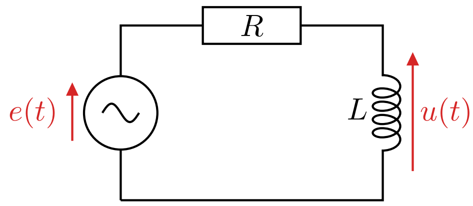
Correction du TD d'application

☆☆★ I Circuit RL série en RSF

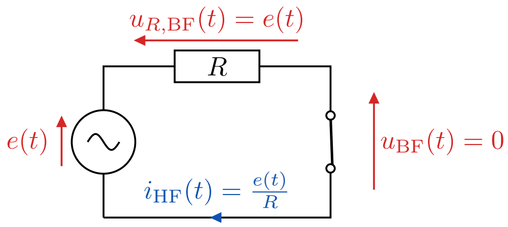
On considère le circuit ci-contre en régime sinusoïdal forcé, où la source de tension impose $e(t) = E\cos(\omega t)$ avec $E > 0$.



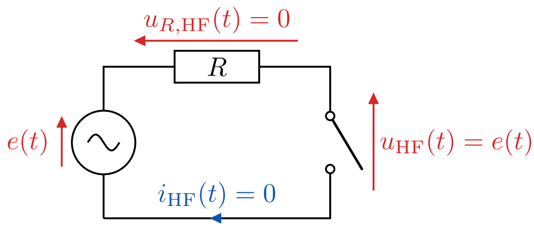
1 Déterminer, sans calcul, le type de filtre réalisé par ce circuit.

Réponse

On étudie les comportements limites, en utilisant la modélisation d'une bobine à haute et basse fréquence : étant donné que $\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega$, pour $\omega \to 0$ on a $\underline{Z}_L = 0$, et pour $\omega \to \infty$ on a $\underline{Z}_L \to \infty$. On a donc respectivement un fil et un interrupteur ouvert. En effet, l'impédance étant homogène à une résistance, une impédance nulle est semblable à une résistance nulle (un fil), et une impédance infinie est semblable à une résistance infinie (un interrupteur ouvert).



$$\boxed{u(t) \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0}$$



$$\boxed{u(t) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} e(t)}$$

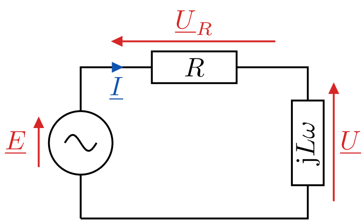
C'est donc un filtre **passe-haut**.

◇

2 Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de $u(t)$ en fonction de E, R, L et ω. Déterminer alors l'expression de la fonction de transfert de ce filtre, et la mettre sous la forme

$$\underline{H}(x) = \frac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{où} \quad \omega_c \quad \text{à déterminer}$$

Réponse



$$\underline{U}(\omega) = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R}\underline{E} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R+\mathrm{j}L\omega}\underline{E}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}(\omega)}{\underline{E}} = \frac{\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}{1+\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega} = \frac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}$$

avec $\boxed{\omega_c = \frac{R}{L}}$

◇

3 Déterminer son gain et l'expression de son déphasage en fonction de x. En déduire l'amplitude U et la phase φ_u réelles de $u(t)$.

Réponse

Gain : $$G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{|\mathrm{j}x|}{|1+\mathrm{j}x|} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \boxed{U(x) = EG(x) = E\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Déphasage : $$\arg(\underline{H}(x)) = \Delta\varphi_{s/e}(x) = \arg(\mathrm{j}x) - \arg(\underbrace{1}_{\mathrm{Re}>0}+\mathrm{j}x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_u(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)} \quad \text{car} \quad \text{phase d'entrée nulle}$$

◇

4 Déterminer les valeurs du gain et du déphasage en $x = 1$. Déterminer sa bande passante ; justifier alors l'appellation « pulsation de coupure » pour ω_c, et tracer l'allure du gain et du déphasage phase.

