Électrocinétique – chapitre 6

Correction du TD d'application

I Notation complexe

Écrire, sous forme complexe, les équations différentielles suivantes :

1

$$\tau \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_t + u(t) = E_0 \sin(\omega t)$$

Réponse

Pour passer aux formes complexes, il faut s'assurer que **les grandeurs soient toutes exprimées en cosinus**, puisque c'est bien le cosinus la partie réelle d'une exponentielle complexe. Or, $\sin\theta = \cos(\pi/2-\theta) = \cos(\theta-\pi/2)$, donc on a :

$$\begin{aligned}
&\tau \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_t + u(t) = E_0\cos(\omega t - \pi/2)\\
\Leftrightarrow\ &\tau \left.\frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t}\right|_t + \underline{u}(t) = E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\
\Leftrightarrow\ &(1+\mathrm{j}\omega\tau)\underline{u}(t) = E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\underline{u}(t) = \frac{E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}}{1+\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}
\end{aligned}$$

grâce au fait qu'en complexes, dériver revient à multiplier par $\mathrm{j}\omega$.

◇

2

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F_0\cos(\omega t)$$

Réponse

Ici, rien de particulier : on passe en complexes, puis on dérive en multipliant par $\mathrm{j}\omega$.

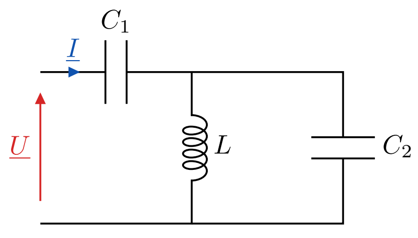
$$\begin{aligned}
&\underline{\ddot{x}}(t) + 2\lambda\underline{\dot{x}}(t) + \omega_0^2\underline{x}(t) = F_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\
\Leftrightarrow\ &(\mathrm{j}\omega)^2\underline{x}(t) + 2\lambda\mathrm{j}\omega\underline{x}(t) + {\omega_0}^2\underline{x}(t) = F_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\underline{x}(t) = \frac{F_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + 2\lambda\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}
\end{aligned}$$

◇

II Impédance équivalente

Déterminer l'impédance complexe équivalente de chacun des dipôles ci-dessous en RSF.

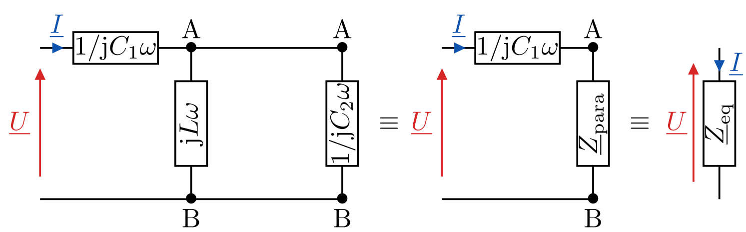
1



Réponse

On commence par convertir le circuit avec les impédances complexes :

- $\underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega}$;
- $\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega$;
- $\underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{\mathrm{j}C_2\omega}$.



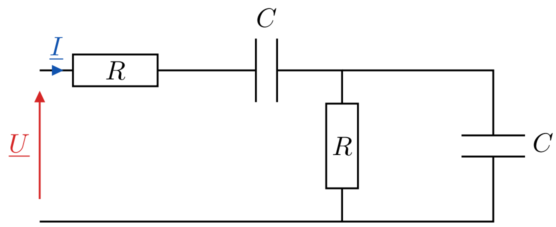
On peut ensuite déterminer l'impédance équivalente à l'association en parallèle de L et C_2. Avec les admittances, on a

$$\underline{Y}_{\text{para}} = \underline{Y}_L + \underline{Y}_{C_2} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C_2\omega = \frac{1 - LC_2\omega_2}{\mathrm{j}L\omega}$$
$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{para}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{1-\omega^2 LC_2} \Rightarrow \underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_{C_1} + \underline{Z}_{\text{para}} \Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega} + \frac{\mathrm{j}L\omega}{1-\omega^2 LC_2}}$$

Il n'est ici pas nécessaire d'aller plus loin dans le calcul.

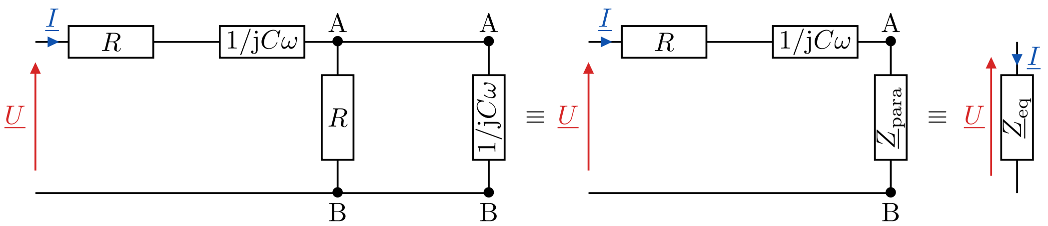
◇

2



Réponse

Ici, on utilise que $\underline{Z}_R = R$ et comme précédemment, on effectue l'association en parallèle des R et C de droite avant de faire l'association en série de R et C de gauche avec cette impédance équivalente :



