.1 : Résultats observés

◇ **Tension créneau** :

▷ **Basses fréquences** :

▷ **Hautes fréquences** :

◇ **Tension sinusoïdale** :

▷ **Basses fréquences** :

▷ **Hautes fréquences** :

Important E7.1 : Analyse réponse de $u_C(t)$

On a bien $u_C(t)$ qui oscille à la **même pulsation** que $e(t)$, mais avec une **amplitude et une phase** qui **dépendent de la pulsation** ω.

Plus précisement, **dans le cas du circuit RC**, on trouve que les signaux **basses fréquences** ($\omega \ll \frac{1}{\tau}$) sont **intégralement transmis** ($u_C(t) \approx e(t)$), tandis que les signaux **hautes fréquences** ($\omega \gg \frac{1}{\tau}$) sont **intégralement coupés** ($u_C(t) \approx 0$) : on dit qu'il **filtre les fréquences**, et en l'occurrence que c'est un **filtre passe-bas**.

Définition E7.1 : Filtre et fonction de transfert

Définition et types

Système qui **traite un signal** sur un **critère fréquentiel**. On le représente par un **quadripôle** dans les schémas électrique, avec $e(t)$ l'entrée et $s(t)$ la sortie. On en distingue 3 types principaux :

- ◇
- ◇
- ◇

Figure E7.5 – Filtre.

Il est dit **linéaire** si la sortie est de même fréquence que l'entrée.

Fonction de transfert

Son action est de passer de $\underline{E}$ l'amplitude complexe d'un signal d'entrée à $\underline{S}$ celle d'un signal de sortie associé. Elle est caractérisée par sa **fonction de transfert** $\underline{H}(\omega)$:

$$\Leftrightarrow \left\{ \right. \qquad \Leftrightarrow \left\{ \right.$$

Gain

Le **gain** traduit l'effet du filtre sur l'**amplitude réelle** d'un signal ; on a

Unité

- ◇ $G(\omega) = 1 \Leftrightarrow S(\omega) = E$: composante de sortie **conservée** à cette fréquence.
- ◇ $G(\omega) > 1 \Leftrightarrow S(\omega) > E$: composante de sortie **amplifiée** à cette fréquence.
- ◇ $G(\omega) < 1 \Leftrightarrow S(\omega) < E$: composante de sortie **atténuée** à cette fréquence.

Exemple E7.2 : Filtre RC

Figure E7.6 – Filtre RC à vide

Figure E7.7 – Filtre RC sur micro

Outils E7.1 : Circuits en RSF

- ◇ On remplace $e(t)$, tous les $u(t)$ et $i(t)$ par leurs amplitudes complexes ;
- ◇ On remplace les dipôles par leurs impédances ;
- ◇ On simplifie le circuit avec des associations d'impédances (série ou parallèle) ;
  - ▷ **Attention** : Après une association en série, **la tension de la somme a changé** !
- ◇ On applique les ponts diviseurs de tension ou de courant pour exprimer la grandeur d'intérêt, éventuellement en cascade ;
- ◇ On se ramène dans le domaine réel en prenant le module et l'argument des amplitudes complexes obtenues.

II Filtres RC

II/A Filtre RC sur C : passe-bas ordre 1

Démonstration E7.1 : Filtre RC sur C

Prévision du comportement

Figure E7.8 – RC sur C en BF.

Ainsi $\Rightarrow \left\{ \right.$

Figure E7.9 – RC sur C en HF.

Ainsi $\Rightarrow \left\{ \right.$

Fonction de transfert

Figure E7.10 – RC sur C.

