Électrocinétique – chapitre 7

1^{er} ordre et oscillateurs en RSF

Sommaire

Capacités exigibles

- ◯ Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale.
- ◯ Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.
- ◯ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- ◯ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale.
- ◯ Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

L'essentiel

Propriétés

Démonstrations

Applications

Définitions

Implications

Exemples

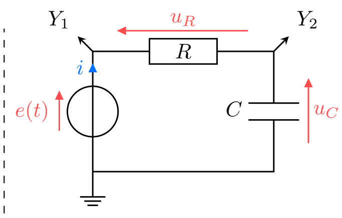
Outils

Points importants

I Introduction au filtrage

Exemple E7.1 : Rappels du TP07

Avant de savoir résoudre analytiquement l'équation différentielle sur u_C du circuit RC soumis à $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, on a étudié sa réponse à une tension créneau, succession d'échelons montants et descendants, puis à une tension sinusoïdale. On avait observé les réponses suivantes :



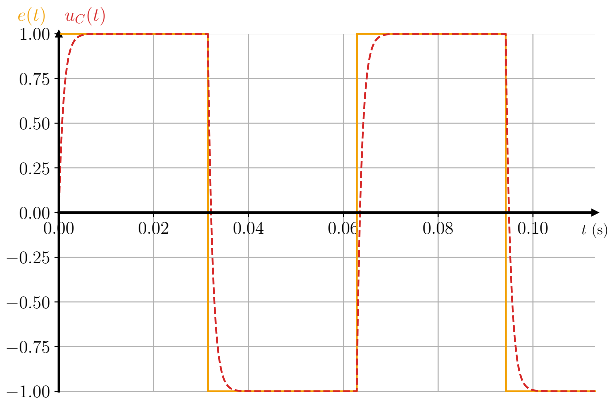


Figure E7.1 – $u_C(t)$ du RC créneau pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$

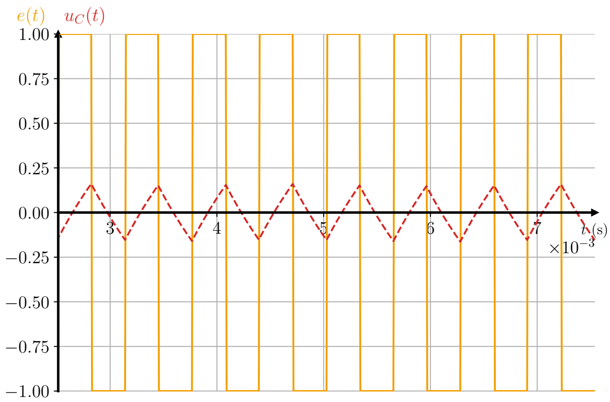


Figure E7.2 – $u_C(t)$ du RC créneau pour $\omega \gg \frac{1}{\tau}$

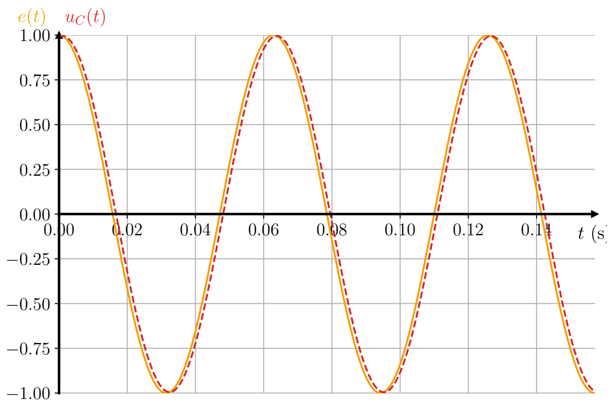


Figure E7.3 – $u_C(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$

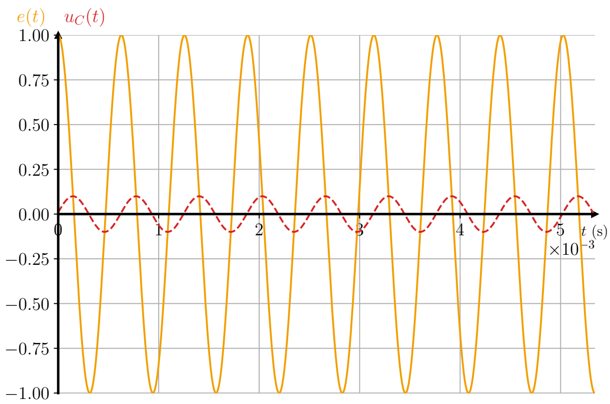


Figure E7.4 – $u_C(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \gg \frac{1}{\tau}$

Observation E7.1 : Résultats observés

◇ **Tension créneau** :

▷ **Basses fréquences** : $u_C(t)$ arrive à **suivre le rythme de la tension d'entrée** ;

▷ **Hautes fréquences** : $u_C(t)$ est **quasi nulle**, le condensateur n'a pas le temps de se charger ou se décharger.

◇ **Tension sinusoïdale** :

▷ **Basses fréquences** : $u_C(t)$ **suit la tension d'entrée en amplitude** mais avec un **léger déphasage**.

▷ **Hautes fréquences** : $u_C(t)$ est de **faible amplitude** et **fortement déphasée** par rapport à l'entrée.

Voir aussi cette animation.

Important E7.1 : Analyse réponse de $u_C(t)$

On a bien $u_C(t)$ qui oscille à la **même pulsation** que $e(t)$, mais avec une **amplitude et une phase** qui **dépendent de la pulsation** ω.

Plus précisement, **dans le cas du circuit RC**, on trouve que les signaux **basses fréquences** ($\omega \ll \frac{1}{\tau}$) sont **intégralement transmis** ($u_C(t) \approx e(t)$), tandis que les signaux **hautes fréquences** ($\omega \gg \frac{1}{\tau}$) sont **intégralement coupés** ($u_C(t) \approx 0$) : on dit qu'il **filtre les fréquences**, et en l'occurrence que c'est un **filtre passe-bas**.

Définition E7.1 : Filtre et fonction de transfert

Définition et types

Système qui **traite un signal** sur un **critère fréquentiel**. On le représente par un **quadripôle** dans les schémas électrique, avec $e(t)$ l'entrée et $s(t)$ la sortie. On en distingue 3 types principaux :

- **Passe-bas** : ne laisse passer que les basses fréquences ;
- **Passe-haut** : ne laisse passer que les hautes fréquences ;
- **Passe-bande** : ne laisse passer qu'une bande de fréquences.

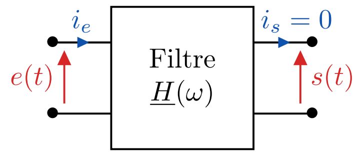


Figure E7.5 – Filtre.

Il est dit **linéaire** si la sortie est de même fréquence que l'entrée.