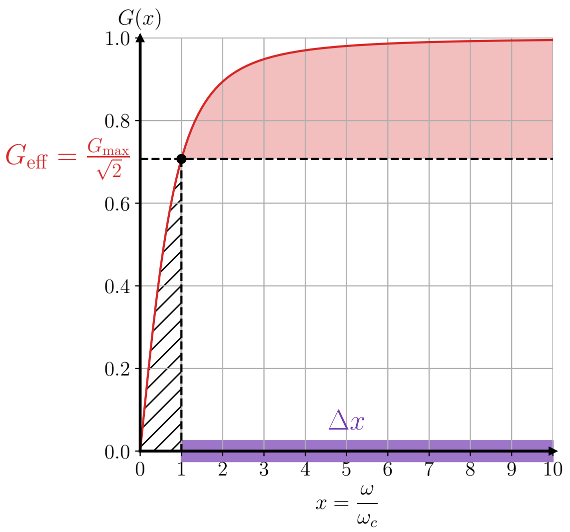
Réponse

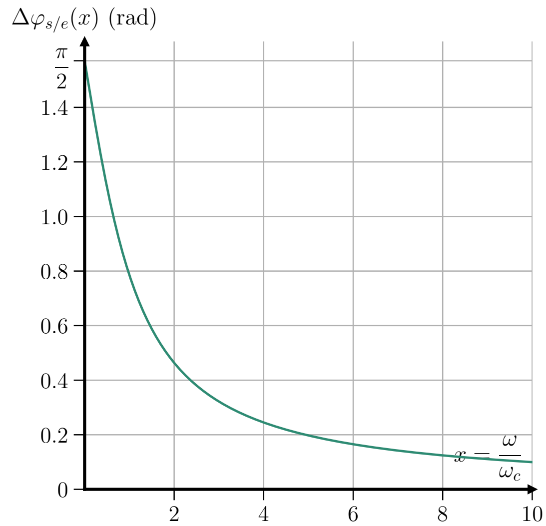
$$G(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow U(1) = \frac{E}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \varphi_u(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi

$$G(x) \geq G_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \geq \omega_c}$$

On l'appelle donc « pulsation de coupure » car à cette pulsation le gain est égal au gain maximal efficace G_{eff} ; en deçà, le gain est inférieur, au-delà, il est supérieur, définissant la bande passante du filtre.





5 Les tensions $e(t)$ et $u(t)$ peuvent-elles être en phase ? En opposition de phase ? En quadrature de phase ? Préciser le cas échéant pour quelle(s) pulsation(s).

Réponse

1) Signaux en phase

$$\Leftrightarrow \arg(\underline{H}(x)) = 0 \Leftrightarrow \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{x \longrightarrow \infty}$$

C'est donc mathématiquement possible et physiquement approchable, mais pas rigoureusement.

2) Signaux en opposition de phase

$$\Leftrightarrow \arg(\underline{H}(x)) = \pi \Leftrightarrow \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{x \longrightarrow -\infty}$$

C'est donc mathématiquement possible, mais **physiquement impossible** : la pulsation est proportionnelle à la fréquence, et une fréquence ne saurait être négative.

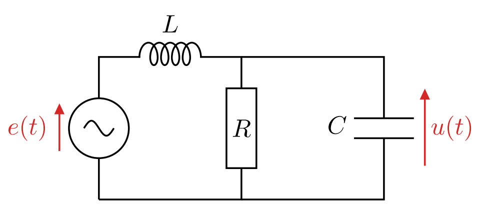
3) Signaux en quadrature de phase

$$\Leftrightarrow \arg(\underline{H}(x)) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctan(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

C'est donc possible à la fois mathématiquement et physiquement, mais cela correspond à un signal d'entrée qui ne varie pas, c'est-à-dire un régime permanent : la sortie n'oscille donc pas non plus, et est simplement nulle. La quadrature de phase n'a donc pas vraiment de sens ici, la sortie est constamment nulle quand l'entrée est à son maximum.

