

# Filtrage linéaire

## Sommaire

<b>I Signaux composés</b>	2
I/A Présentation	2
I/B Application d'un filtre linéaire à un signal composé	3
<b>II Diagrammes de BODE</b>	4
II/A Présentation	4
II/B Utilisation	5
II/C Construction des diagrammes de BODE	7
<b>III Application aux filtres classiques</b>	8
III/A Filtres RC	8
III/B Filtres RLC	9
III/C Mise en cascade de filtres	11

## ✖ Capacités exigibles

- Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
- Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
- Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de BODE en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
- Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- Déetecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

- Tracer le diagramme de BODE (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.
- Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.
- Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou déivateur.
- Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.
- Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).

## ✓ L'essentiel

### ❑ Définitions

E8.1 : Spectre d'un signal	2
E8.2 : Effets des filtres	4
E8.3 : Diagrammes de BODE	4
E8.4 : Mise en cascade et impédances des filtres	11

### ❖ Propriétés

E8.1 : Relation de PARSEVAL	3
E8.2 : Variations du gain en décibels	5
E8.3 : Effet d'un filtre en diagramme de BODE	6
E8.4 : Mise en cascade de filtres	12

### ≡ Démonstrations

E8.1 : (HP) Relation de PARSEVAL	2
E8.2 : Variations du gain en décibels	5
E8.3 : Effet d'un filtre en diagramme de BODE	6
E8.4 : Mise en cascade de filtres	12

### ❑ Applications

E8.1 : Lecture d'un diagramme	5
E8.2 : Diagramme de BODE RC sur C	8
E8.3 : Diagramme de BODE RC sur R	8
E8.4 : Diagramme de BODE RLC sur C	9
E8.5 : Diagramme de BODE RLC sur R	10

### ❑ Exemples

E8.1 : Signaux composés et analyse de FOURIER	2
E8.2 : Effets déivateur et intégrateur	6
E8.3 : Filtre boucle ouverte vs fermée	11

### ❖ Outils

E8.1 : Appliquer un filtre linéaire	3
E8.2 : Lecture d'un diagramme	5
E8.3 : Construire un diagramme de BODE	7

### ♥ Points importants

E8.1 : Décomposition en séries de FOURIER	2
E8.2 : Résumé étude d'un filtre	12

## I Signaux composés

### I/A Présentation

À travers les précédents chapitres, on sait étudier la réponse d'un système à une excitation purement sinusoïdale. Seulement dans la pratique, les signaux purement sinusoïdaux sont rares ; on a en réalité des **signaux composés**, comportant de nombreuses fréquences, comme la lumière blanche qu'on peut **décomposer en ses longueurs d'ondes**. L'idée du filtrage de signaux composés est précisément de décomposer ces signaux en leurs différentes contributions sinusoïdales, puis de **traiter chacune de ces fréquences indépendamment**. Cela s'applique aux transfert de données, à la création et diffusion de musique, et même à la couleur bleue du ciel. Cette décomposition est possible grâce au théorème de FOURIER :

#### Important E8.1 : Décomposition en séries de FOURIER

Tout signal périodique se décompose comme une somme, éventuellement infinie, de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal périodique composé  $y(t)$  de pulsation  $\omega$  s'écrit

avec  $Y_0$  la valeur moyenne (composante continue) ; les  $Y_n$  et  $\varphi_n$  des caractéristiques du signal.

On représente alors le contenu fréquentiel du signal à l'aide de son **spectre** :

#### Définition E8.1 : Spectre d'un signal

Le **spectre** d'un signal représente les **amplitudes** des différentes composantes sinusoïdales le constituant en fonction de leurs **fréquences**.

- ◊  $y_1(t) = Y_1 \cos(\omega t + \varphi_{y,1})$  est le **fondamental**. Il donne sa **fréquence au signal entier**.
- ◊  $y_n(t) = Y_n \cos(n \cdot \omega t + \varphi_{y,n})$  est l'**harmonique de rang n**. Sa pulsation est un **multiple** du fondamental.

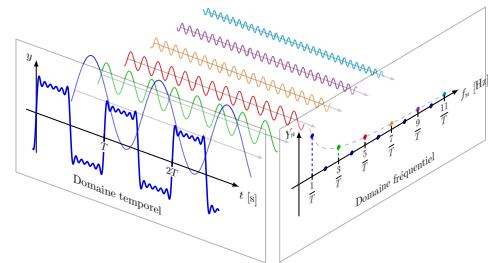


FIGURE E8.1 – Décomposition de FOURIER.

#### Exemple E8.1 : Signaux composés et analyse de FOURIER

- ◊ Pour une introduction visuelle et des analyses de qualité, je vous recommande les vidéos de 3BLUE1BROWN portant sur le sujet :
  - ▷ Mais qu'est-ce que la Transformée de Fourier ? Une introduction visuelle.
  - ▷ Mais qu'est-ce qu'une série de Fourier ? Du transfert thermique à des dessins avec des cercles..
- ◊ Pour une approche un peu plus historique et concernant l'importance de l'algorithme informatique basé sur ce théorème, je vous recommande la vidéo de VERITASIUM : [The Remarkable Story Behind The Most Important Algorithm Of All Time](#).
- ◊ Pour un approche ludique, essayer ce site : [composeur de séries de FOURIER](#)
- ◊ Pour une approche musicale, voir [cette animation](#).

#### Interprétation E8.1 : Hautes et basses fréquences

- ◊ Les **basses fréquences** « codent » les **variations lentes** d'un signal ;
- ◊ les **hautes fréquences** « codent » les **variations brusques** d'un signal.