Fonction de transfert

Son action est de passer de $\underline{E}$ l'amplitude complexe d'un signal d'entrée à $\underline{S}$ celle d'un signal de sortie associé. Elle est caractérisée par sa **fonction de transfert** $\underline{H}(\omega)$:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{S}(\omega)}{\underline{E}} \Leftrightarrow \underline{S}(\omega) = \underline{H}(\omega)\underline{E}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\underline{S}(\omega)| &= |\underline{H}(\omega)\underline{E}| \\ \arg(\underline{S}(\omega)) &= \arg(\underline{H}(\omega)\underline{E}) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} S(\omega) &= E \cdot |\underline{H}(\omega)| = E \cdot G(\omega) \\ \varphi_s(\omega) &= \varphi_e + \arg(\underline{H}(\omega)) = \varphi_e + \Delta\varphi_{s/e}(\omega) \end{cases}$$

Gain

Le **gain** traduit l'effet du filtre sur l'**amplitude réelle** d'un signal ; on a

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{S(\omega)}{E}}$$

Unité **aucune**

- $G(\omega) = 1 \Leftrightarrow S(\omega) = E$: composante de sortie **conservée** à cette fréquence.
- $G(\omega) > 1 \Leftrightarrow S(\omega) > E$: composante de sortie **amplifiée** à cette fréquence.
- $G(\omega) < 1 \Leftrightarrow S(\omega) < E$: composante de sortie **atténuée** à cette fréquence.

Exemple E7.2 : Filtre RC

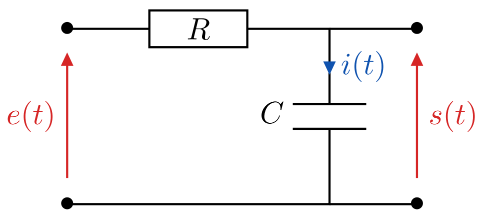


Figure E7.6 – Filtre RC à vide

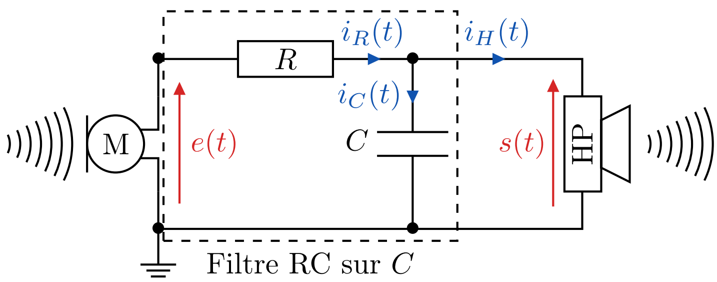


Figure E7.7 – Filtre RC sur micro

Outils E7.1 : Circuits en RSF

- On remplace $e(t)$, tous les $u(t)$ et $i(t)$ par leurs amplitudes complexes ;
- On remplace les dipôles par leurs impédances ;
- On simplifie le circuit avec des associations d'impédances (série ou parallèle) ;
  - **Attention** : Après une association en série, **la tension de la somme a changé** !
- On applique les ponts diviseurs de tension ou de courant pour exprimer la grandeur d'intérêt, éventuellement en cascade ;
- On se ramène dans le domaine réel en prenant le module et l'argument des amplitudes complexes obtenues.

II Filtres RC

II/A Filtre RC sur C : passe-bas ordre 1

Démonstration E7.1 : Filtre RC sur C

Prévision du comportement

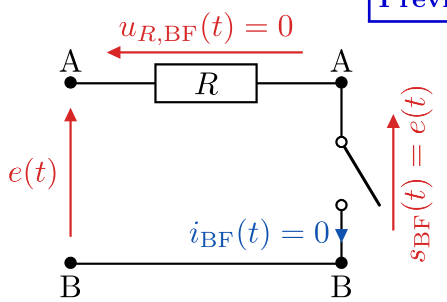


Figure E7.8 – RC sur C en BF.

Ainsi $\underline{H}(0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} G(0) & = 1 \\ \Delta\varphi_{s/e}(0) & = 0 \end{cases}$

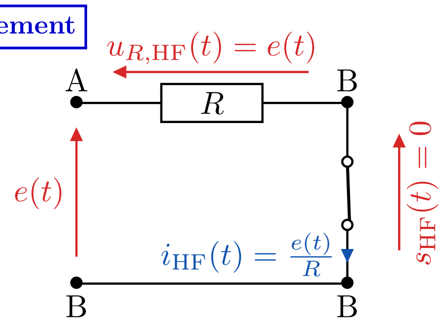


Figure E7.9 – RC sur C en HF.

Ainsi $\underline{H}(\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \Rightarrow \begin{cases} G(\omega) & \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \\ \Delta\varphi_{s/e}(\omega) & \xrightarrow[\omega\to\infty]{} ? \end{cases}$

Fonction de transfert

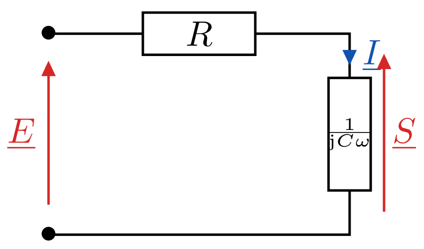


Figure E7.10 – RC sur C en $\mathbb{C}$.

$$\underline{S}(\omega) = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C}\underline{E}$$

$$\times \frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}_C}$$

$$\Leftrightarrow \underline{S}(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\underline{E}$$

$$\underline{H} = \underline{S}/\underline{E} \qquad \omega_c = 1/RC$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$x = \omega/\omega_c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}x}}$$

Module

$$G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{1}{|1 + \mathrm{j}x|} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \blacksquare$$

Argument

$$\arg(\underline{H}(x)) = -\arg\big(\underbrace{1}_{\mathrm{Re} \geq 0} + \mathrm{j}x\big) = -\arctan(x) \qquad \blacksquare$$

Propriété E7.1 : Filtre RC sur C

Le filtre RC sur C est un **passe-bas** d'ordre 1, dont la fonction de transfert s'écrit

$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}x}} \quad \text{avec} \quad H_0 = 1 \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{où} \quad \omega_c = \frac{1}{RC} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} G(x) & = \dfrac{H_0}{\sqrt{1 + x^2}} \\ \arg(\underline{H}(x)) = \Delta\varphi_{s/e} & = -\arctan(x) \end{cases}$$

tel que $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \Rightarrow \boxed{u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi_u)}$ avec $\begin{cases} U_C(x) = E_0 \cdot \dfrac{H_0}{\sqrt{1 + x^2}} \\ \varphi_u(x) = \varphi_e - \arctan(x) \end{cases}$