Module

Argument

Propriété E7.1 : Filtre RC sur C

Le filtre RC sur C est un **passe-bas** d'ordre 1, dont la fonction de transfert s'écrit

avec et où $\Leftrightarrow \left\{ \right.$

tel que $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \Rightarrow \boxed{u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi_u)}$ avec $\left\{ \right.$

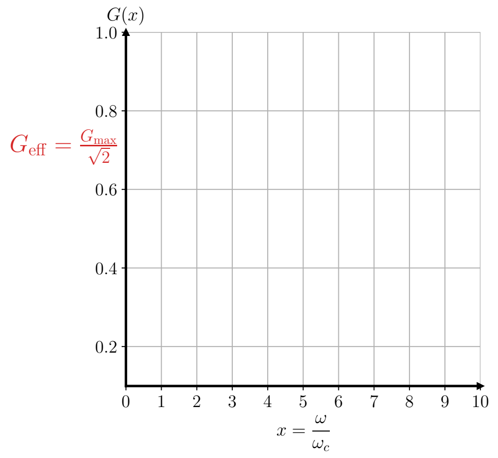


Figure E7.11 – Gain $G(x)$ du RC sur C

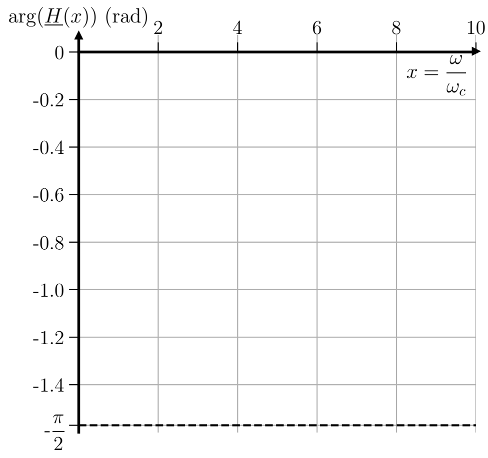


Figure E7.12 – Phase $\arg(\underline{H}(x))$ du RC sur C

Définition E7.2 : Bande passante

On appelle **bande passante** la **plage de fréquences** pour laquelle le gain est **supérieur au gain efficace** :

- ◇ ω_1 et ω_2 sont les **pulsations de coupures**, telles que
- ◇ Sa **largeur** est la **différence** entre ces valeurs :
- ◇ Son **acuité** représente sa **sélectivité** :

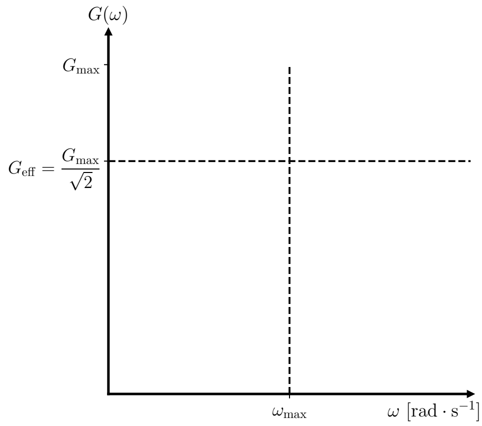


Figure E7.13 – Bande passante.

Propriété E7.2 : BP de RC sur C

La bande passante du filtre RC sur C est

Démonstration E7.2 : BP de RC sur C

II/B Filtre RC sur R : passe-haut ordre 1

Démonstration E7.3 : Filtre RC sur R

Prévision du comportement

Figure E7.14 – RC sur R en BF

Ainsi $\Rightarrow \Bigg\{$

Figure E7.15 – RC sur R en HF

Ainsi $\Rightarrow \Bigg\{$

Fonction de transfert

Figure E7.16 – RC sur R.

Module

Argument

Propriété E7.3 : Filtre RC sur R

Le filtre RC sur R est un **passe-haut** d'ordre 1, dont la fonction de transfert s'écrit

avec et où $\Leftrightarrow$ $\Bigg\{$

tel que $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \Rightarrow \boxed{u_R(t) = U_R \cos(\omega t + \varphi_u)}$ avec $\Bigg\{$