Comme précédemment, c'est souvent l'énergie moyenne d'un signal qui nous intéresse. Étudions-la :

#### Démonstration E8.1 : (HP) Relation de PARSEVAL

Soit le signal périodique :

Son énergie moyenne est :

Or,

Le dernier terme se développe :

D'où

Il ne reste que les termes croisés  $\langle y_n(t)y_m(t) \rangle$ . Or :

Mais donc

Ainsi :

### ♥ Propriété E8.1 : Relation de PARSEVAL

L'énergie portée par un signal périodique se répartit dans ses harmoniques :

### I/B Application d'un filtre linéaire à un signal composé

Pour un signal périodique, décomposable en signaux sinusoïdaux, on applique le filtre par superposition :

#### ♥ Outils E8.1 : Appliquer un filtre linéaire

1) On décompose le signal d'entrée en sinusoïdes, avec  $\omega$  la pulsation d'entrée du fondamental et  $\omega_n = n\omega$  les pulsations des harmoniques :

2) On applique la fonction de transfert à chaque entrée pour obtenir la sortie correspondante :

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

3) On recompose le signal de sortie en sommant les sorties obtenues :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(t) = \left\{ \begin{array}{c} + \\ + \\ \vdots \\ + \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \boxed{\phantom{000}} \rightarrow \\ \rightarrow \boxed{\phantom{000}} \rightarrow \\ \rightarrow \boxed{\phantom{000}} \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \boxed{\phantom{000}} \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ + \\ \vdots \\ + \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = s(t)$$

### ♥ Définition E8.2 : Effets des filtres

Un filtre peut, selon la position des fréquences d'entrée et de coupure, se comporter comme un :

◊ **Moyenneur** : sortie proportionnelle à la moyenne de l'entrée, tel que :

▷ **Signal** :

▷ **Conditions** :

◊ **Intégrateur** : sortie proportionnelle à la primitive de l'entrée, tel que :

▷ **Signal** :

soit      {

▷ **Conditions** :

◊ **Dérivateur** : sortie proportionnelle à la dérivée de l'entrée, tel que :

▷ **Signal** :

soit      {

▷ **Conditions** :

## II Diagrammes de BODE

### II/A Présentation

D'une part, les variations polynomiales de la fonction de transfert rendent son tracé compliqué, et d'autre part, les plages de fréquences où la fonction varie nettement se font par multiples de 10. Pour ces raisons, lorsqu'on s'intéresse au fonctionnement fréquentiel d'un système, on utilise des diagrammes plus clairs, appelés **diagrammes de BODE**.

### ♥ Définition E8.3 : Diagrammes de BODE

#### Diagrammes de BODE

Le(s) diagramme(s) de BODE est un outil permettant de visualiser et quantifier l'effet d'un filtre. On trace :

◊ son **gain en décibels** :

◊ son **déphasage** :

On les trace en fonction de la pulsation (réduite ou non) ou de la fréquence, et en échelle logarithmique.

#### Échelle logarithmique

Les échelles logarithmiques sont utiles pour visualiser des données sur de **grands intervalles**. À l'inverse d'une échelle linéaire, les incrémentations sont des **puissances de 10**. Le passage d'une puissance de 10 à la suivante s'appelle une **décade**.



FIGURE E8.2 – Exemple d'échelle logarithmique

#### Gain en décibel

Il permet de représenter l'effet d'un filtre sur l'**énergie** d'un signal sur une grande plage de valeurs :

#### Unité

- ◊  $G_{\text{dB}}(x) = 0 \text{ dB} \Leftrightarrow G(x) = 1$  : composante de sortie **conservée** à cette fréquence.
- ◊  $G_{\text{dB}}(x) > 0 \text{ dB} \Leftrightarrow G(x) > 1$  : composante de sortie **amplifiée** à cette fréquence.
- ◊  $G_{\text{dB}}(x) < 0 \text{ dB} \Leftrightarrow G(x) < 1$  : composante de sortie **atténuée** à cette fréquence.

♥ Propriété E8.2 : Variations du gain en décibels

- 1) Lorsque l'amplitude est divisée par 10, le gain en décibels diminue de 20 dB ;
- 2) La bande passante se réécrit en terme de gain en décibels :

Démonstration E8.2 : Variations du gain en décibels

1)

2)

II/B Utilisation

♥ Outils E8.2 : Lecture d'un diagramme

Pour lire le signal de sortie d'un filtre, il faut repérer le **gain** et la **phase** de la fonction de transfert **pour chaque fréquence** de la décomposition. On trouve le déphasage par lecture directe, et on trouve le gain à partir du gain en décibel en inversant la formule. On aura alors :

$$e_n(t) = E_n \cos(n \cdot \omega t + \varphi_{e,n}) \Rightarrow s_n(t) =$$

Application E8.1 : Lecture d'un diagramme

On donne le signal d'entrée de pulsation  $\omega = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  tel que :

$$e(t) = E_1 \cos(\omega t + \varphi_{e,1}) + E_{20} \cos(20 \cdot \omega t + \varphi_{e,20}) + E_{100} \cos(100 \cdot \omega t + \varphi_{e,100})$$

avec 
$$\begin{cases} E_1 = 1 \text{ V} & ; & E_{20} = 0,5 \text{ V} & ; & E_{100} = 0,25 \text{ V} \\ \varphi_{e,1} = -0,8 \text{ rad} & ; & \varphi_{e,20} = -0,5 \text{ rad} & ; & \varphi_{e,100} = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

Déterminer le signal de sortie  $s(t)$  à partir du diagramme de BODE ci-dessous :