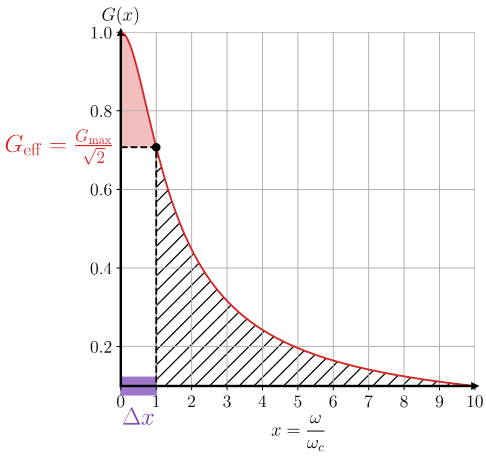


Figure E7.11 – Gain $G(x)$ du RC sur C

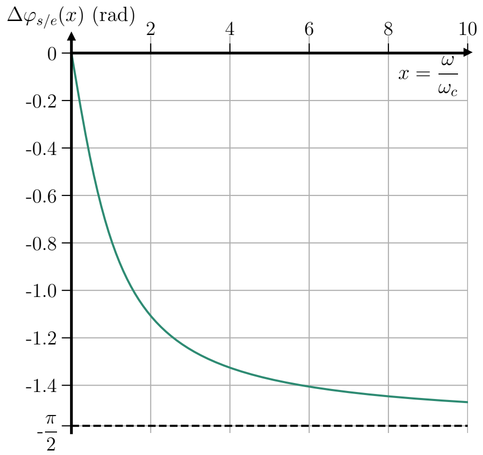


Figure E7.12 – Déphasage $\Delta\varphi_{s/e}(x)$ du RC sur C

Définition E7.2 : Bande passante

On appelle **bande passante** la **plage de fréquences** pour laquelle le gain est **supérieur au gain efficace** :

$$\text{bande passante} \triangleq [\omega_1 ; \omega_2] \ : \ G(\omega) \geq G_{\text{eff}} = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

◇ ω_1 et ω_2 sont les **pulsations de coupures**, telles que

$$G(\omega_{1,2}) = G_{\text{eff}}$$

◇ Sa **largeur** est la **différence** entre ces valeurs :

$$\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$$

◇ Son **acuité** représente sa **sélectivité** :

$$A_c = \frac{\omega_{\max}}{\Delta\omega}$$

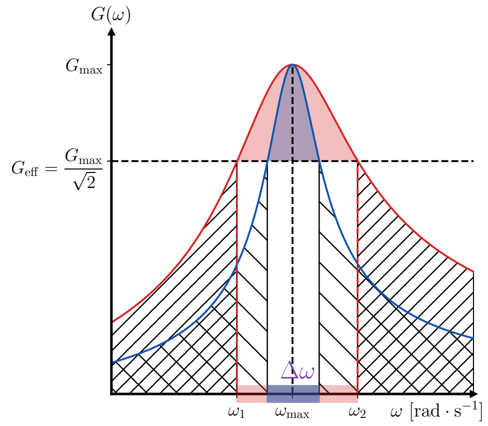


Figure E7.13 – Bande passante.

Propriété E7.2 : BP de RC sur C

La bande passante du filtre RC sur C est

$$[0,\omega_c] \Rightarrow \Delta\omega = \omega_c$$

Démonstration E7.2 : BP de RC sur C

$$G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}} \geq G_{\text{eff}} \Leftrightarrow \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \leq \omega_c}$$

■

II/B Filtre RC sur R : passe-haut ordre 1

Démonstration E7.3 : Filtre RC sur R

Prévision du comportement

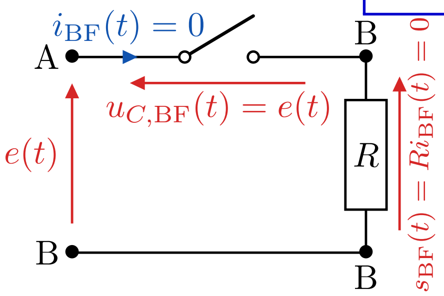


Figure E7.14 – RC sur R en BF

Ainsi $\quad \underline{H}(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} G(0) & = 0 \\ \Delta\varphi_{s/e}(0) & = \ ? \end{cases}$

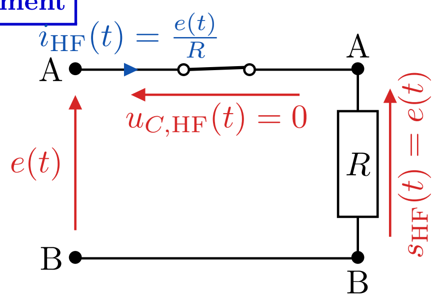


Figure E7.15 – RC sur R en HF

Ainsi $\quad \underline{H}(\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 1 \Rightarrow \begin{cases} G(\omega) & \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 1 \\ \Delta\varphi_{s/e}(\omega) & \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \end{cases}$

Fonction de transfert

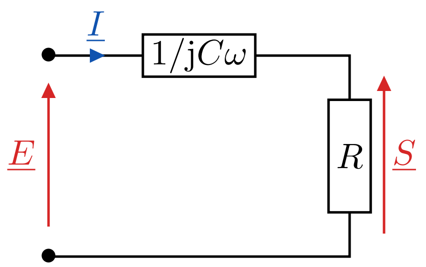


Figure E7.16 – RC sur R en $\mathbb{C}$.

$$\underline{S}(\omega) = \frac{R}{R + 1/\mathrm{j}C\omega}\underline{E}$$
$$\times \frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}_C}$$
$$\Leftrightarrow \underline{S}(\omega) = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}\underline{E}$$
$$\underline{H} = \underline{S}/\underline{E}, \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$
$$\Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega} = \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}$$
$$x = \frac{\omega}{\omega_c}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(x) = \frac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}}$$

Module

$$G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{|\mathrm{j}x|}{|1+\mathrm{j}x|} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

■

Argument

$$\arg(\underline{H}(x)) = \arg(\mathrm{j}x) - \arg(1+\mathrm{j}x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Propriété E7.3 : Filtre RC sur R

Le filtre RC sur R est un **passe-haut** d'ordre 1, dont la fonction de transfert s'écrit

$$\boxed{\underline{H}(x) = H_0 \frac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}} \quad \text{avec} \quad H_0 = 1 \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{où} \quad \omega_c = \frac{1}{RC} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} G(x) = H_0 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \Delta\varphi_{s/e}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \end{cases}$$

$$\text{tel que} \quad e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \Rightarrow \boxed{u_R(t) = U_R \cos(\omega t + \varphi_u)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_R(x) = E_0 \cdot H_0 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \varphi_u(x) = \varphi_e + \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \end{cases}$$