★☆☆ II Condition de résonance

Le circuit ci-contre est alimenté par une source de tension sinusoïdale de f.é.m. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On s'intéresse à la tension $u(t)$ aux bornes du résistor et de la capacité montés en parallèle.

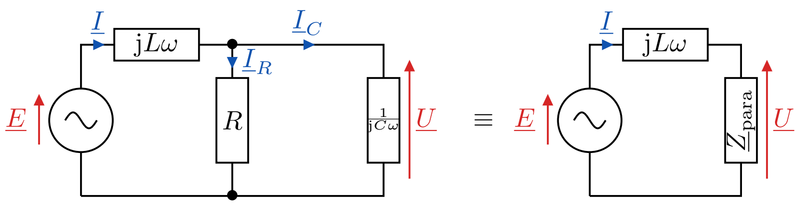


1 Établir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U}$ associée à $u(t)$ en régime sinusoïdal forcé, en fonction de E_0, x et ξ. La mettre sous la forme

$$\underline{U} = \frac{1}{1 - x^2 + 2\mathrm{j}\xi x} E_0 \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{où} \quad \xi \quad \text{et} \quad \omega_0 \quad \text{à déterminer.}$$

Réponse

Pour appliquer le pont diviseur de tension, il faut d'abord déterminer l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{para}}$ de l'association en parallèle de R et C, afin que celle-ci soit bien en série avec l'inductance L :



Association parallèle : $\underline{Y}_{\text{para}} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = \dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega = \dfrac{1 + \mathrm{j}RC\omega}{R} \Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{para}} = \dfrac{R}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$

Pont diviseur :
$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{\text{para}}}{\underline{Z}_{\text{para}} + \mathrm{j}L\omega} E_0 \cdot \frac{\underline{Y}_{\text{para}}}{\underline{Y}_{\text{para}}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}L\omega \cdot \underline{Y}_{\text{para}}} E_0$$
$$\Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{L\omega}{R} - LC\omega^2} E_0 = \frac{1}{1 - x^2 + 2\mathrm{j}\xi x} E_0$$

Identifica° :
$$-LC\cancel{\omega^2} = -x^2 = -\frac{\cancel{\omega^2}}{\omega_0^2} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

et
$$\frac{L}{R}\cancel{\omega} = 2\xi x = 2\xi\frac{\cancel{\omega}}{\omega_0} \Leftrightarrow \xi = \frac{\omega_0}{2}\frac{L}{R} \Leftrightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Attention E7.1 : ξ vs. Q

Attention, ξ ressemble au facteur de qualité Q ; seulement, **dans ce circuit**, le facteur de qualité serait $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$: il doit être **proportionnel à** R, car pour retrouver le LC idéal il faut que $R \to \infty$! On a bien $\xi \propto \frac{1}{Q}$, donc on s'attend à trouver la condition de résonance inverse.

2 Étudier l'existence éventuelle d'une résonance pour la tension $u(t)$.

Réponse

Amplitude réelle : $$U(x) = |\underline{U}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x)^2 + (2\xi x)^2}}$$

Numérateur constant, donc amplitude maximale quand le dénominateur est minimal :

$$U(x_r) = U_{\max} \Leftrightarrow f \ : \ x \mapsto \left(1 - x^2\right)^2 + (2\xi x)^2 \quad \text{minimal pour} \quad x = x_r$$

Dérivée : $$f'(x) = 2 \cdot \left(1 - x^2\right) \cdot (-2x) + 2 \cdot 2\xi \cdot 2\xi x$$

Résonance : $$f'(x_r) = 0 \Leftrightarrow -4x_r\left(1 - x_r^2\right) + 8\xi^2 x_r = 0$$