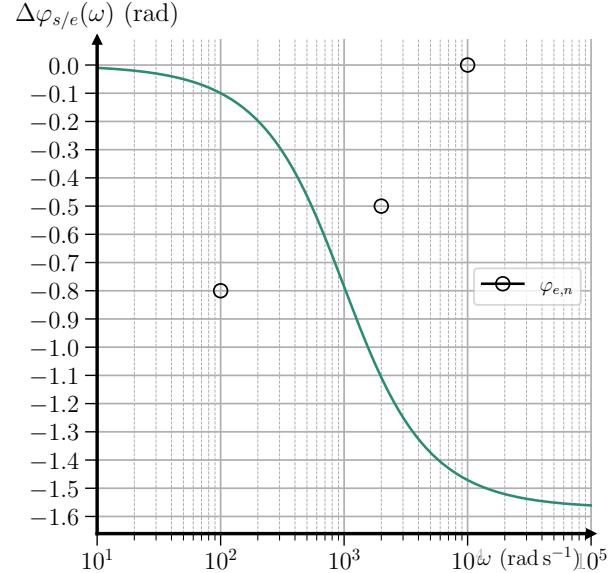
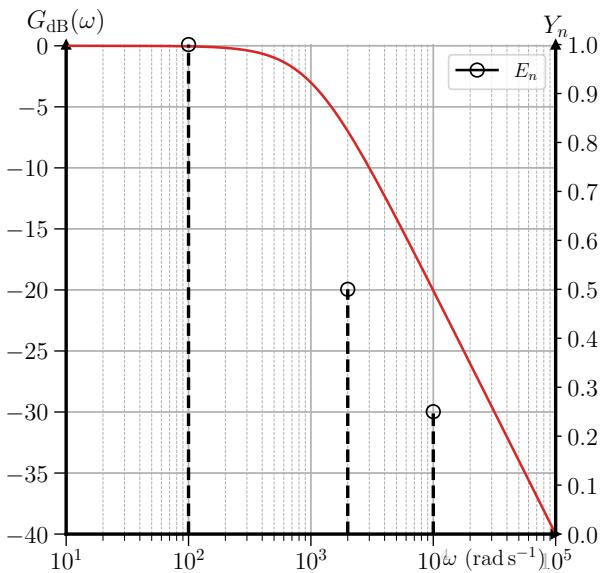


FIGURE E8.3 – Lecture d'un diagramme de BODE

**♥ Propriété E8.3 : Effet d'un filtre en diagramme de BODE**

On peut facilement identifier l'effet d'un filtre en regardant son diagramme de BODE. On trouve :

◊ Intégrateur :

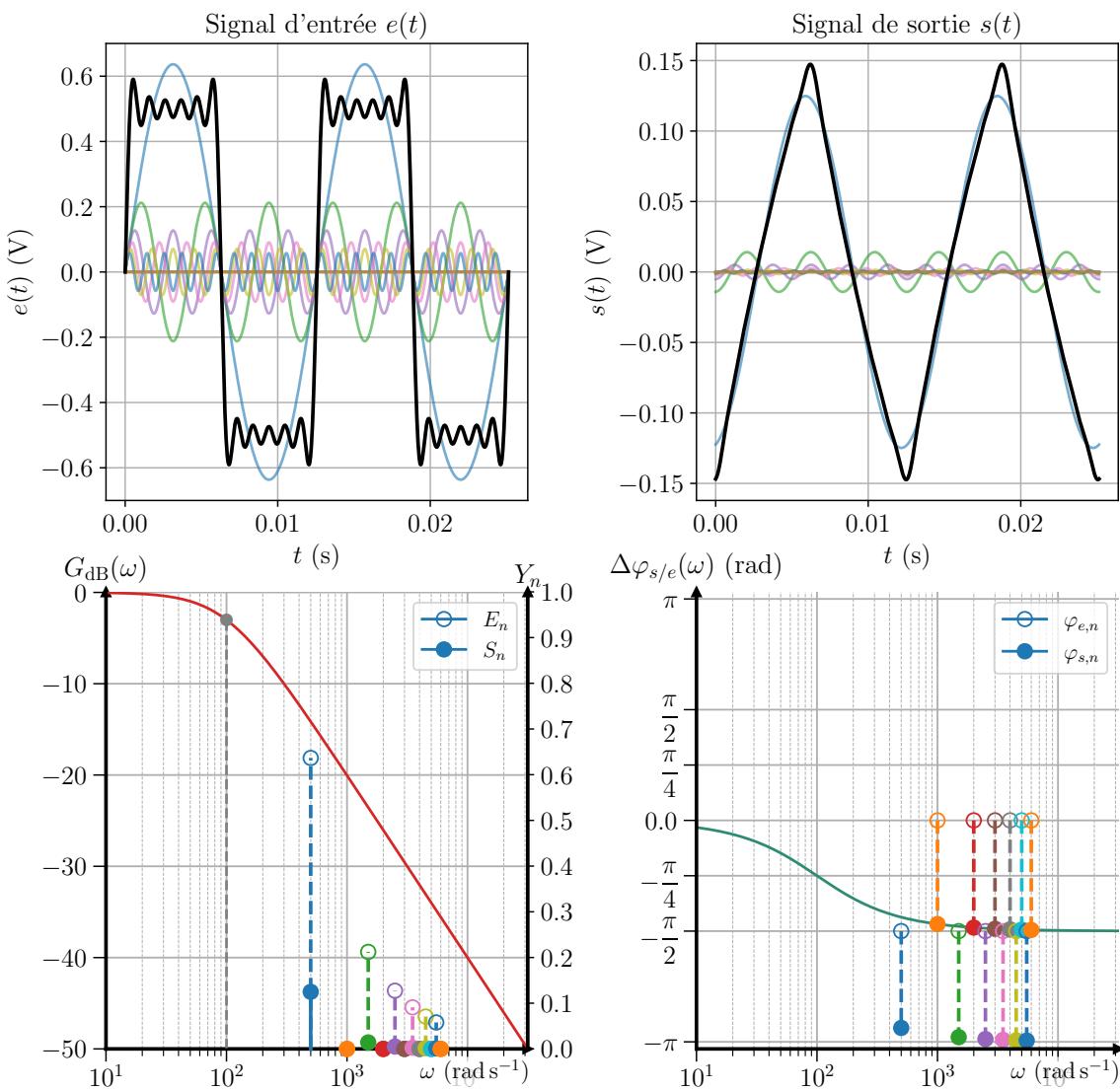
◊ Dérivateur :