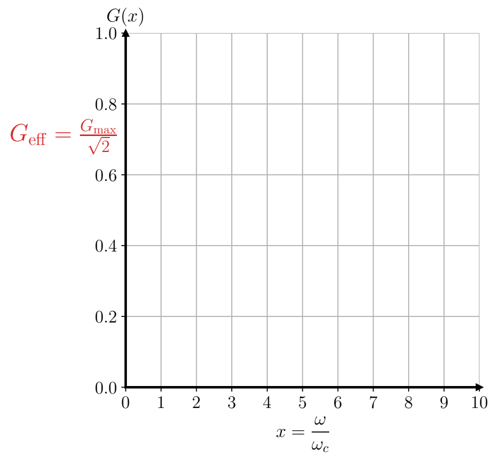


Figure E7.17 – Gain $G(x)$ du RC sur R

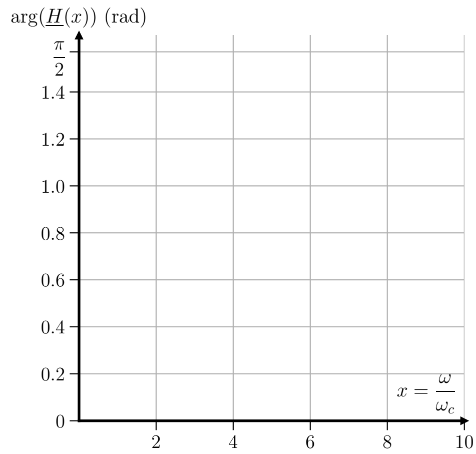


Figure E7.18 – Phase $\arg(\underline{H}(x))$ du RC sur R

Exemple E7.3 : $u_R(t)$ du RC

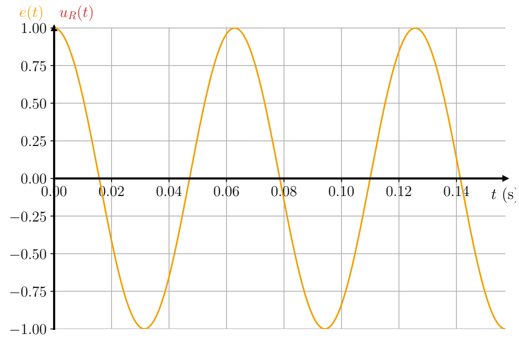


Figure E7.19 – $u_R(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \ll \omega_c$

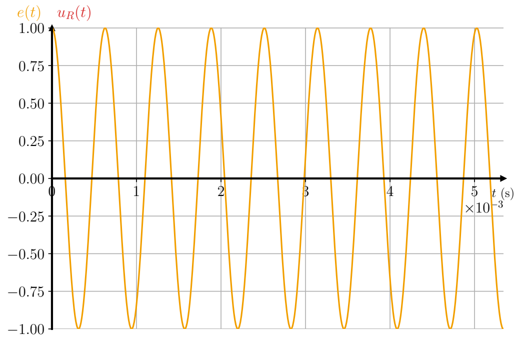


Figure E7.20 – $u_R(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \gg \omega_c$

Propriété E7.4 : BP de RC sur R

La bande passante du filtre RC sur R est

Démonstration E7.4 : BP de RC sur R

III Résonance en tension, en élongation

Exemple E7.4 : Résonances

Dans le cas des circuits d'ordre 1, on obtient un maximum d'amplitude pour $\omega = 0$ ou $\omega = +\infty$: on a un simple amortissement ou passage des fréquences. Dans des cas plus compliqués, on va voir apparaître un **maximum d'amplitude à une fréquence finie** : c'est ce qu'on appelle la résonance. Quelques exemples :

- Résonance de diapasons
- Effondrement du pont Tacoma
- Visualisations détaillées

Mais également la balançoire, les caisses de résonance des instruments de musique, les piscines à vagues...

Définition E7.3 : Résonance

Un oscillateur forcé présente une résonance si l'**amplitude de ses oscillations est maximale** pour une **fréquence de forçage finie et non nulle, proche de sa fréquence propre**.

La fréquence correspondante est appelée **fréquence de résonance** f_r (ou ω_r ou x_r).