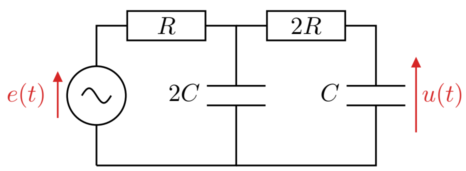
$$\underline{Y}_{\text{para}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega = \frac{1+\mathrm{j}RC\omega}{R} \Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{para}} = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}$$
$$\Rightarrow \underline{Z}_{\text{eq}} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}$$

◇

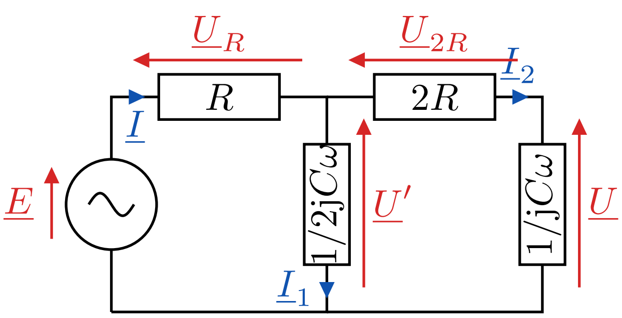
★☆☆ III Obtention d'une équation différentielle

1 En utilisant les lois de Kirchhoff (nœuds et mailles) en complexes, montrer que la tension $u(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$4\tau^2 \left.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\right|_t + 5\tau \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_t + u(t) = e(t) \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$



Réponse



On nomme les tensions et intensités dans le circuit, et on utilise la loi des nœuds et la loi d'Ohm généralisée :

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{R}\underline{U_R} = \frac{1}{\underline{Z}_{2C}}\underline{U'} + \frac{1}{\underline{Z}_C}\underline{U}$$
$$\Leftrightarrow \underline{U_R} = 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U'} + \mathrm{j}RC\omega\underline{U} \tag{E6.1}$$

On utilise ensuite la loi des mailles à droite et à gauche, donnant respectivement :

$$\underline{U'} = \underline{U} + 2R\underline{I_2} = \underline{U} + 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U} \quad \text{et} \quad \underline{U_R} = \underline{E} - \underline{U'} = \underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U}$$

On regroupe les équations dans (E6.1) et on introduit $\tau = RC$:

$$\underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} = \mathrm{j}\omega\tau\left(\underline{U} + 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U}\right) + \mathrm{j}\omega\tau\underline{U}$$
$$\Leftrightarrow \underline{E} = \underline{U} + 5\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} + 4\tau^2(\mathrm{j}\omega)^2\underline{U}$$

En identifiant les puissances de jω à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on a donc bien

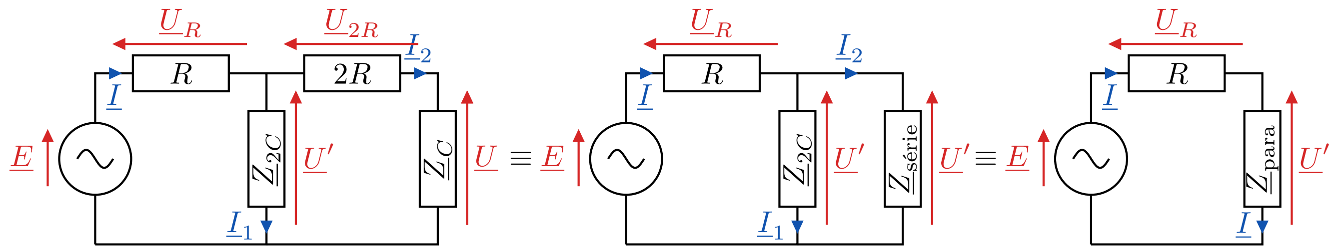
$$\boxed{e(t) = u(t) + 5\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 4\tau^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}}$$

---

2 Faire de même en passant par l'utilisation de ponts diviseurs de tensions. Attention aux conditions d'application de la formule du pont diviseur : faire les schémas équivalents nécessaires. On pensera à utiliser les admittances pour simplifier les calculs.

Réponse

On a la suite de schémas équivalents suivants :



On a alors : $$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_C}{2R + \underline{Z}_C}\underline{U}'\cdot\frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}_C} = \frac{1}{1 + 2R\underline{Y}_C}\underline{U}' \quad \text{avec} \quad \underline{Y}_C = \mathrm{j}C\omega$$

De plus, $$\underline{U}' = \frac{\underline{Z}_{\text{para}}}{R + \underline{Z}_{\text{para}}}\underline{E}\cdot\frac{\underline{Y}_{\text{para}}}{\underline{Y}_{\text{para}}} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{para}}}\underline{E}$$

Or, $$\underline{Y}_{\text{para}} = \underline{Y}_{2C} + \underline{Y}_{\text{série}} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_{\text{série}} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + 2R = \frac{1 + 2\mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}C\omega} \Leftrightarrow \underline{Y}_{\text{série}} = \frac{\mathrm{j}C\omega}{1 + 2\mathrm{j}RC\omega}$$

Ainsi $$\underline{Y}_{\text{para}} = 2\mathrm{j}C\omega + \frac{\mathrm{j}C\omega}{1 + 2\mathrm{j}RC\omega} \quad \text{donc} \quad \underline{U}' = \frac{1}{1 + 2\mathrm{j}RC\omega + \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + 2\mathrm{j}RC\omega}}\underline{E}$$