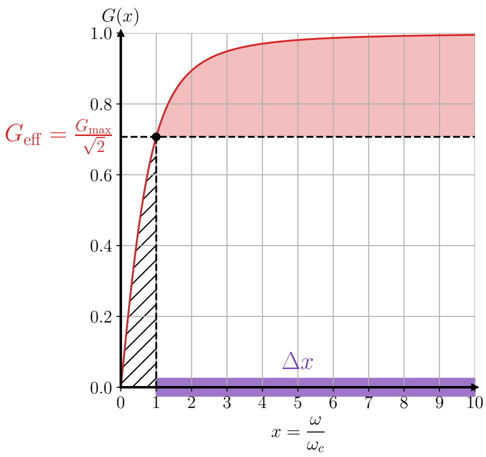


FIGURE E7.17 – Gain $G(x)$ du RC sur R

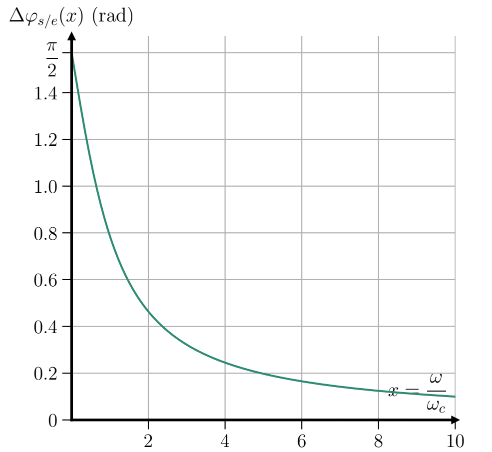


FIGURE E7.18 – Déphasage $\Delta\varphi_{s/e}(x)$ du RC sur R

Exemple E7.3 : $u_R(t)$ du RC

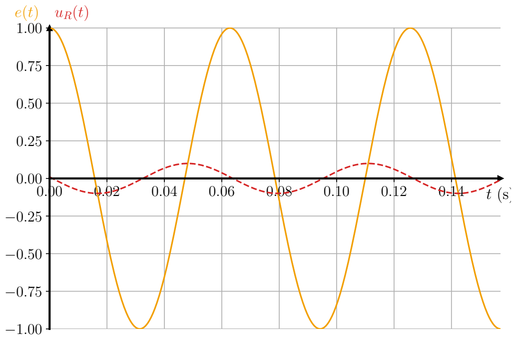


FIGURE E7.19 – $u_R(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \ll \omega_c$

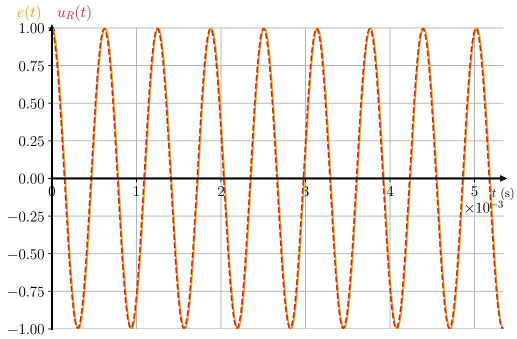


FIGURE E7.20 – $u_R(t)$ du RC sinusoïdal pour $\omega \gg \omega_c$

Propriété E7.4 : BP de RC sur R

La bande passante du filtre RC sur R est

$$[\omega_c, +\infty] \Rightarrow \Delta\omega = +\infty$$

Démonstration E7.4 : BP de RC sur R

$$G(x) = H_0 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq G_{\text{eff}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{2} \geq \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow 2x^2 \geq 1 + x^2 \Leftrightarrow \boxed{x \geq 1} \quad \blacksquare$$

III Résonance en tension, en élongation

Exemple E7.4 : Résonances

Dans le cas des circuits d'ordre 1, on obtient un maximum d'amplitude pour $\omega = 0$ ou $\omega = +\infty$: on a un simple amortissement ou passage des fréquences. Dans des cas plus compliqués, on va voir apparaître un **maximum d'amplitude à une fréquence finie** : c'est ce qu'on appelle la résonance. Quelques exemples :

- Résonance de diapasons
- Effondrement du pont TACOMA
- Visualisations détaillées
- Animation RLC
- Animation ressort

Définition E7.3 : Résonance

Un oscillateur forcé présente une résonance si l'**amplitude de ses oscillations est maximale** pour une **fréquence de forçage finie et non nulle, proche de sa fréquence propre**.

La fréquence correspondante est appelée **fréquence de résonance** f_r (ou ω_r ou x_r).

Soit, pour une amplitude réelle $S(\omega)$,

$$\exists\text{résonance} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\exists \omega_r \neq (0, +\infty) \ : \ S(\omega_r) = S_{\max}}$$

Interprétation E7.1 : Résonance

Le forçage apporte périodiquement de l'énergie à l'oscillateur, et à la résonance elle est toujours apportée « au bon moment » pour augmenter l'amplitude des oscillations, jusqu'à ce que des phénomènes dissipatifs ou des non-linéarités viennent la limiter.

III/A Filtre RLC sur C : passe-bas d'ordre 2

Définition E7.4 : RLC série sur C en RSF

On s'intéresse à la tension $u_C(t)$ d'un circuit RLC série, alimenté par un GBF tel que :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \quad \text{donc} \quad u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

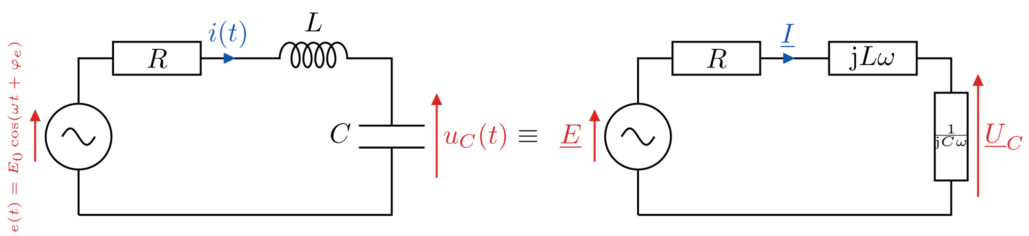


Figure E7.21 – RLC série sur C en RSF.

Démonstration E7.5 : Filtre RLC sur C

Prévision du comportement

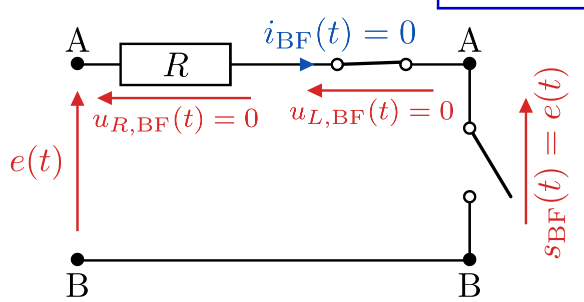


Figure E7.22 – RLC sur C en BF.