Soit, pour une amplitude réelle $S(\omega)$,

Interprétation E7.1 : Résonance

Le forçage apporte périodiquement de l'énergie à l'oscillateur, et à la résonance elle est toujours apportée « au bon moment » pour augmenter l'amplitude des oscillations, jusqu'à ce que des phénomènes dissipatifs ou des non-linéarités viennent la limiter.

III/A Filtre RLC sur C : passe-bas d'ordre 2

Définition E7.4 : RLC série sur C en RSF

On s'intéresse à la tension $u_C(t)$ d'un circuit RLC série, alimenté par un GBF tel que :

donc et

Figure E7.21 – RLC série sur C en RSF.

Démonstration E7.5 : Filtre RLC sur C

Prévision du comportement

Figure E7.22 – RLC sur C en BF.

Ainsi $\Rightarrow \Big\{$

Figure E7.23 – RLC sur C en HF.

Ainsi $\Rightarrow \Big\{$

Fonction de transfert

On identifie :

Figure E7.24 – RLC sur C.

Module | **Argument**

Propriété E7.5 : Filtre RLC sur C

Le filtre RLC sur C est un **passe-bas** d'ordre 2, dont la fonction de transfert s'écrit

avec et où $\Bigg\{$

Ainsi $\Bigg\{$ $\Leftrightarrow$ $\Big\{$

Démonstration E7.6 : Résonance en tension RLC sur C

Comportement à $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$

Gain | **Déphasage**

Condition de résonance

On cherche le maximum de $G(x) = \dfrac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}$

Comme le numérateur est constant, cette fonction est maximale si le **dénominateur est minimal**. On cherche alors le minimum sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de la fonction :

Soit

$x_r \neq 0 \Rightarrow$

or condition de résonance

Dans ce cas, on a donc :

Amplitude à la résonance

Propriété E7.6 : Résonance en tension RLC sur C

$\forall$**Q** : À ω_0 on trouve

$\mathbf{Q} \leq \mathbf{1}/\sqrt{\mathbf{2}}$: **pas de résonance**, l'amplitude est maximale pour

$\mathbf{Q} > \mathbf{1}/\sqrt{\mathbf{2}}$: La résonance existe, l'amplitude est maximale pour

$\mathbf{Q} > \mathbf{5}$:

Important E7.2 : À retenir pour $\underline{U}_C$ RLC série

◇

◇

◇

◇

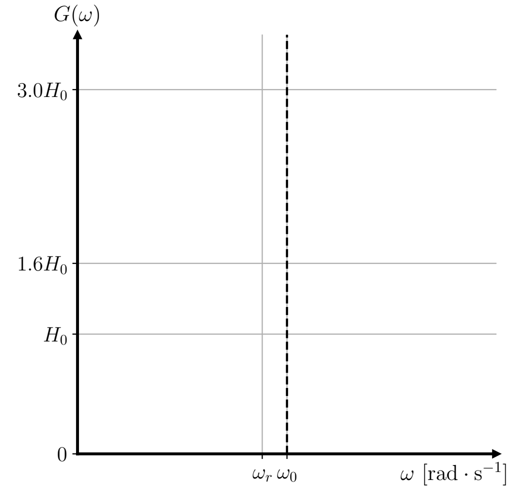


Figure E7.25 – $G(\omega)$ selon Q pour RLC sur C.

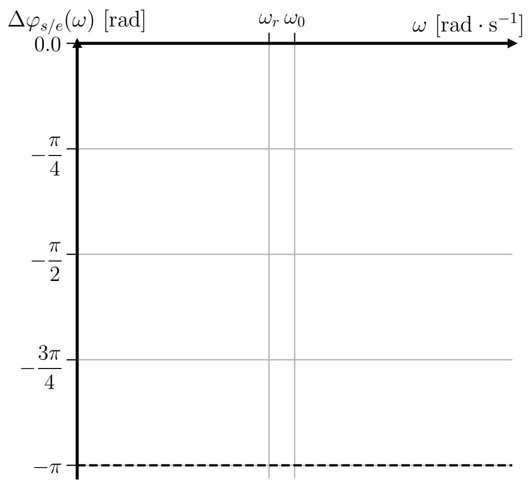


Figure E7.26 – $\Delta\varphi_{s/e}(\omega)$ selon Q pour RLC sur C.