**Démonstration E8.3 : Effet d'un filtre en diagramme de BODE**

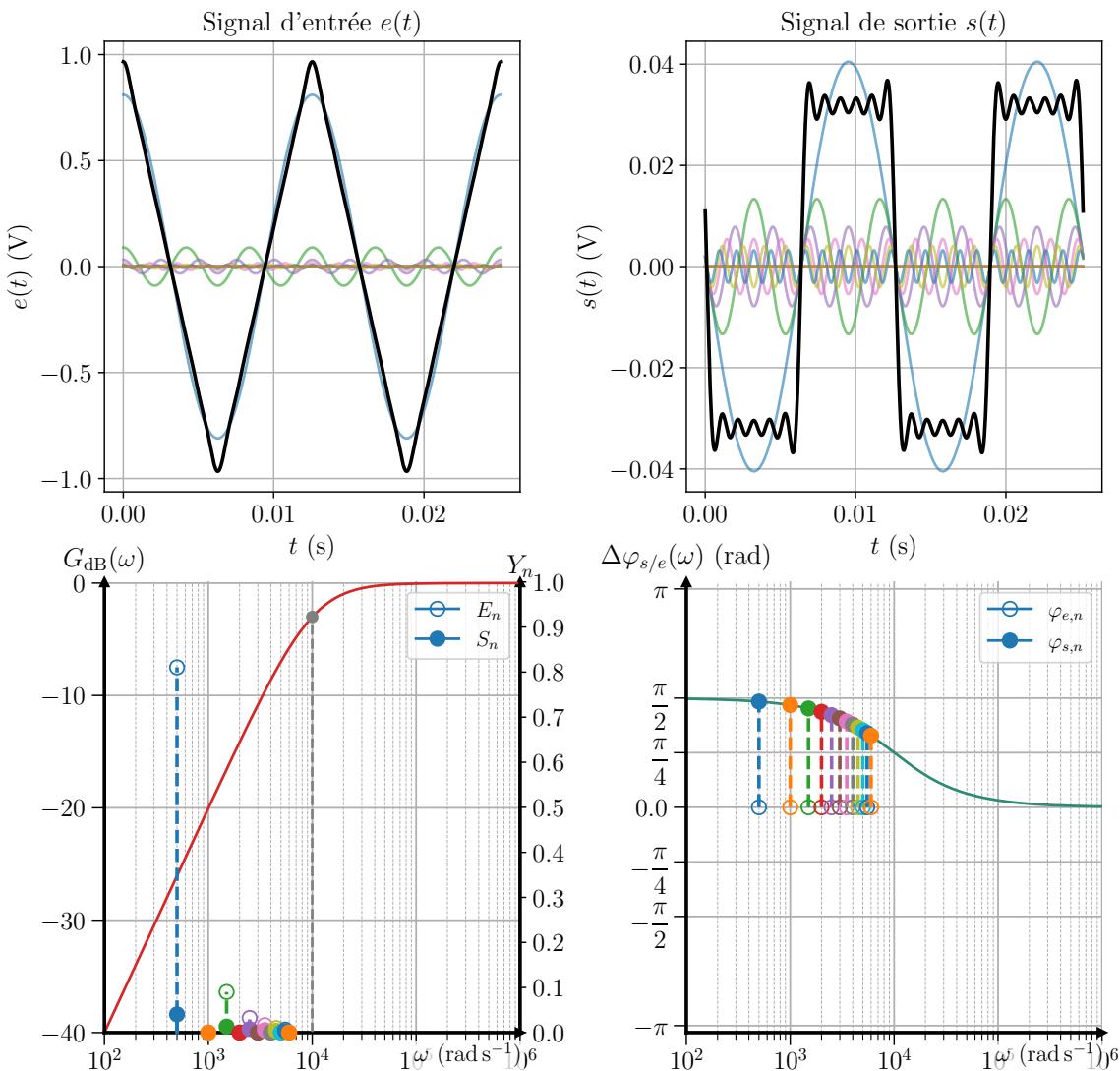
◊ Intégrateur :

◊ Dérivateur :

**Exemple E8.2 : Effets déivateur et intégrateur**



**FIGURE E8.4 – Intégration d'un signal carré de  $\omega = 500$  rad·s<sup>-1</sup> par un passe-bas de  $\omega_c = 100$  rad·s<sup>-1</sup>.**



**FIGURE E8.5** – Dérivation d'un signal triangle de  $\omega = 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  par un passe-haut de  $\omega_c = 10\,000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## II/C Construction des diagrammes de BODE