Dans $\underline{U}$: $$\underline{U} = \frac{1}{\underbrace{1 + 2\mathrm{j}RC\omega}} \cdot \frac{1}{\underbrace{1 + 2\mathrm{j}RC\omega} + \frac{\mathrm{j}RC\omega}{\underbrace{\cancel{1 + 2\mathrm{j}RC\omega}}}}\underline{E}$$

$(1+2\mathrm{j}RC\omega)^2$

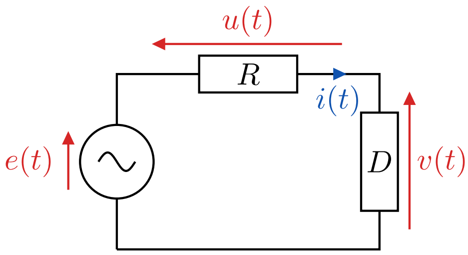
$$\Leftrightarrow \underline{U} = \frac{\underline{E}}{(1 + 2\mathrm{j}RC\omega)^2 + \mathrm{j}RC\omega} \Leftrightarrow \underline{U}\left(1 + 4(\mathrm{j}\omega)\tau + 4(\mathrm{j}\omega)^2\tau^2 + \mathrm{j}\omega\tau\right) = \underline{E}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{U} + 5(\mathrm{j}\omega)\tau\underline{U} + 4(\mathrm{j}\omega)^2\tau^2\underline{U} = \underline{E}}$$

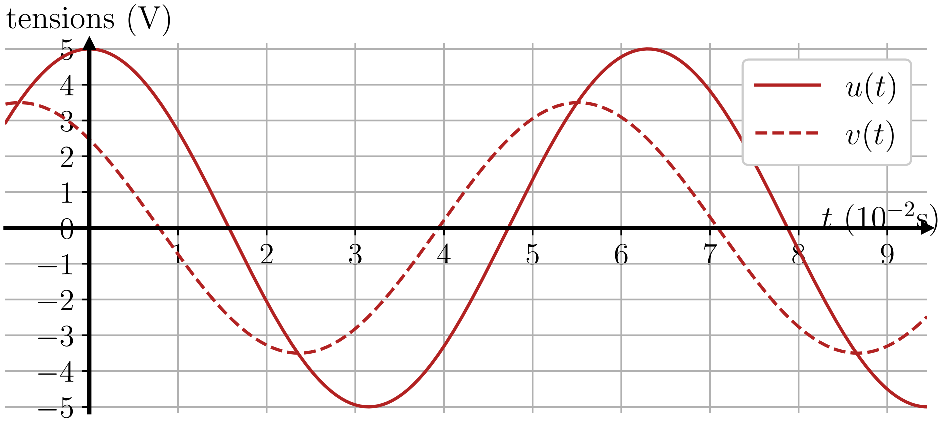
puis on identifie les puissances de jω à l'ordre des dérivées pour retrouver l'équation différentielle en réels.

Correction du TD d'entraînement

I Dipôle inconnu

Dans le montage ci-contre, le GBF délivre une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω, R est une résistance et D un dipôle inconnu. On note $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ les tensions aux bornes respectivement de R et D. On visualise à l'oscilloscope $v(t)$ et $u(t)$, et on obtient le graphe ci-dessous.





On utilise ces résultats graphiques pour déterminer les caractéristiques de D, sachant que $R = 100\,\Omega$.

1 Déterminer V_m, U_m ainsi que la pulsation ω des signaux utilisés.

Réponse

On trouve les amplitudes par lecture graphique des maxima :

$$\boxed{V_m = 3{,}5\,\mathrm{V}} \quad \text{et} \quad \boxed{U_m = 5\,\mathrm{V}}$$

On fait de même pour trouver la période $T = 6{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}$, et on en déduit la pulsation :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 100\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

2 La tension v est-elle en avance ou en retard sur la tension u ? En déduire le signe de ϕ. Déterminer la valeur de ϕ à partir du graphe.

Réponse

La tension v est en *avance* sur u, puisque quand v s'annule en descendant u s'annule aussi en descendant un peu plus tard que v. On peut aussi voir qu'à $t = 0$, u est à son maximum alors que v y est déjà passé et est en train de diminuer. Par définition du déphasage, on a donc $\boxed{\Delta\varphi_{v/u} > 0}$.

Or, $\Delta\varphi_{v/u} = \varphi_v - \varphi_u$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ donc $\varphi_u = 0$. On trouve donc $\boxed{\phi > 0}$.

On a deux manières de mesurer le déphasage :

◇ par définition, la pulsation est une vitesse angulaire, donc une durée se convertit en phase en la multipliant par ω. On peut donc déterminer le **déphasage** en mesurant le **retard temporel** entre les deux signaux **quand ils s'annulent avec la même pente**. Soit Δt cet écart : on mesure

$$\Delta t = 0{,}75 \times 10^{-2}\,\mathrm{s} \Leftrightarrow \Delta\varphi_{v/u} = \phi = \omega \Delta t \Leftrightarrow \boxed{\phi = 0{,}75\,\mathrm{rad} \approx \frac{\pi}{4}\mathrm{rad}}$$

◇ On peut également mesurer $v(0) = V_m \cos(\phi)$ et avoir

$$\cos(\phi) = \frac{v(0)}{V_m} \Leftrightarrow \boxed{\phi = \arccos\left(\frac{v(0)}{V_m}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v(0) = 2{,}5\,\mathrm{V} \\ V_m = 3{,}5\,\mathrm{V} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\phi \approx 0{,}77\,\mathrm{rad}}$$

◇

3 On note $\underline{Z} = X + \mathrm{j}Y$ l'impédance complexe du dipôle D.

a – Déterminer les valeurs de X et Y à partir des résultats précédents.