III/B Exemple mécanique : résonance en élongation

Définition E7.5 : Ressort amorti en RSF

◇ **Système** : point {M} masse m dans $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ terrestre supposé galiléen ;

◇ **Repère et repérage** : $(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$, et

◇ **Longueur ressort** :

◇ **Bilan des forces :**

Figure E7.27 – Schéma du ressort en RSF.

Notation E7.1 : pulsations réduites

◇ Chaque filtre a une **pulsation de référence**, différente selon son ordre, mais la notion de pulsation réduite est la même :

◇ Il peut arriver très vite de confondre $x(t)$ la position et $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite, d'où la notation proposée de $u = \omega/\omega_0$, à ne pas confondre avec la tension. Soyez vigilant-es.

Démonstration E7.7 : Amplitude complexe $\underline{X}$

Avec le PFD :

Soit $x_h(t) = X\cos(\omega t + \varphi_x) \Leftrightarrow \underline{x_h}(t) = \underline{X}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$:

■

Implication E7.1 : Résonance en élongation

On retrouve donc la **même réponse** que pour la tension de C dans le RLC série, et donc les **mêmes conditions et comportements** :

$\forall$**Q** : À ω_0 on trouve

Q $\leq$ **1/$\sqrt{2}$** : **pas de résonance**, l'amplitude est maximale pour

Q $>$ **1/$\sqrt{2}$** : La résonance existe, l'amplitude est maximale pour

Q $>$ **5** :

IV Résonance en intensité, en vitesse

IV/A Filtre RLC sur R : passe-bande d'ordre 2

Définition E7.6 : RLC série sur R en RSF

Démonstration E7.8 : Filtre RLC sur R

Propriété E7.7 : Filtre RLC sur R

Démonstration E7.9 : Résonance en intensité RLC sur R

Propriété E7.8 : Résonance en intensité RLC sur R

Démonstration E7.10 : Bande passante en intensité

Propriété E7.9 : Bande passante en intensité

Important E7.3 : À retenir pour $\underline{I}$ RLC série

- ◇
- ◇
- ◇
- ◇

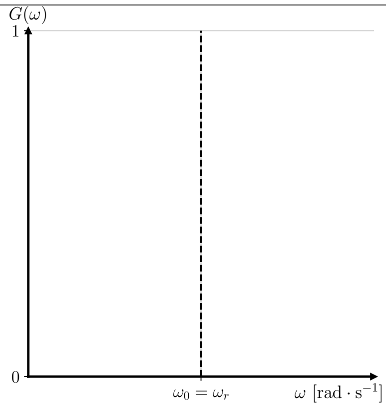
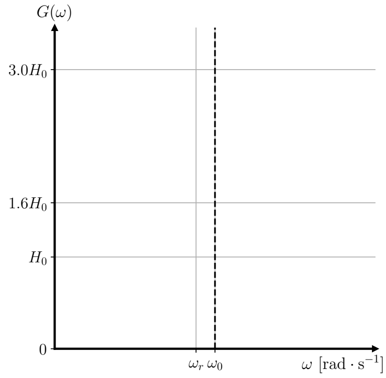
⋮

IV/B Résonance en vitesse

Démonstration E7.11 : Amplitude complexe $\underline{V}$

Implication E7.2 : Résonance en vitesse

Important E7.4 : Synthèse résonances

Grandeur	Intensité/vitesse	Tension/élongation
Existence		
Pulsation de résonance		
Largeur de résonance		
Aspects à ω_r		
Aspects à ω_0		
Courbes d'amplitude		
Courbes de phase