### ♥ Outils E8.3 : Construire un diagramme de BODE

- 1) Déterminer la **fonction de transfert**  $\underline{H}(x)$  du filtre;
- 2) En déduire le gain  $G(x) = |\underline{H}(x)|$  puis le gain en décibels  $G_{\text{dB}}(x) = 20 \log(G(x))$  et le déphasage  $\Delta\varphi_{s/e}(x) = \arg(\underline{H}(x))$ ;
- 3) En déduire les **valeurs** pour  $x = 1$  ;
- 4) Trouver les **asymptotes** :
  - ◊ Déterminer les **équivalents asymptotiques** de  $\underline{H}(x)$  pour  $x \rightarrow 0$  et  $x \rightarrow \infty$  :
    - ▷ On cherche une **fonction de**  $x$  qui ressemble à  $\underline{H}(x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$  ou  $x \rightarrow \infty$ .
    - ▷ Pour cela, on **simplifie séparément le numérateur et dénominateur en négligeant** les termes **petits** devant les termes **grands** dans ces limites.
  - ◊ En déduire les **équivalents asymptotiques** de  $G(x)$  puis  $G_{\text{dB}}$  et de  $\Delta\varphi_{s/e}(x)$  pour  $x \rightarrow 0$  et  $x \rightarrow \infty$ .
- 5) Trouver leur **intersection en gain** :
  - ◊ on trouve l'**abscisse d'intersection**  $x_{\text{its}}$  des deux asymptotes en résolvant  $G_{\text{dB}}(x \rightarrow 0) = G_{\text{dB}}(x \rightarrow \infty)$  ;
  - ◊ on trouve l'**ordonnée d'intersection**  $y_{\text{its}}$  en évaluant l'une des deux asymptotes en  $x = x_{\text{its}}$  ;
- 6) Tracer les asymptotes et ajuster le tracé réel en s'assurant qu'il passe par les points clés trouvés précédemment.

### III Application aux filtres classiques

#### III/A Filtres RC

##### Application E8.2 : Diagramme de BODE RC sur C

Déterminer le diagramme de BODE du filtre RC sur C. Justifier son caractère passe-bas et son caractère intégrateur pour des fréquences élevées.

1) On rappelle sa fonction de transfert :

2) Gains : et

Déphasage :

3) D'où et et

4) Asymptotes  $H$  : et

Sur  $G$  : et

Sur  $G_{\text{dB}}$  : et

Sur  $\Delta\varphi$  : et

5)  $x_{\text{its}}$  :

$y_{\text{its}}$  :

C'est un passe-bas car

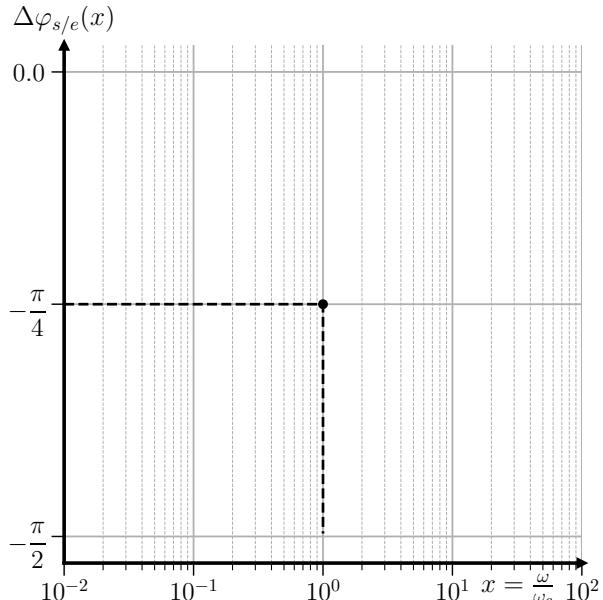
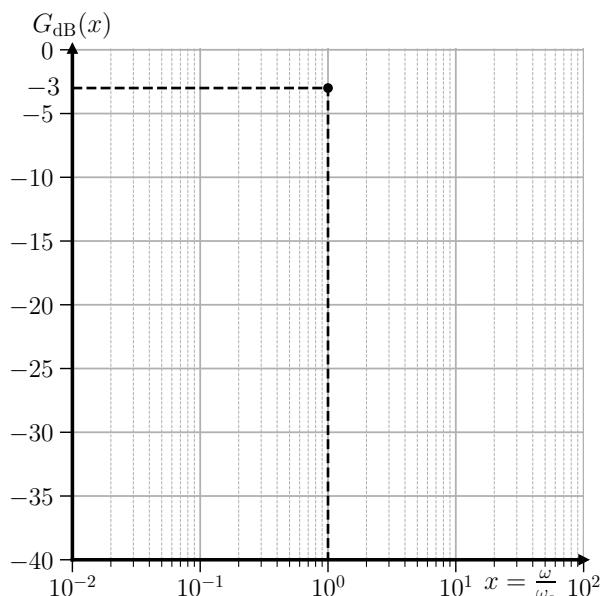


FIGURE E8.6 – Diagramme de BODE filtre RC sur C.

##### Application E8.3 : Diagramme de BODE RC sur R

Déterminer le diagramme de BODE du filtre RC sur C. Justifier son caractère passe-haut et son caractère déivateur pour des fréquences faibles.