$x_r \neq 0$ pour résonance $\Rightarrow$ $$1 - x_r^2 = 2\xi^2 \Leftrightarrow x_r^2 = 1 - 2\xi^2 \Leftrightarrow \boxed{x_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

Condition de résonance : $$x_r \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\xi^2 \geq 0 \Leftrightarrow \xi^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$\boldsymbol{\xi \geq 1/\sqrt{2}}$: **pas de résonance**, l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{x = 0 \quad \text{et} \quad U(0) = E_0}$$

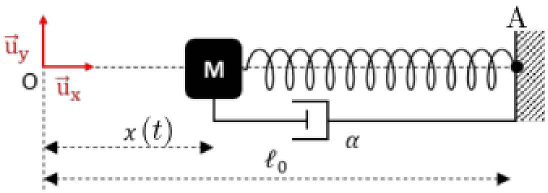
$\boldsymbol{\xi < 1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{x_r = \sqrt{1 - 2\xi^2} < 1}$$

III Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur comme une masse m, se déplaçant horizontalement le long d'un axe (Ox). On travaille dans le référentiel du laboratoire avec le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

Cette masse est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k et subit une force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Elle est par ailleurs soumise à une force $\vec{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur, qui vaut : $\vec{F}(t) = Ki(t)\vec{u}_x$ où K est une constante. On suppose que le courant est de la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.



$m = 10\,\mathrm{g}$, $K = 200\,\mathrm{N{\cdot}A^{-1}}$ et $I_m = 1{,}0\,\mathrm{A}$.

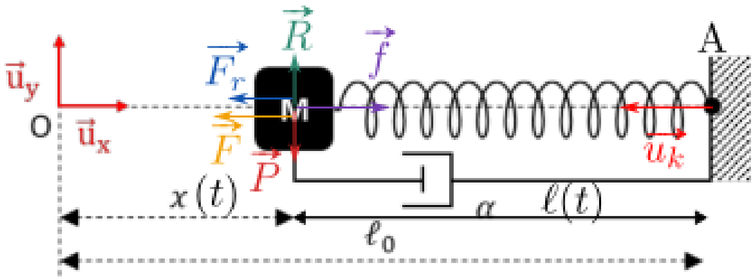
1 Établir le système, puis écrire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, la position de la masse m.

Réponse

- **Système** : masse ;
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen ;
- **Repère** : $(O,\vec{u_x},\vec{u_y})$;
- **Position** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\vec{u_x}$;
- **Vitesse** : $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{u_x}$;
- **Accélération** : $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{u_x}$;
- **Longueur ressort** : $\mathrm{MA} = \ell(t)$;
- **Longueur à vide** : $\mathrm{OA} = \ell_0 = x(t) + \ell(t)$;
- **Longueur relative** : $(\ell(t) - \ell_0) = -x(t)$.

Bilan des forces :

1) Poids $\vec{P} = -mg\vec{u_y}$;
2) Réaction du support $\vec{R} = R\vec{u_y}$;
3) Force de rappel du ressort $\vec{F}_r = -k\underbrace{(\ell(t)-\ell_0)}_{=-x(t)}\underbrace{\vec{u_k}}_{=-\vec{u_x}} = -kx(t)\vec{u_x}$;
4) Force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{u_x}$;
5) **Force excitatrice** $\vec{F} = KI_m\cos(\omega t)\vec{u_x}$.



Avec le PFD :
$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_r + \vec{f} + \vec{F}$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{x}(t)\vec{u_x} = \left(-kx(t) - \alpha\dot{x}(t) + KI_m\cos(\omega t)\right)\vec{u_x} + (R - mg)\vec{u_y}$$

La projection sur $\vec{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids. Sur l'axe $\vec{u_x}$ on trouve

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = KI_m\cos(\omega t)}$$

2 La mettre sous forme canonique et identifier les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.

Réponse

Canonique : $\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + {\omega_0}^2 x(t) = \frac{KI_m}{m}\cos(\omega t)}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$

3 Justifier qu'en régime permanent, on ait $x(t) = X_m\cos(\omega t + \phi)$

Réponse

On sait que pour une entrée sinusoïdale, un système aura une solution homogène donnant un régime transitoire et une solution particulière de la forme de l'entrée : en RSF, on étudie le régime permanent où seule la solution particulière est conservée, et on pourra donc écrire $x(t) = X_m\cos(\omega t + \phi)$.