Ainsi $\quad \underline{H}(0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} G(0) & = 1 \\ \Delta\varphi_{s/e}(0) & = 0 \end{cases}$

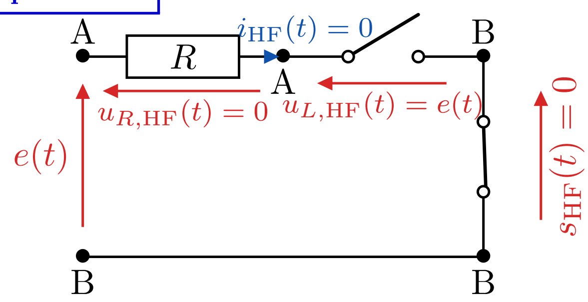


Figure E7.23 – RLC sur C en HF.

Ainsi $\quad \underline{H}(\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \Rightarrow \begin{cases} G(\omega) & \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \\ \Delta\varphi_{s/e}(\omega) & \xrightarrow[\omega\to\infty]{} ? \end{cases}$

Fonction de transfert

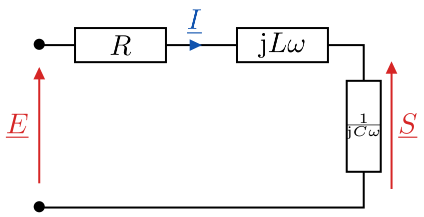


Figure E7.24 – RLC sur C en $\mathbb{C}$.

$$\underline{S}(\omega) = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}\underline{E} \times \frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}_C}$$

$$\Leftrightarrow \underline{S}(\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + \mathrm{j}RC\omega}\underline{E}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

On identifie :

$$LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$RC\omega = \frac{\omega}{Q\omega_0} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Module

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{1}{\left|1 - x^2 + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}\right|}$$

$$\Leftrightarrow G(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}} \quad \blacksquare$$

Argument

$$\arg(\underline{H}(x)) = -\arg\left(1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}\right) = \arg\left(\left(1 - x^2 - \mathrm{j}\frac{x}{Q}\right)\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \Delta\varphi_{s/e}(x) = \arg\left(\frac{x}{Q} + \mathrm{j}\,(1-x^2)\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta\varphi_{s/e}(x) = \arctan\left(\frac{Q\,(1-x^2)}{x}\right) - \frac{\pi}{2} \quad \blacksquare$$

Propriété E7.5 : Filtre RLC sur C

Le filtre RLC sur C est un **passe-bas** d'ordre 2, dont la fonction de transfert s'écrit

$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}}} \quad \text{avec} \quad H_0 = 1 \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

Ainsi
$$\begin{cases} G(x) = \dfrac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}} \\ \Delta\varphi_{s/e}(x) = \arctan\left(\dfrac{Q\,(1-x^2)}{x}\right) - \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_C(x) = E_0 G(x) \\ \varphi_u(x) = \varphi_e + \Delta\varphi_{s/e}(x) \end{cases}$$

♥ Démonstration E7.6 : Résonance en tension RLC sur C

Comportement à $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$

Gain

$$G(\omega_0) = \frac{H_0}{\sqrt{0 + \frac{1}{Q^2}}} \Leftrightarrow \boxed{G(\omega_0) = QH_0}$$

Déphasage

$$\Delta\varphi_{s/e}(\omega_0) = \arctan(0) - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi_{s/e}(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}}$$

Condition de résonance

On cherche le maximum de
$$G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}$$

Comme le numérateur est constant, cette fonction est maximale si le **dénominateur est minimal**. On cherche alors le minimum sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de la fonction :

$$f : x \to (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

Soit $$f'(x) = 2(-2x)(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} \quad \text{donc} \quad f'(x_r) = 0 \Leftrightarrow 2(2x_r)(1-x_r^2) = \frac{2x_r}{Q^2}$$

$x_r \neq 0 \Rightarrow$ $$2(1-x_r^2) = \frac{1}{Q^2} \Leftrightarrow \boxed{1 - x_r^2 = \frac{1}{2Q^2}} \Leftrightarrow x_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

or $$x_r^2 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}}$$ condition de résonance

Dans ce cas, on a donc : $$\boxed{x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1} \Leftrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0}$$

Amplitude à la résonance

$$f(x_r) = \frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x_r) = \frac{1}{Q^2}\left(1 + \frac{1}{4Q^2} - \frac{1}{2Q^2}\right) = \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$$

$$G(x_r) = \frac{H_0}{\sqrt{f(x_r)}}$$

$$\Leftrightarrow G(x_r) = \frac{QH_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}} \quad \blacksquare$$

Propriété E7.6 : Résonance en tension RLC sur C

$\forall$**Q** : À ω_0 on trouve $\boxed{G(\omega_0) = QH_0}$ et $\boxed{\Delta\varphi_{s/e}(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}}$

$\mathbf{Q \leq 1/\sqrt{2}}$: **pas de résonance**, l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega_{\max} = 0} \quad \text{où} \quad \begin{cases} G(0) &= H_0 \\ \Delta\varphi_{s/e}(0) &= 0 \end{cases}$$

$\mathbf{Q > 1/\sqrt{2}}$: La résonance existe, l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0} \quad \text{où} \quad \boxed{G(\omega_r) = \frac{QH_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > H_0}$$

$\mathbf{Q > 5}$: $\boxed{\omega_r \approx \omega_0}$ où $\boxed{G(\omega_r) \approx QH_0}$ et $\boxed{\Delta\varphi_{s/e}(\omega_r) \approx -\frac{\pi}{2}}$

Important E7.2 : À retenir pour $\underline{U_C}$ RLC série

◇ Il y **a une condition** pour avoir résonance, $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, elle s'obtient par étude de fonction ;

◇ La **pulsation de résonance** est **différente de la pulsation propre** mais s'en rapproche avec $Q \nearrow$;

◇ L'**amplitude maximale dépend de** Q : $Q \nearrow \Rightarrow U_{\max} \nearrow$;

◇ La **phase à la résonance** est **quelconque** ; la **phase à la pulsation propre** est $\varphi_u(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$;

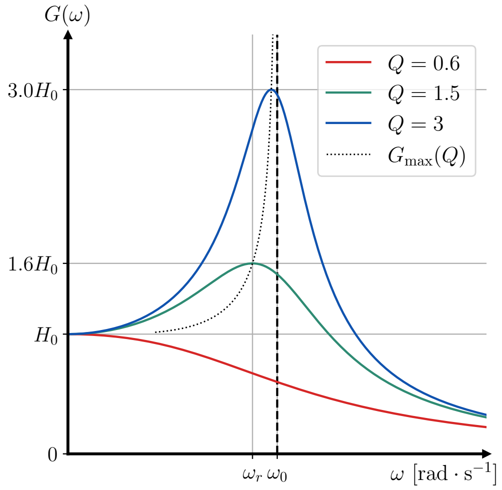


Figure E7.25 – $G(\omega)$ selon Q pour RLC sur C.