Réponse

On nous donne $v(t)$ donc $\underline{V} = V_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$, et on nous défini $\underline{Z}$ son impédance. Pour faire le lien entre les deux, on utilise la définition de l'impédance complexe pour un dipôle de tension $\underline{U}$ et traversé par un courant $\underline{I}$ *via* loi **loi d'Ohm généralisée** :

$$\boxed{\underline{V} = \underline{Z}\,\underline{I}}$$

Il faudrait donc pouvoir connaître $\underline{I}$. Heureusement, la loi d'Ohm généralisée fonction évidemment avec les résistances, et comme il n'y a qu'une seule intensité qui traverse la maille, on peut utiliser

$$\boxed{\underline{U} = R\underline{I} \Leftrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R}}$$

Ainsi,

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{et} \quad Z = |\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{V}}{\underline{I}}\right| = \left|R\frac{\underline{V}}{\underline{U}}\right|$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X^2 + Y^2 = R^2 \frac{{V_m}^2}{{U_m}^2}}$$

L'autre équation permettant de résoudre ce système est bien évidemment la phase (question 1 puis question 2) :

$$\tan(\arg(\underline{Z})) = \frac{Y}{X} \quad \text{et} \quad \tan(\arg(\underline{Z})) = \tan\left(\arg(\underline{V}) - \underbrace{\cancel{\arg(\underline{U})}}_{=0}\right) = \tan(\phi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y}{X} = \tan\phi \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{\pi}{4}\mathrm{rad} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{Y}{X} = 1}$$

On combine les deux équations pour trouver

$$Y = X \quad \text{et} \quad 2X^2 = R^2 \frac{{V_m}^2}{{U_m}^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V_m = 3{,}5\,\mathrm{V} \\ U_m = 5\,\mathrm{V} \\ R = 100\,\Omega \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{X = Y = 49\,\Omega}$$

◇

b – Par quel dipôle (condensateur, bobine, résistance) peut-on modéliser D ?

Réponse

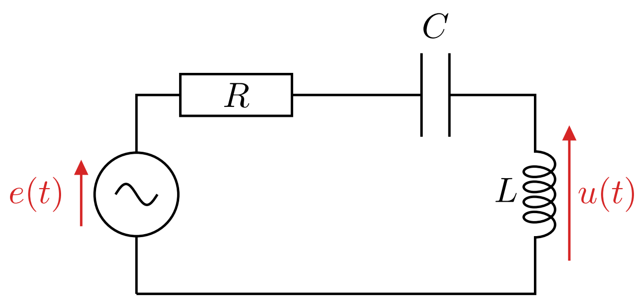
La partie réelle est non nulle, donc on a au moins une résistance de $49\,\Omega$, et la partie imaginaire est positive : ça ne peut qu'être une inductance car $1/\mathrm{j}C\omega = -\mathrm{j}/C\omega$ et la partie imaginaire est donc négative. C'est donc **l'association en série d'une résistance** r **et d'une inductance** L. On trouve la valeur de L en calculant $L\omega = Y = 49\,\Omega$.

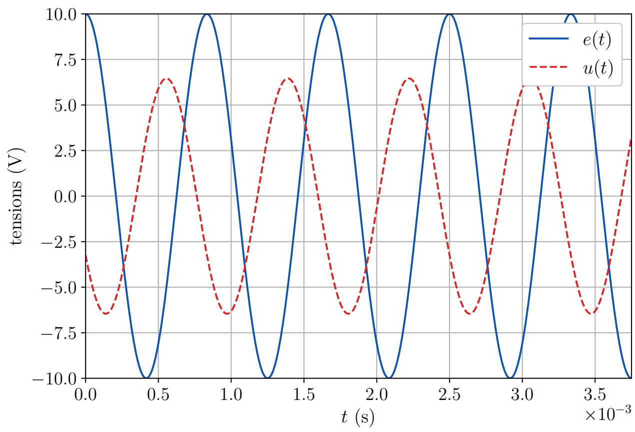
$$\boxed{r = 49\,\Omega} \quad \text{et} \quad \boxed{L = 0{,}49\,\mathrm{H}}$$

◇

★☆ II Exploitation d'un oscillogramme en RSF

On considère le circuit ci-dessous. On pose $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. La figure ci-dessous représente un oscillogramme réalisé à la fréquence $f = 1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{Hz}$, avec $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 0{,}10\,\mathrm{\mu F}$.





$\boxed{1}$ Déduire de cet oscillogramme les valeurs expérimentales de E_m, U_m et φ.

Réponse

On lit l'amplitude de $e(t)$ à son maximum pour avoir $\boxed{E_m = 10\,\mathrm{V}}$. On lit l'amplitude de $u(t)$ à son maximum pour avoir $\boxed{U_m = 6\,\mathrm{V}}$. Pour la phase **à l'origine des temps**, on regarde le signal à $t=0$: on lit $u(0) = U_m \cos(\varphi) = -3\,\mathrm{V}$, soit

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{u(0)}{U_m}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(0) = -3\,\mathrm{V} \\ U_m = 6\,\mathrm{V} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\varphi = \frac{2\pi}{3}\mathrm{rad}}$$

On prend en effet la **valeur positive** (et pas $-\frac{2\pi}{3}$), car sur l'oscillogramme, on voit que le signal $u(t)$ est **en avance** sur le signal $e(t)$: il **atteint son minimum avant** $e(t)$.