4 Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X}$ de $x(t)$.

Réponse

En passant en complexes,
$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{X} + \mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{X} + {\omega_0}^2\underline{X} = \frac{KI_m}{m}$$

$$\Leftrightarrow \underline{X} = \frac{KI_m}{m} \times \frac{1}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + \frac{\mathrm{j}}{Q}\omega\omega_0} \Leftrightarrow \underline{X} = \frac{KI_m}{\underbrace{m{\omega_0}^2}_{=k}}\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}} \Leftrightarrow \boxed{\underline{X} = \frac{KI_m/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

5 Exprimer $X_m(\omega)$. Existe-t-il toujours une résonance ?

Réponse

En réels :
$$\boxed{X(\omega) = |\underline{X}| = \frac{KI_m/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

Elle est maximale quand le dénominateur est minimal. Après calcul, on trouve

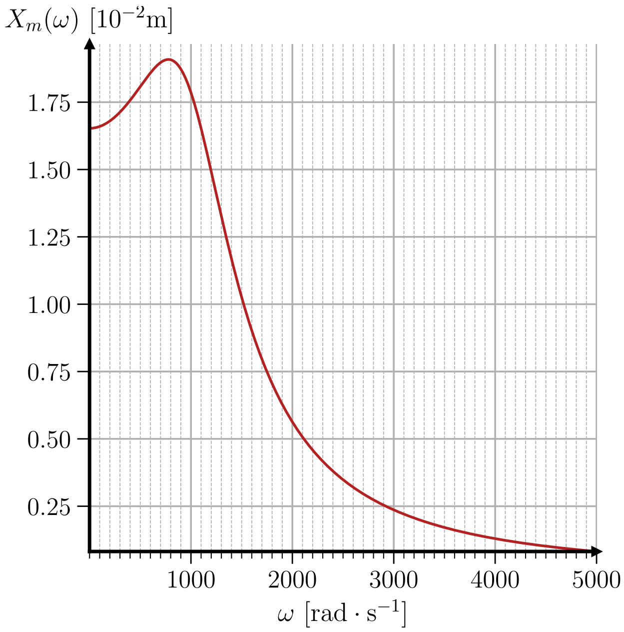
$\mathbf{Q \leq 1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour $\boxed{\omega = 0 \quad \text{et} \quad X(0) = \frac{KI_m}{k}}$

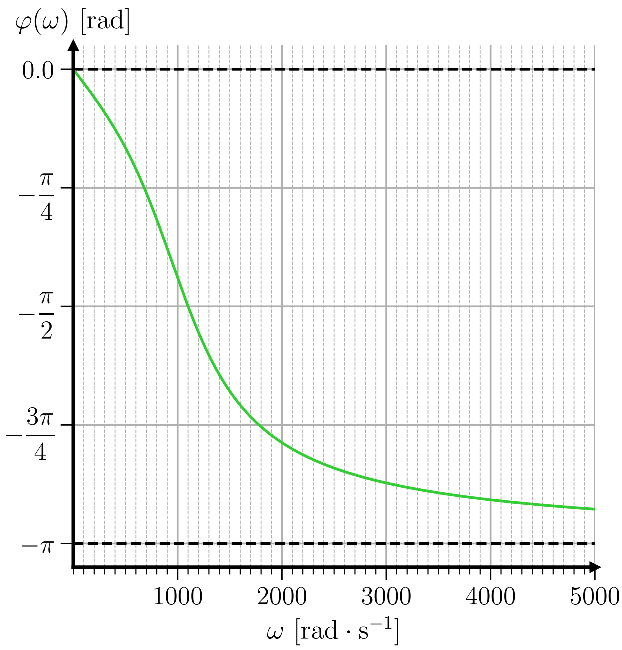
$\mathbf{Q > 1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} < \omega_0} \quad \text{et} \quad \boxed{X(\omega_r) = \frac{KI_m}{k}\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas toujours résonance en élongation**, et que **la résonance est d'autant aiguë que Q est élevé**.