1) On rappelle sa fonction de transfert :

2) Gains : et

Déphasage :

3) D'où et et

4) Asymptotes  $\underline{H}$  : et et

Sur  $G$  : et et

Sur  $G_{\text{dB}}$  : et et

Sur  $\Delta\varphi$  : et et

5)  $x_{\text{its}}$  :

$y_{\text{its}}$  :

C'est un passe-haut car

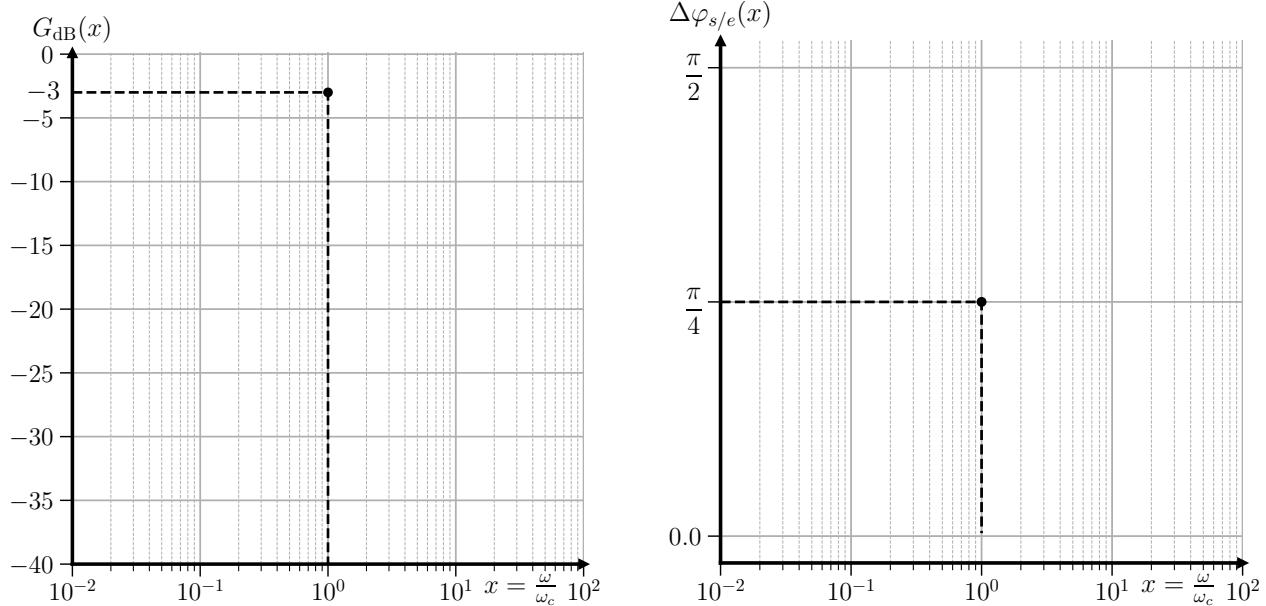


FIGURE E8.7 – Diagramme de BODE filtre RC sur R.

### III/B Filtres RLC

#### Application E8.4 : Diagramme de BODE RLC sur C



Déterminer le diagramme de BODE du filtre RLC sur C. Justifier son caractère passe-bas et discuter de son utilisation comme moyenneur.

1) On rappelle sa fonction de transfert :  $\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$

2) Gains :  $G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$  et

Déphasage :  $\Delta\varphi_{s/e}(x) = \arg(\underline{H}(x)) = \arctan\left(\frac{Q(1 - x^2)}{x}\right) - \frac{\pi}{2}$

3) D'où  $G(1) = H_0 Q$  et et  $\Delta\varphi_{s/e}(1) = -\frac{\pi}{2}$

4) Asymptotes  $\underline{H}$  : et

Sur  $G$  : et

Sur  $G_{\text{dB}}$  :

et

Sur  $\Delta\varphi$  :

et

5)  $x_{\text{its}}$  :

$y_{\text{its}}$  :

C'est un passe-bas car

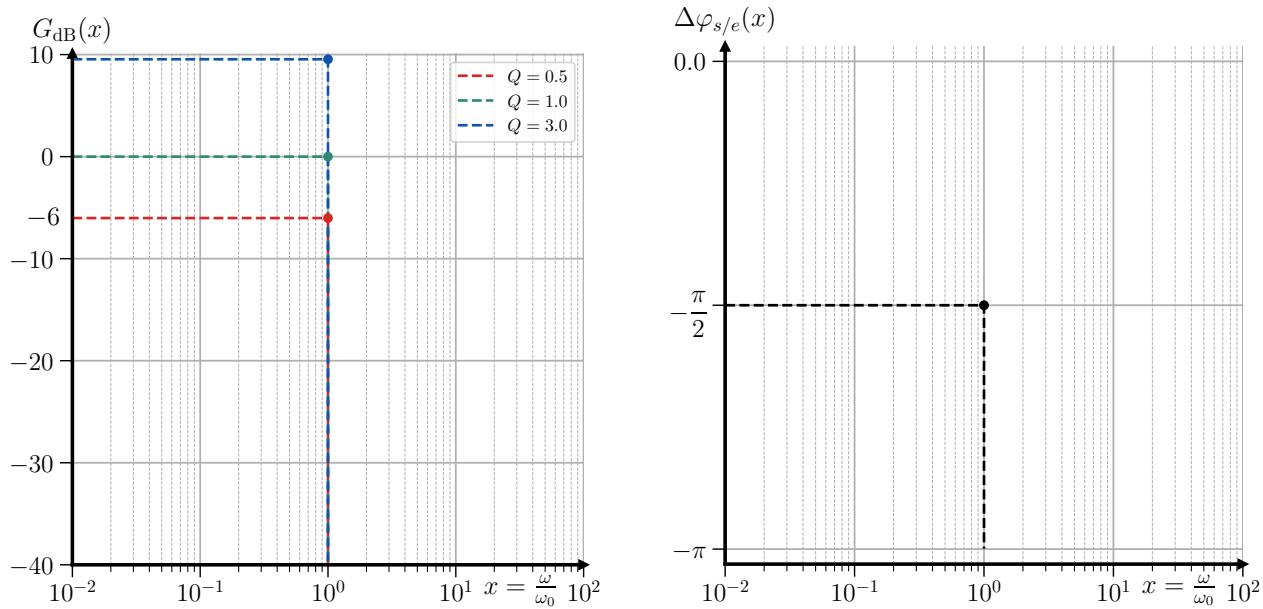


FIGURE E8.8 – Diagramme de BODE filtre RLC sur C.