Avance ou retard

Attention aux points utilisés pour détecter l'avance et le retard : si vous regardez l'annulation, il faut regardez quand est-ce que les signaux s'annulent **avec la même pente**. Sinon, on a l'impression que $u(t)$ est en retard ici.

Une meilleure pratique est de regarder les maxima ou minima (et de prendre **les plus proches**).

◇

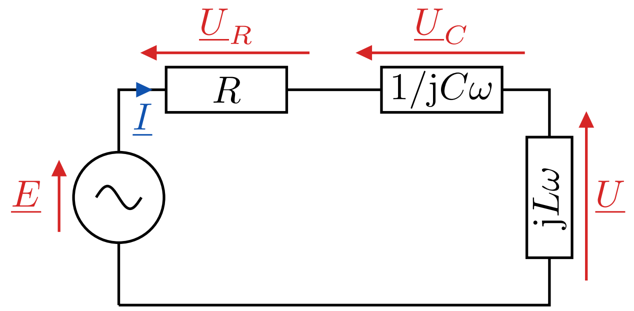
$\boxed{2}$ Exprimer $\underline{U}$ en fonction de E_m, R, L, ω et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, sous la forme

$$\underline{U} = \frac{1}{1 + \ldots} E_m$$

En déduire U_m et φ en fonction des composants du circuit et de la pulsation ω. Donner l'intervalle d'existence de φ et ses limites. Tracer alors l'allure des deux graphiques $U_m(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.

Réponse

On utilise un pont diviseur de tension pour avoir l'amplitude complexe :



$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L} E_m \qquad \cdot\frac{\underline{Y}_L}{\underline{Y}_L}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\frac{1}{\mathrm{j}L\omega}} E_m \qquad \text{On remplace}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \frac{1}{\mathrm{j}^2\omega^2 CL}} E_m \qquad \frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j} \text{ et } \mathrm{j}^2 = -1, \ {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{1}{1 - \frac{{\omega_0}^2}{\omega^2} - \mathrm{j}\frac{R}{L\omega}} E_m}$$

On peut en vérifier l'homogénéité en se souvenant des résultats des chapitres précédents :

$${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{donc} \quad \omega^2 LC \text{ adimensionné} \quad \text{et} \quad \frac{R}{L} = \tau^{-1} \quad \text{donc} \quad \frac{R}{L\omega} \text{ adimensionné}$$

D'une manière générale, on exprimera les résultats de la sorte, avec une fraction dont le numérateur est homogène à la quantité exprimée alors que le dénominateur est adimensionné.

On trouve l'amplitude réelle en prenant le module de cette expression :

$$U_m = |\underline{U}| \Leftrightarrow \boxed{U_m = \frac{E_m}{\sqrt{\left(1-\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}}$$

On trouve la phase en en prenant l'argument :

$$\varphi = \arg(\underline{U}) = \underbrace{\cancel{\arg(E_m)}}_{=0} - \arg\left(1-\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2} - \mathrm{j}\frac{R}{L\omega}\right) = \arg\left(1-\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2} + \mathrm{j}\frac{R}{L\omega}\right)$$

$-\arg(\underline{z}) = \arg(\underline{z}^*)$

Ici, il n'est pas évident de prendre l'arctangente de la tangente : la partie réelle de l'argument calculé n'est pas forcément positif (il l'est si $\omega^2 > {\omega_0}^2$). On échange donc partie réelle et imaginaire à l'aide de $\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}}$:

$$\begin{aligned}
& \varphi = \arg\left(\left(1-\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2} + \mathrm{j}\frac{R}{L\omega}\right)\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}}\right) && \text{On distribue } \tfrac{1}{\mathrm{j}} \text{, On sort } \arg(\mathrm{j}) \\
\Leftrightarrow\ & \varphi = \arg\left(\frac{R}{L\omega} + \frac{1}{\mathrm{j}}\left(1-\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\right)\right) + \arg(\mathrm{j}) && \tfrac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j},\ \arg(\mathrm{j}) = \tfrac{\pi}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \varphi = \arg\left(\underbrace{\frac{R}{L\omega}}_{\mathrm{Re}\geq 0} + \mathrm{j}\left(\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}-1\right)\right) + \frac{\pi}{2} && \arctan(\tan(\varphi)) = \varphi \text{ car partie réelle} > 0 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\left(\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}-1\right)\right) + \frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

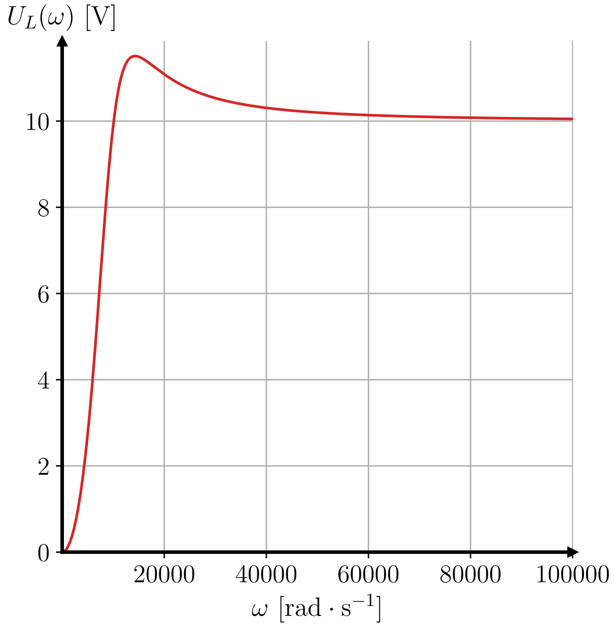
On détermine les valeurs limites :