On a tracé ci-dessous les courbes de $X_m(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$.





6 Pour quelle pulsation le déplacement est-il en quadrature de phase avec la force excitatrice ? Déterminer alors graphiquement la pulsation propre ω_0.

Réponse

$$\arg(\underline{X}) = -\arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}^2 + \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)\right) = \arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}^2\right) - \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)$$

Quadrature $\Rightarrow$ $\arg(\underline{X}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{\omega_{\text{quad}}}{\omega_0}^2\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega_{\text{quad}} = \omega_0}$

Ainsi $\underline{\omega_0 = 1100\,\text{rad·s}^{-1}}$

On pourrait déterminer le facteur de qualité en trouvant que le maximum d'amplitude se trouve à $\omega_r = 800\,\text{rad·s}^{-1}$.

7 Relever sur le graphique la valeur de ω_r ; en déduire la valeur de Q.

Réponse

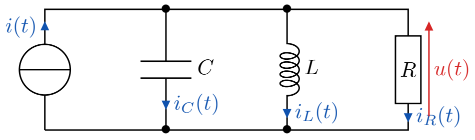
On relève $\underline{\omega_r = 800\,\text{rad·s}^{-1}}$ or $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2Q^2} = 1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2 \Leftrightarrow 2Q^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}^2\right)} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_r = 800\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \\ \omega_0 = 1100\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{Q \approx 1{,}03}$

IV Résonance d'intensité dans un circuit RLC parallèle

L'antenne d'un émetteur radio peut être modélisée par un circuit électrique équivalent composé de l'association en parallèle d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.



L'antenne est alimentée par une source idéale de courant dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps : $i(t) = I_0\cos(\omega t)$.

On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension $u(t)$ aux bornes de l'antenne, qui correspond au signal envoyé, dépend de ω.

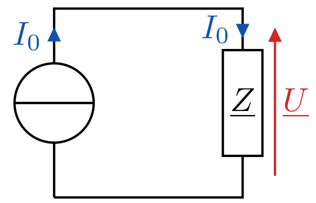
1 Déterminer l'impédance complexe de l'association des dipôles R,L et C.

Réponse

Soit $\underline{Z}$ l'impédance équivalente à cette association, et $\underline{Y}$ son admittance. On a

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega = \frac{\mathrm{j}L\omega + R + (\mathrm{j}C\omega)R(\mathrm{j}L\omega)}{\mathrm{j}RL\omega}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z} = \frac{\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}}$$



2 En déduire l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension u en fonction de ω, I_0, R, L et C. La mettre sous la forme

$$\underline{U} = \frac{U_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec U_0, Q et ω_0 des constantes à déterminer en fonction de données du problème.

Réponse

On a $\underline{U} = \underline{Z}I_0$ par définition de l'impédance, et étant donné que l'intensité n'a pas de phase à l'origine ($\underline{I} = I_0$). Ainsi

$$\underline{U}_0 = \frac{I_0\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}$$

On rend cette équation plus lisible en mettant le dénominateur sous une forme adimensionnée en divisant par $\mathrm{j}L\omega$, ce qui donne

$$\underline{U} = \frac{RI_0}{1 + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}RC\omega} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{RI_0}{1 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}}$$

Ainsi,

$$U_0 = RI_0 \quad \text{et} \quad \frac{Q}{\omega_0} = RC \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{R}{L}$$

$$\Leftrightarrow Q^2 = R^2\frac{C}{L} \Leftrightarrow \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}} \quad \text{et} \quad {\omega_0}^2 = \frac{\cancel{R}}{\cancel{R}LC} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

D'où

$$\boxed{\underline{U} = \frac{U_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

3 Pour quelle pulsation ω_r l'amplitude réelle U de u prend-elle sa valeur maximale $U_{\max}$? Que vaut $U_{\max}$ en fonction des données du problème ? Conclure sur la fréquence à utiliser.