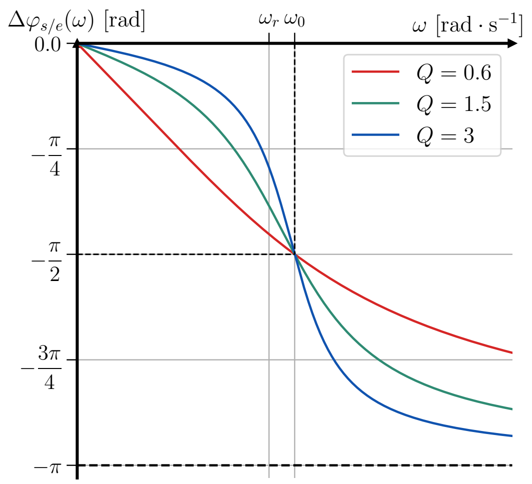


Figure E7.26 – $\Delta\varphi_{s/e}(\omega)$ selon Q pour RLC sur C.

III/B Exemple mécanique : résonance en élongation

Définition E7.5 : Ressort amorti en RSF

◇ **Système** : point {M} masse m dans $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ terrestre supposé galiléen ;

◇ **Repère et repérage** : $(O,\vec{u_x},\vec{u_y})$, et $\overrightarrow{\text{OM}}(t) = x(t)\vec{u_x}$; $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u_x}$; $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u_x}$

◇ **Longueur ressort** : $\ell(t) = x_{\text{M}}(t) - x_{\text{O}} = x(t)$

◇ **Bilan des forces** :

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$
Réaction	$\vec{R} = R\vec{u_y}$
Hooke	$\vec{F}_r = -k(x(t) - \ell_0)\vec{u_x}$
Frotte$^{\text{t}}$	$\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}(t) = -\alpha\dot{x}(t)\vec{u_x}$
Forçage	$\vec{f}_e = F_0\cos(\omega t)\vec{u_x}$

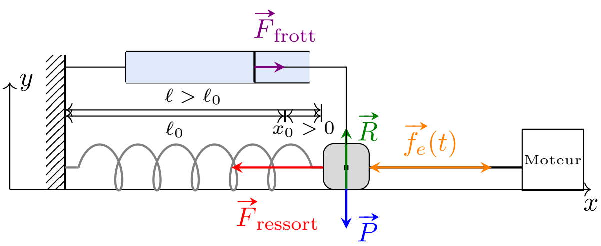


Figure E7.27 – Schéma du ressort en RSF.

Notation E7.1 : pulsations réduites

◇ Chaque filtre a une **pulsation de référence**, différente selon son ordre, mais la notion reste la même :

$$x = \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}} \quad \text{avec} \quad \omega_{\text{ref}} = \omega_c \text{ ordre 1} \quad \text{ou} \quad \omega_{\text{ref}} = \omega_0 \text{ ordre 2}$$

◇ Il peut arriver très vite de confondre $x(t)$ la position et $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite, d'où la notation proposée de $u = \omega/\omega_0$, à ne pas confondre avec la tension. Soyez vigilant-es.

Application E7.1 : Amplitude complexe $\underline{X}$

Avec le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{ressort}} + \vec{F}_{\text{frott}} + \vec{f}_e$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{x}(t)\vec{u_x} = (-k(x(t) - \ell_0) - \alpha\dot{x}(t) + F_0\cos(\omega t))\,\vec{u_x} + (R - mg)\,\vec{u_y}$$

La projection sur $\vec{u_y}$ montre que $\vec{R} = -\vec{P}$. Sur l'axe $\vec{u_x}$, on trouve

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = k\ell_0 + F_0\cos(\omega t) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}_h(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}_h(t) + {\omega_0}^2 x_h(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$\text{avec} \quad \boxed{x_h(t) = x(t) - \ell_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

Soit $x_h(t) = X\cos(\omega t + \varphi_x) \Leftrightarrow \underline{x_h}(t) = \underline{X}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$:

$$\left((\mathrm{j}\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q}\mathrm{j}\omega + {\omega_0}^2\right)\underline{X} = \frac{F_0}{m}$$

$\div{\omega_0}^2$

$$\Leftrightarrow \left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0 Q} + 1\right)\underline{X} = \frac{F_0}{{\omega_0}^2 m}$$

$m{\omega_0}^2 = k$
$u = \omega/\omega_0$

$$\Leftrightarrow \underline{X}(u) = \frac{F_0/k}{1 - u^2 + \mathrm{j}\frac{u}{Q}}$$

$\underline{H} = \dfrac{\underline{X}}{F_0/k}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(u) = \frac{H_0}{1 - u^2 + \mathrm{j}\frac{u}{Q}}}$$

■

Implication E7.1 : Résonance en élongation

On retrouve donc la **même réponse** que pour la tension de C dans le RLC série, et donc les **mêmes conditions et comportements**, cf. Propriété 7.6.

Attention E7.1 : Maxima d'un rapport

Dans ces cas simples, on trouve une expression du gain de numérateur constant, donc on se limite à chercher le minimum du dénominateur. Pour des expressions plus complexes, il faut **se ramener à un numérateur constant en divisant par le numérateur**.

IV Résonance en intensité, en vitesse

IV/A Filtre RLC sur R : passe-bande d'ordre 2

Définition E7.6 : RLC série sur R en RSF

Pour étudier l'intensité dans un circuit RLC série alimenté par un GBF, on s'intéresse à la tension $u_R(t)$:

$$e(t) = E_0\cos(\omega t + \varphi_e) \quad \text{donc} \quad u_R(t) = U_R\cos(\omega t + \varphi) = Ri(t) \quad \text{soit} \quad i(t) = I\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad I = \frac{U_R}{R}$$

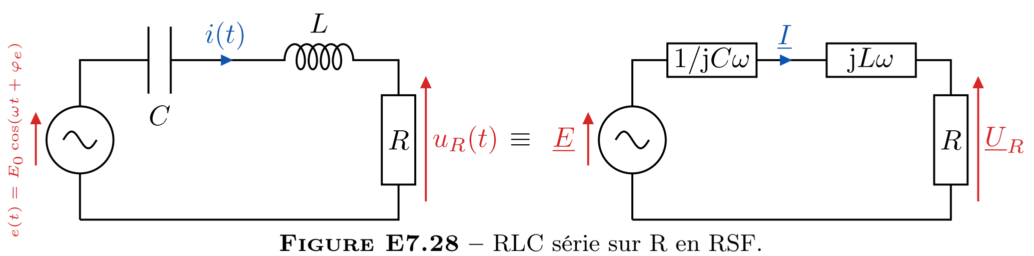


Figure E7.28 – RLC série sur R en RSF.