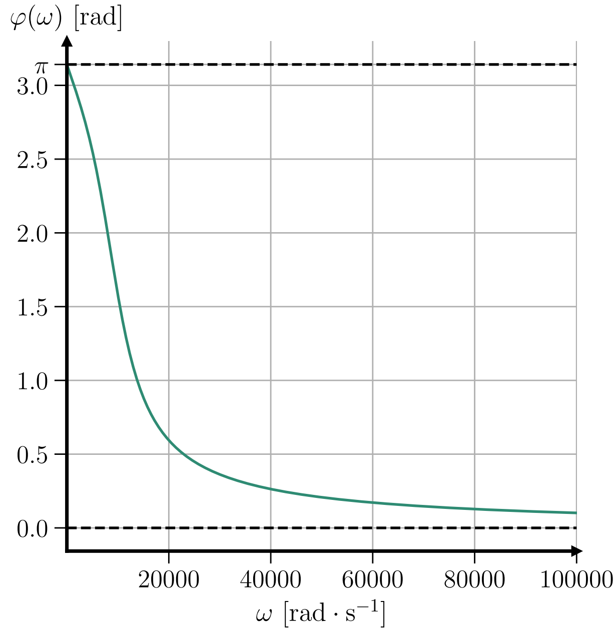
$\boxed{\omega \to 0}$

$$\varphi \underset{\omega\to 0}{\sim} \arctan\left(\frac{L{\omega_0}^2}{R\omega}\right) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\omega\to 0]{} \arctan(+\infty) + \frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi \xrightarrow[\omega\to 0]{} \pi}$$

$\boxed{\omega \to \infty}$

$$\varphi \underset{\omega\to \infty}{\sim} \arctan\left(-\frac{L\omega}{R}\right) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\omega\to \infty]{} \arctan(-\infty) + \frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0}$$





3 En déduire la valeur numérique de l'inductance L de la bobine.

Réponse

Il paraît évidemment plus simple de calculer L à partir de la phase, sachant qu'on a déterminé φ à la première question :

$$\tan\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{L\omega}{R}\left(\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}-1\right) = -\frac{1}{\tan(\varphi)}$$

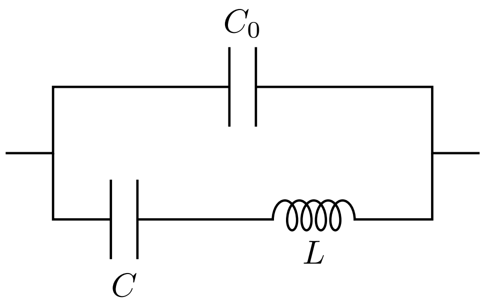
$$\Leftrightarrow L\left(1-\frac{1}{LC\omega^2}\right)=\frac{R}{\omega\tan(\varphi)} \Leftrightarrow L-\frac{1}{C\omega^2}=\frac{R}{\omega\tan(\varphi)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L=\frac{1}{C\omega^2}+\frac{R}{\omega\tan(\varphi)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C=0{,}10\,\mu\mathrm{F} \\ \omega=2\pi f \\ f=1{,}2\times10^3\,\mathrm{Hz} \\ R=1\,\mathrm{k}\Omega \\ \varphi=\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{rad} \end{cases}$$

A.N. : $\boxed{L=9{,}9\times10^{-2}\,\mathrm{H}}$

III Oscillateur à quartz

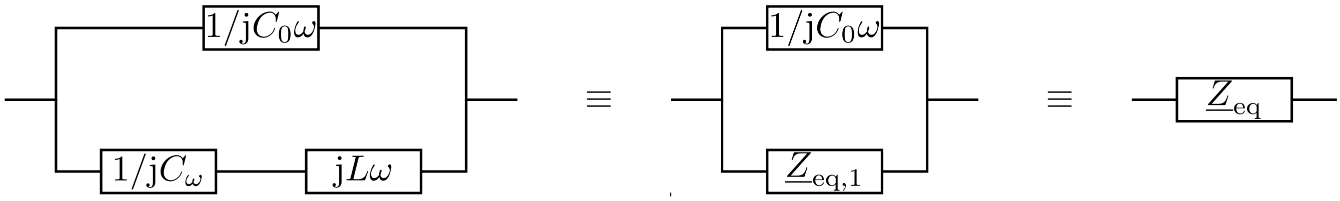
Un quartz piézo-électrique se modélise par un condensateur (de capacité C_0) placé en parallèle avec un condensateur (de capacité C) en série avec une inductance L. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.