Réponse

L'amplitude réelle est

$$U = |\underline{U}| = \frac{U_0}{\sqrt{1 + Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Cette tension réelle est maximale si le dénominateur est minimal. Or, sa valeur minimale est de 1, atteinte pour $\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right) = 0$: cela implique qu'il y a résonance si $\boxed{\omega_r = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. On trouve alors

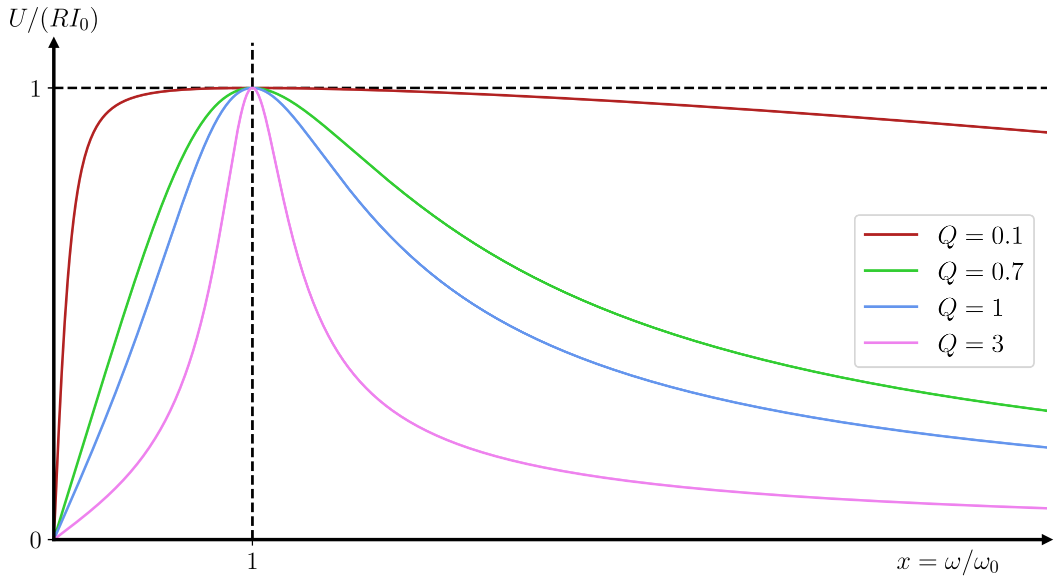
$$\boxed{U(\omega_0) = U_{\max} = RI_0}$$

---

4 Représenter le graphe donnant U en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Réponse

On trace pour différentes valeurs de Q, et on obtient :



---

5 Exprimer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$.

Réponse

On cherche donc les pulsations de coupure $\omega_{k\in[1\ ;\ 2]}$ telles que $U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit

$$U(\omega_k) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega_k}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{RI_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{Q^2\left(\frac{\omega_k}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_k}\right)^2 = 1}$$

On prend la racine carrée de cette équation, **en prenant les deux solutions possibles** :

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{\omega_k}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_k}\right) &= \pm 1 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{\omega_k}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_k}\right) \times \omega_k\omega_0 &= \pm\frac{\omega_k\omega_0}{Q} \\
\Leftrightarrow \omega_k^2 - {\omega_0}^2 &= \pm\frac{\omega_k\omega_0}{Q} \\
\Leftrightarrow \boxed{\omega_k^2 + \frac{\omega_0}{Q}\omega_k - {\omega_0}^2 = 0} &\quad \text{et} \quad \boxed{\omega_k^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega_k - {\omega_0}^2 = 0} \\
\Rightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q} + 4{\omega_0}^2 \\
\Leftrightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 + 4Q^2\right) \\
\Rightarrow \omega_{1,\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} &\quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} \\
\Leftrightarrow \omega_{1,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1+4Q^2}\right) &\quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1+4Q^2}\right)
\end{aligned}$$