♥ Démonstration E7.7 : Filtre RLC sur R

Prévision du comportement

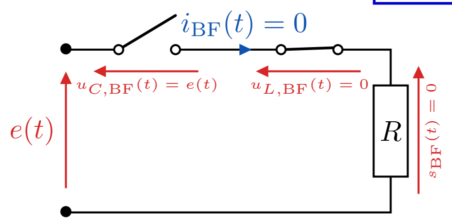


Figure E7.29 – RLC sur R en BF.

Ainsi $\quad \underline{H}(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} G(0) & = 0 \\ \Delta\varphi_{s/e}(0) & = \, ? \end{cases}$

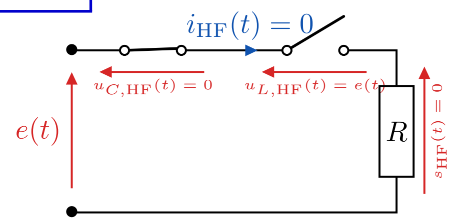


Figure E7.30 – RLC sur R en HF.

Ainsi $\quad \underline{H}(\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \Rightarrow \begin{cases} G(\omega) & \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \\ \Delta\varphi_{s/e}(\omega) & \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \, ? \end{cases}$

Fonction de transfert

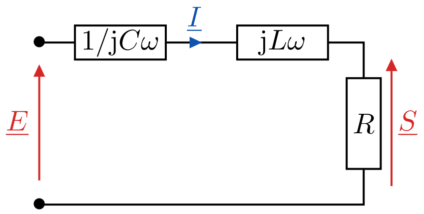


Figure E7.31 – RLC sur R en $\mathbb{C}$.

$$\underline{S}(\omega) = \frac{R}{R + \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}\underline{E} \times \frac{1/R}{1/R}$$

$\frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}$

$$\Leftrightarrow \underline{S}(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega - \mathrm{j}\frac{1}{RC\omega}}\underline{E}$$

$\underline{H} = \underline{S}/\underline{E}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

On identifie alors : $\quad \dfrac{L}{R} = \dfrac{Q}{\omega_0} \quad$ et $\quad \dfrac{1}{RC} = Q\omega_0$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{L}{R}} = \frac{Q\omega_0}{\frac{Q}{\omega_0}} \Leftrightarrow {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \frac{L}{R} \times \frac{1}{RC} = Q^2 \Leftrightarrow Q^2 = \frac{1}{R^2}\frac{L}{C}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Module

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{1}{\left|1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right|}$$

$$\Leftrightarrow G(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

■

Argument

$$\arg(\underline{H}(x)) = -\arg(\underbrace{1}_{\mathrm{Re}>0} + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi_{s/e}(x) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)}$$

■

Propriété E7.7 : Filtre RLC sur R

Le filtre RLC sur R est un **passe-bande** d'ordre 2, dont la fonction de transfert s'écrit

$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad H_0 = 1 \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \omega_0 & = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q & = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} G(x) & = \dfrac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \\ \Delta\varphi_{s/e}(x) & = -\arctan\left(Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I(x) & = \dfrac{E_0}{R}G(x) \\ \varphi(x) & = \varphi_e + \Delta\varphi_{s/e}(x) \end{cases}$$

♥ Démonstration E7.8 : Résonance en intensité RLC sur R

Comportement à $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$

Gain

$$G(\omega_0) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2(1-1)^2}} \Leftrightarrow \boxed{G(\omega_0) = H_0}$$

Déphasage

$$\Delta\varphi_{s/e}(\omega_0) = -\arctan(Q(1-1)) \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi_{s/e}(\omega_0) = 0}$$

Condition de résonance

On cherche le maximum de $$G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$ de numérateur constant

donc maximal si le **dénominateur est minimal**. On cherche alors le minimum sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de la fonction :

$$f : x \rightarrow 1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \quad \text{or} \quad \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \geq 0 \quad \text{donc} \quad x_r - \frac{1}{x_r} = 0 \Leftrightarrow x_r = \frac{1}{x_r}$$

Ainsi $\boxed{x_r = 1} \Leftrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0}$

Propriété E7.8 : Résonance en intensité RLC sur R

La résonance en intensité existe donc toujours, pour tout Q, et la pulsation de résonance est confondue avec la pulsation propre de l'oscillateur, soit : $\boxed{\omega_r = \omega_0} \Leftrightarrow \boxed{x_r = 1}$

Amplitude à la résonance

$$\boxed{I(x_r) = I_{\max} = \frac{E_0}{R}}$$

Phase à la résonance

$$\boxed{\varphi_i(x_r) = 0}$$

Important E7.3 : À retenir pour $\underline{I}$ RLC série

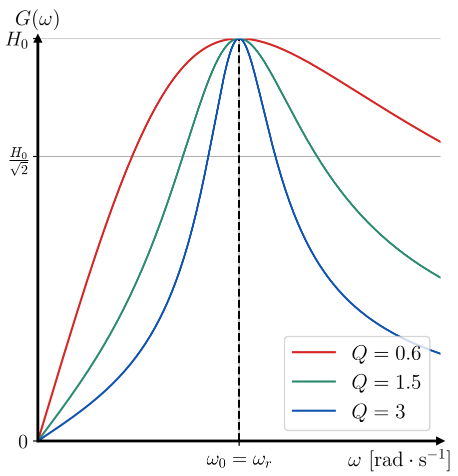


Figure E7.32 – $G(\omega)$ selon Q pour RLC sur R.

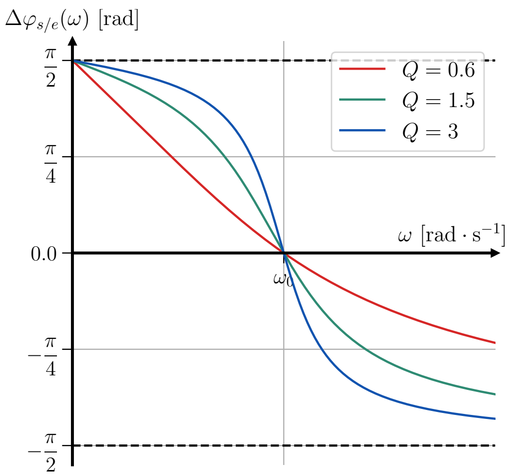


Figure E7.33 – $\Delta\varphi_{s/e}(\omega)$ selon Q pour RLC sur R.

- Il n'y a **aucune condition** pour avoir résonance : celle-ci existe peu importe le facteur de qualité ;
- La **pulsation de résonance** est **égale à la pulsation propre** ;
- L'**amplitude maximale** ne **dépend pas de** Q ;
- La **phase à la résonance** est **nulle**.