### Application E8.5 : Diagramme de BODE RLC sur R

Déterminer le diagramme de BODE du filtre RLC sur R. Justifier son caractère passe-bande et ses effets à basses et hautes fréquences.

1) On rappelle sa fonction de transfert :  $\underline{H}(x) = H_0 \frac{\text{j}x}{1 + \text{j}Q \left( x - \frac{1}{x} \right)}$

2) Gains :  $G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2}}$  et

Déphasage :  $\Delta\varphi_{s/e}(x) = \arg(\underline{H}(x)) = -\arctan\left(Q \left( x - \frac{1}{x} \right)\right)$

3) D'où  $G(1) = H_0$  et  $\Delta\varphi_{s/e}(1) = 0$

4) Asymptotes  $\underline{H}$  : et

Sur  $G$  : et

Sur  $G_{\text{dB}}$  : et

Sur  $\Delta\varphi$  : et

5)  $x_{\text{its}}$  :

$y_{\text{its}}$  :

C'est un passe-bande car

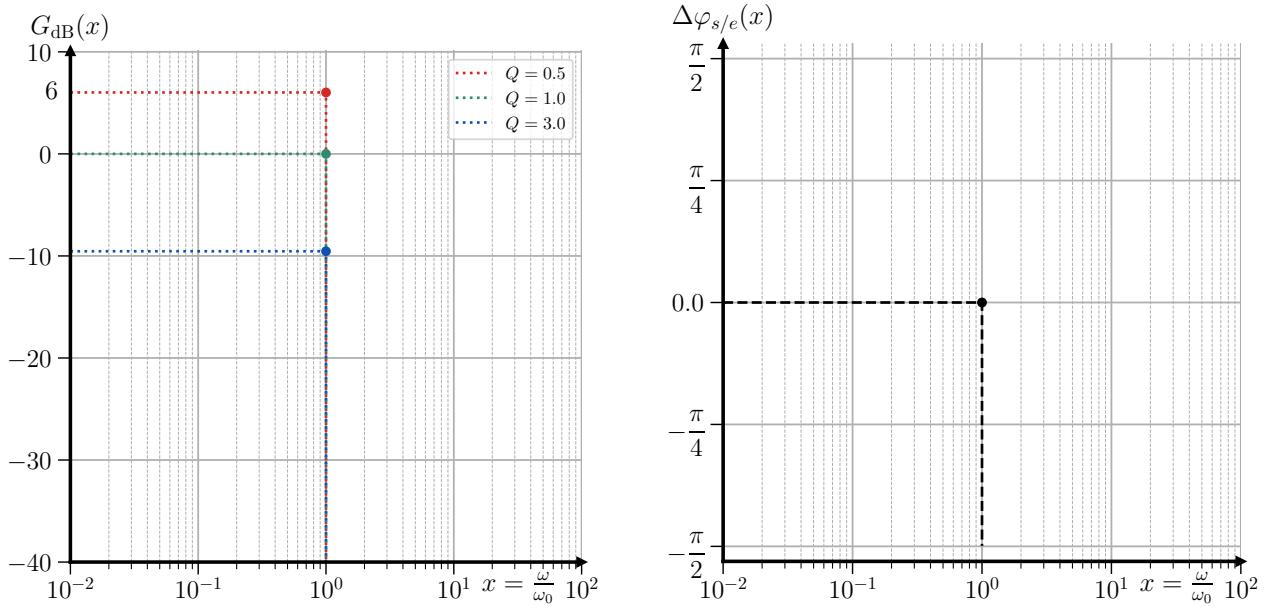


FIGURE E8.9 – Diagramme de BODE filtre RLC sur R.

### III/C Mise en cascade de filtres

#### Exemple E8.3 : Filtre boucle ouverte vs fermée

Jusque-là, nous avons étudié des filtres en boucle ouverte, c'est-à-dire que la sortie n'est pas reliée à un autre composant. Or, comme introduit dans le chapitre E7 avec le haut-parleur sur le RC sur C, on utilise les filtres reliant des systèmes entre eux, en boucle fermée ; or, les deux situations ne sont pas équivalentes !

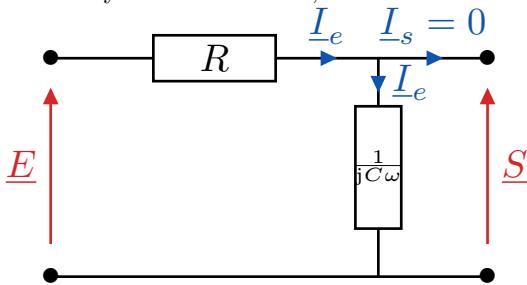


FIGURE E8.10 – RC sur C en boucle ouverte.

$$\underline{H}(\omega) =$$

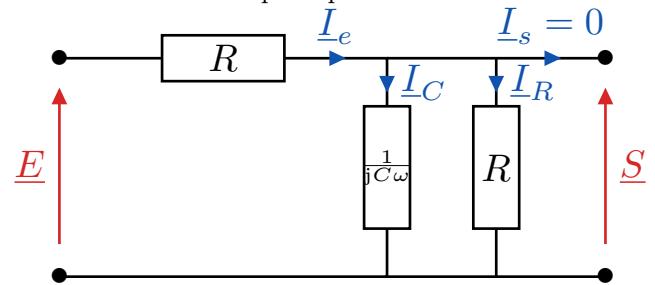


FIGURE E8.11 – RC sur C en boucle fermée.

$$\underline{H}'(\omega) =$$

Pour appliquer le pont diviseur, il faut pouvoir **considérer que**  $I_e \approx I_C \Leftrightarrow I_R \ll I_C$  ; ceci se traduit par la condition  $|\underline{Z}_C| \gg |\underline{Z}_R|$ . On étend alors ce raisonnement à la mise en cascade de filtres.