1 Donner l'impédance équivalente $\underline{Z}$ de l'oscillateur.

Réponse

On calcule l'association en série de C et L d'abord, puis on fait l'association en parallèle de ce dipôle avec C_0 :



$$\underline{Z}_{\text{eq, 1}}=\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}+\mathrm{j}L\omega$$

D'où

$$\underline{Z}=\frac{1}{\underline{Y}_{C_0}+\underline{Y}_{\text{eq, 1}}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}=\frac{1}{\mathrm{j}C_0\omega+\dfrac{1}{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}+\mathrm{j}L\omega}}\times\frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}+\mathrm{j}L\omega}{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}+\mathrm{j}L\omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}=\frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}+\mathrm{j}L\omega}{1+\frac{C_0}{C}-LC_0\omega^2}\times\frac{\mathrm{j}C\omega}{\mathrm{j}C\omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}=\frac{1-LC\omega^2}{\mathrm{j}C\omega+\mathrm{j}C_0\omega-\mathrm{j}LCC_0\omega^3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}=-\mathrm{j}\frac{1-LC\omega^2}{(C+C_0)\omega-LCC_0\omega^3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}=\mathrm{j}\frac{LC\omega^2-1}{\omega\left((C+C_0)-LCC_0\omega^2\right)}}$$

2 Trouver la pulsation pour laquelle l'impédance de l'ensemble est nulle, puis celle pour laquelle elle est infinie.

Réponse

L'impédance est nulle si le numérateur est nul, c'est-à-dire

$$\boxed{\underline{Z}=0 \Leftrightarrow \omega=\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

À cette pulsation, assimilable à la pulsation propre d'un circuit RLC série, le dipôle est donc équivalent à un fil. On retrouvera ce résultat en étudiant la résonance dans le chapitre suivant.

L'impédance est infinie si le dénominateur est nul, c'est-à-dire

$$\boxed{|\underline{Z}|\to\infty \Leftrightarrow \omega=\omega_0'=\sqrt{\frac{C+C_0}{LCC_0}}}$$

Cette pulsation serait la pulsation propre d'une bobine L et d'un condensateur de capacité $C_{\text{eq}}=\frac{CC_0}{C+C_0}$, autrement dit l'association en série d'un condensateur C et d'un autre condensateur C_0 (les inverses des capacités s'ajoutent en série).

À cette pulsation (dite « de résonance », cf. chapitre suivant), la bobine et les condensateurs se chargent et déchargent alternativement, l'énergie arrivant dans le dipôle est piégée et n'est pas transmise au reste du circuit, comme le fait un interrupteur ouvert.

◇

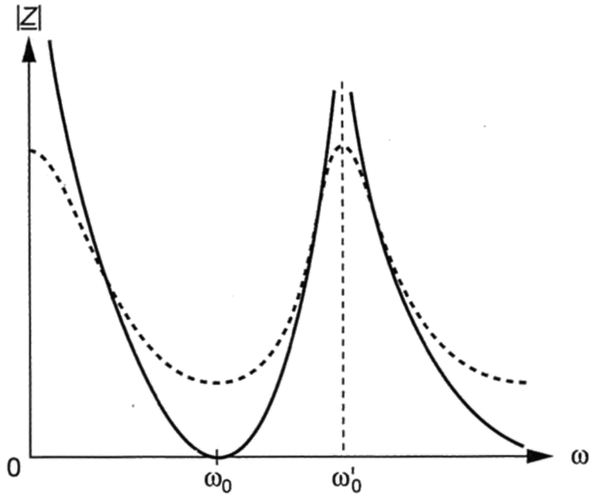
3 Tracer l'allure de $|\underline{Z}(\omega)|$.

Réponse

On regarde les cas limites à très haute et très basse fréquence :

$$|\underline{Z}| \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad |\underline{Z}| \xrightarrow[\omega\to 0^+]{} \infty$$

En effet, à $\omega \to 0$, les condensateurs sont des interrupteurs ouverts donc l'impédance totale est celle d'un interrupteur ouvert. À l'inverse, à $\omega \to \infty$, les condensateurs sont des fils donc l'impédance totale est celle d'un fil : 0.



◇

4 Comment la courbe précédente serait-elle modifiée si on prenant en compte les résistances de chacun des composants ?

Réponse

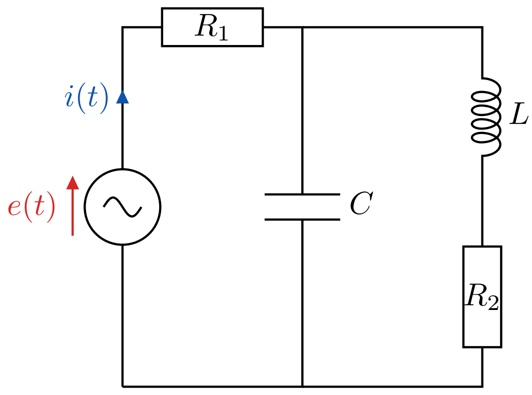
Les résistances évitent les infinités par dissipation, mais également les valeurs nulles : on se retrouve avec la courbe en pointillés sur la figure précédente.