Démonstration E7.9 : Bande passante en intensité

On cherche les pulsations de coupure réduites telles que $G(x_k) = G_{\text{eff}} = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$:

$$G(x_k) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

On remplace

$$\Leftrightarrow \frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x_k-\frac{1}{x_k}\right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

On isole

$$\Leftrightarrow \boxed{Q^2\left(x_k-\frac{1}{x_k}\right)^2 = 1}$$

$$\sqrt{\cdot} \Leftrightarrow Q\left(x_k - \frac{1}{x_k}\right) = \pm 1$$

$\times x_k$

$$\Leftrightarrow Q{x_k}^2 - Q = \pm x_k$$

$-\pm = \mp$

$$\Leftrightarrow Q{x_k}^2 \mp x_k - Q = 0$$

On a alors **deux trinômes**, soit **quatre racines possibles**.

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow \Delta = 1+4Q^2\\ &\Rightarrow x_{k,\pm,\pm} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}\end{aligned}\right) \text{Solutions}$$

On ne garde que les racines positives, sachant que $\boxed{\sqrt{1+4Q^2} > 1}$:

$$x_1 = x_{k,-,+} = \frac{1}{2Q}\left(-1+\sqrt{1+4Q^2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = x_{k,+,+} = \frac{1}{2Q}\left(1+\sqrt{1+4Q^2}\right)$$

puis on obtient la largeur de la bande passante en calculant la différence $|x_2 - x_1|$:

$$x_2 - x_1 = \frac{1+\cancel{\sqrt{1+4Q^2}} - \left(-1+\cancel{\sqrt{1+4Q^2}}\right)}{2Q} \Leftrightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

■

Propriété E7.9 : Bande passante en intensité

Plus le facteur de qualité est grand, plus la résonance est sélective. On relie la largeur de la bande passante à la pulsation propre et au facteur de qualité *via* la relation :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = A_c$$

Ainsi, le **facteur de qualité** est égal à l'**acuité de la résonance** pour le filtre RLC série sur R.

IV/B Résonance en vitesse

Application E7.2 : Amplitude complexe $\underline{V}$

$$v(t) = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_t \Leftrightarrow \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{X}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V} = \frac{F_0}{k}\frac{\mathrm{j}\omega}{1-u^2+\mathrm{j}\frac{u}{Q}}$$

$\times\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}}$, $\omega = u\omega_0$

$$\Leftrightarrow \underline{V} = -\frac{F_0}{k}\frac{u\omega_0}{\mathrm{j}-\mathrm{j}u^2-\frac{u}{Q}}$$

Factorise par u

$$\Leftrightarrow \underline{V} = \frac{F_0}{k}\cdot\frac{\cancel{u}}{\cancel{u}}\cdot\frac{\omega_0}{\frac{1}{Q}-\mathrm{j}\left(\frac{1}{u}-1\right)}$$

$$\times\frac{Q}{Q} \Leftrightarrow \underline{V} = \frac{F_0}{k}\cdot\frac{Q\omega_0}{1+\mathrm{j}Q\left(u-\frac{1}{u}\right)}$$

$\frac{Q\omega_0}{k} = \frac{1}{\alpha}$

$$\Leftrightarrow \underline{V}(u) = \frac{F_0/\alpha}{1+\mathrm{j}Q\left(u-\dfrac{1}{u}\right)}$$

$\underline{H} = \frac{\underline{V}}{F_0/\alpha}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(u) = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}Q\left(u-\dfrac{1}{u}\right)}}$$

■

Implication E7.2 : Résonance en vitesse

La résonance en vitesse existe donc toujours, pour tout Q, et la pulsation de résonance est confondue avec la pulsation propre de l'oscillateur, soit : $\boxed{\omega_r = \omega_0} \Leftrightarrow \boxed{u_r = 1}$

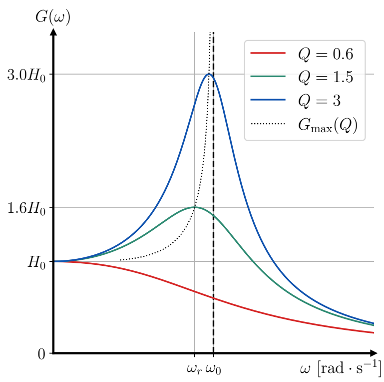
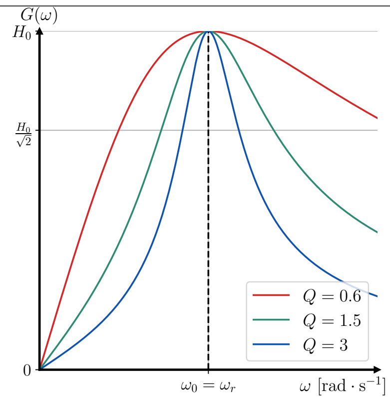
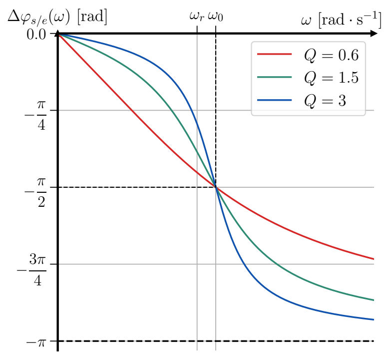
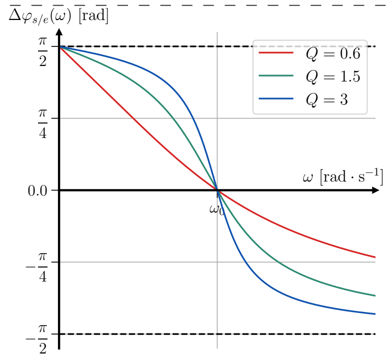
Amplitude à la résonance

$$\boxed{V(x_r) = V_{\max} = \frac{F_0}{\alpha}}$$

Phase à la résonance

$$\boxed{\varphi(x_r) = 0}$$

Important E7.4 : Synthèse résonances

<table>
<tr><th>Grandeur</th><th>Tension/élongation</th><th>Intensité/vitesse</th></tr>
<tr><td>Existence</td><td>$Q > 1/\sqrt{2}$</td><td>Toujours</td></tr>
<tr><td>Pulsation de résonance</td><td>$\omega_r \lesssim \omega_0$</td><td>$\omega_0$</td></tr>
<tr><td>Largeur de résonance</td><td>$\Delta\omega \approx \dfrac{\omega_0}{Q}$</td><td>$\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$</td></tr>
<tr><td>Aspects à ω_0</td><td>$G(\omega_0) = QH_0$
$\Delta\varphi_{s/e}(\omega_0) = -\dfrac{\pi}{2}$</td><td>$G(\omega_0) = G_{\max} = H_0$
$\Delta\varphi_{s/e}(\omega_0) = 0$</td></tr>
<tr><td>Aspects à ω_r</td><td>$G(\omega_r) = G_{\max}$
$\Delta\varphi_{s/e}(\omega_r)$ quelconque</td><td>Idem, $\omega_r = \omega_0$</td></tr>
<tr><td>Courbes d'amplitude</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Courbes de phase</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>