#### Définition E8.4 : Mise en cascade et impédances des filtres

On parle de **mise en cascade** de filtres lorsque la **sorte d'un** filtre est directement reliée à l'**entrée d'un autre** filtre. Pour caractériser son comportement, on associe à chaque filtre :

- ◊ Sa **fonction en boucle ouverte**  $\underline{H}_0 = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$  (filtre non chargé) ;
- ◊ Une **impédance d'entrée**  $\underline{Z}_e = \frac{\underline{E}}{\underline{I}_e}$ , vue depuis l'entrée du filtre ;
- ◊ Une **impédance de sortie**  $\underline{Z}_s$  associée à un **générateur de THÉVENIN** de tension  $\underline{U}_s = \underline{H}_0 \cdot \underline{E}$ .



FIGURE E8.12 – Modélisation impédances d'un filtre.

Si  $I_s = 0$

sinon

### ♥ Propriété E8.4 : Mise en cascade de filtres

Pour utiliser les filtres en cascade sans perturber leurs fonctionnements, il faut qu'ils aient une **grande impédance d'entrée** devant l'impédance précédente et une **faible impédance de sortie** devant l'impédance suivante. Dans ce cas, la **fondation de transfert totale sera le produit des fonctions en boucle ouverte** :

$$\underline{E}_1 \rightarrow \boxed{\text{filtre 1}} \rightarrow \boxed{\text{filtre 2}} \rightarrow \cdots \rightarrow \boxed{\text{filtre n}} \rightarrow \underline{S}_n \Leftrightarrow \underline{E}_1 \rightarrow \boxed{\text{filtre T}} \rightarrow \underline{S}_n$$

si adaptation d'impédances  $\Rightarrow$

$$\underline{H}_T = \underline{H}_{01} \cdot \underline{H}_{02} \cdot \cdots \cdot \underline{H}_{0n}$$

### Démonstration E8.4 : Mise en cascade de filtres

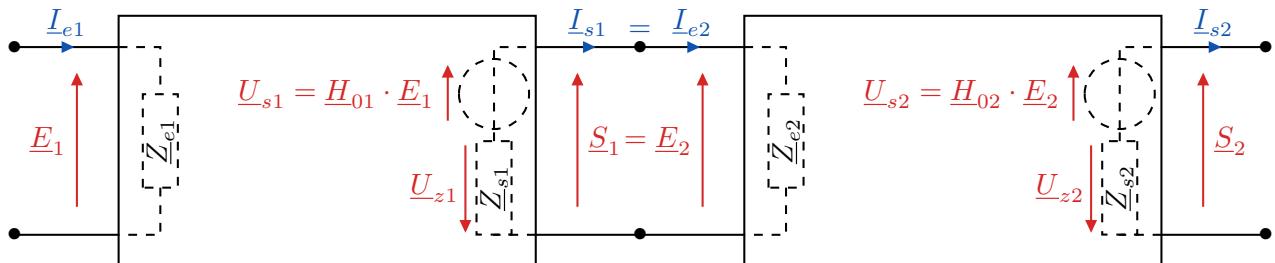


FIGURE E8.13 – Mise en cascade de filtres.

Par pont diviseur :

Ainsi,

Si cela est vérifié pour chaque étage  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors

soit

$\Leftrightarrow$

■

### Important E8.2 : Résumé étude d'un filtre

- 1) On fait l'étude à basses et hautes fréquences ;
- 2) On écrit le circuit avec les amplitudes complexes et les impédances des composants ;
- 3) On fait un pont diviseur ;
- 4) On calcule l'amplitude complexe puis on en déduit la fonction de transfert ;
- 5) On calcule le gain en décibels et la phase ;
- 6) On fait l'étude asymptotique ;
- 7) On trace le diagramme de BODE.

Ensuite, pour connaître le signal de sortie d'un signal d'entrée, on le décompose en série de FOURIER et on applique la fonction de transfert complexe à chacune des composantes pour reconstituer le signal de sortie :

$$\underline{S}_n = \underline{E}_n \cdot \underline{H}(n \cdot \omega) \Rightarrow \begin{cases} S_n = E_n \cdot G(n \cdot \omega) = E_n 10^{\frac{G_{\text{dB}}(n \cdot \omega)}{20}} \\ \varphi_{s,n} = \varphi_{e,n} + \Delta\varphi_{s/e}(n \cdot \omega) \end{cases}$$

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} E_0 & \rightarrow \boxed{H(0 \cdot \omega)} & \rightarrow S_0 \\ + & & + \\ E_1 \cos(\omega t + \varphi_{e,1}) & \rightarrow \boxed{H(1 \cdot \omega)} & \rightarrow S_1 \cos(\omega t + \varphi_{s,1}) \\ + & & + \\ E_2 \cos(2 \cdot \omega t + \varphi_{e,2}) & \rightarrow \boxed{H(2 \cdot \omega)} & \rightarrow S_2 \cos(2 \cdot \omega t + \varphi_{s,2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E_n \cos(n \cdot \omega t + \varphi_{e,n}) & \rightarrow \boxed{H(n \cdot \omega)} & \rightarrow S_n \cos(n \cdot \omega t + \varphi_{s,n}) \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = s(t)$$