◇

☆☆☆ IV Déphasage, pulsation et impédance

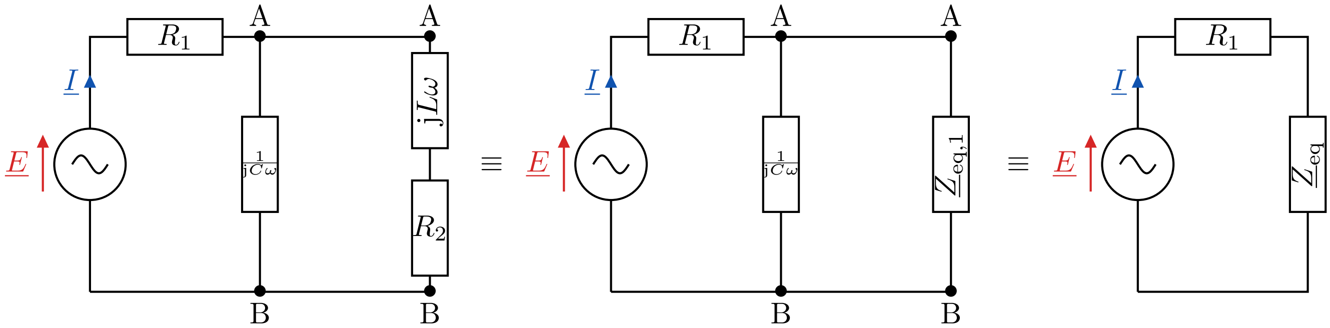
1 On considère le circuit ci-contre en RSF. Déterminer l'expression de la pulsation ω de la tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$ pour que le courant $i(t)$ soit en phase avec $e(t)$. Déterminer alors une condition sur R_2, C et L pour que cela soit réalisable.

Indication : utiliser l'impédance équivalente constituée de C, L et R_2.



Réponse

Pour exprimer simplement i, il nous faut une seule maille avec une seule impédance équivalente $\underline{Z}_{\rm eq}$: de cette manière, la loi des mailles nous donnera $\underline{E} = \underline{Z}_{\rm eq}\underline{I}$ et on pourra facilement déterminer le déphasage entre i et e.



On calcule l'impédance équivalente de l'association en série de R_2 et L :

$$\underline{Z}_{\text{eq},1} = R_2 + \mathrm{j}L\omega$$

Cette association est en parallèle avec C :

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{\text{eq, 2}} &= \frac{\underline{Z}_C \times \underline{Z}_{\text{eq, 1}}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{\text{eq},1}} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}(R_2 + \mathrm{j}L\omega)}{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + R_2 + \mathrm{j}L\omega} \\
\Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{eq},2} &= \frac{R_2 + \mathrm{j}L\omega}{1 + \mathrm{j}R_2C\omega - LC\omega^2}
\end{aligned}$$

On a donc comme prévu avec la loi des mailles :

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R_1 + \underline{Z}_{\text{eq},2}}}$$

L'intensité est en phase avec la tension si $\arg(R_1 + \underline{Z}_{\text{eq},2}) = 0$. Pour étudier cet angle, on va l'écrire sous la forme [partie réelle + j partie imaginaire] ; en effet, on aura alors

$$\arg\big(R_1 + \underline{Z}_{\text{eq},2}\big) = 0 \Leftrightarrow \tan\big(\arg\big(R_1 + \underline{Z}_{\text{eq},2}\big)\big) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Im}(R_1 + \underline{Z}_{\text{eq},2}) = 0}$$

si la partie réelle est positive.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
R_1 + \underline{Z}_{\text{eq},2} &= R_1 + \frac{R_2 + \mathrm{j}L\omega}{1 - LC\omega^2 + \mathrm{j}R_2C\omega} \times \frac{1 - LC\omega^2 \boxed{-} \mathrm{j}R_2C\omega}{1 - LC\omega^2 \boxed{-} \mathrm{j}R_2C\omega} \\
&= R_1 + \frac{(R_2 + \mathrm{j}L\omega)\cdot(1 - LC\omega^2 - \mathrm{j}R_2C\omega)}{(1 - LC\omega^2)^2 + (R_2C\omega)} \\
&= R_1 + \frac{R_2(1 - LC\omega^2) - \mathrm{j}{R_2}^2C\omega + \mathrm{j}L\omega(1 - LC\omega^2) + LR_2C\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + (R_2C\omega)} \\
&= R_1 + \frac{R_2(1 - \cancel{LC\omega^2}) + \cancel{LR_2C\omega^2}}{(1 - LC\omega^2)^2 + (R_2C\omega)} + \mathrm{j}\frac{L\omega(1 - LC\omega^2) - {R_2}^2C\omega}{(1 - LC\omega^2)^2 + (R_2C\omega)} \\
&= \underbrace{R_1 + \frac{R_2}{(1 - LC\omega^2)^2 + (R_2C\omega)}}_{\text{Re}>0} + \mathrm{j}\frac{L\omega(1 - LC\omega^2) - {R_2}^2C\omega}{(1 - LC\omega^2)^2 + (R_2C\omega)}
\end{aligned}$$

On cherche donc

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(R_1 + \underline{Z}_{\text{eq},2}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & L\cancel{\omega}(1 - LC\omega^2) = {R_2}^2C\cancel{\omega} \\
\Leftrightarrow\ & L - L^2C\omega^2 = {R_2}^2C \\
\Leftrightarrow\ & L^2C\omega^2 = L - {R_2}^2C \\
\Leftrightarrow\ & \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{{R_2}^2}{L^2} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{{R_2}^2}{L^2}}}
\end{aligned}$$

Ceci est possible si le terme sous la racine est positif, soit

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{LC} > \frac{{R_2}^2}{L_2} \\
\Leftrightarrow\ & \cancel{L}C < \frac{L^{\cancel{2}}}{{R_2}^2} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{{R_2}^2C}{L} < 1}
\end{aligned}$$