De ces quatre racines, seules deux sont positives : la solution avec $-1-\sqrt{1+4Q^2}$ est évidemment négative, et celle avec $1-\sqrt{1+4Q^2}$ également. Ainsi, il ne nous reste que

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2}-1\right) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2}+1\right)$$

Il ne reste qu'à calculer la différence pour avoir la bande passante :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}$$

6 On se place dans le cas $R = 7\,\Omega$, $L = 1{,}2\times 10^{-8}\,\mathrm{H}$ et $C = 2{,}3\times 10^{-10}\,\mathrm{F}$. Calculer la valeur de l'acuité $A_c = \omega_0/\Delta\omega$ de la résonance. Interpréter sa dépendance en R.

Réponse

$\omega_0/\Delta\omega$ est directement Q, donc on a

$$A_c = Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 7\,\Omega \\ L = 1{,}2\times 10^{-8}\,\mathrm{H} \\ C = 2{,}3\times 10^{-10}\,\mathrm{F} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{A_c = 5{,}2}$$

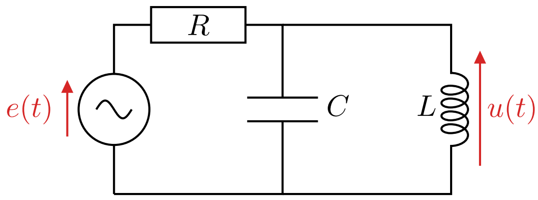
L'acuité augmente avec la résistance : c'est normal puisque la résistance est en parallèle du circuit, donc une absence de résistance signifie ici R infinie (pour qu'aucun courant ne la traverse).

Électrocinétique – chapitre 7

Correction du TD d'entraînement

I Résonance d'un circuit bouchon

On considère le circuit RLC représenté ci-contre, composé d'un résistor, de résistance R, d'une bobine idéale d'inductance L, d'un condensateur idéal, de capacité C, alimenté par une source idéale de tension, de f.e.m. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé.



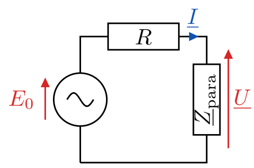
1 Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de $u(t)$ en fonction de E_0, R, L, C et ω.

Réponse

Pour exprimer $\underline{U}$, on passe en complexes et **après impédance équivalente** pour rendre les impédances en série, on effectue un pont diviseur de tension :

$$\underline{Y}_{\text{para}} = \text{j}C\omega + \frac{1}{\text{j}L\omega} \Rightarrow \underline{U} = \frac{\underline{Z}_{\text{para}}}{\underline{Z}_{\text{para}} + R} E_0 = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{para}}} E_0 = \frac{E_0}{1 + \text{j}\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)}$$

en utilisant que $1/\text{j} = -\text{j}$.



2 Établir qu'il existe un phénomène de résonance pour la tension $u(t)$. Préciser la pulsation ω_0 à laquelle ce phénomène se produit et la valeur de l'amplitude réelle de $u(t)$ à cette pulsation.

Réponse

L'amplitude réelle est
$$U(\omega) = |\underline{U}| = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}$$

Comme le numérateur est constant, cette tension réelle est maximale si le dénominateur est minimal, donc si $\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right) = 0$: cela implique qu'il y a résonance si $\boxed{\omega_r = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. On trouve alors $\boxed{U(\omega_0) = U_{\max} = E_0}$

3 Mettre l'amplitude réelle U de $u(t)$ sous la forme :

$$U = \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

avec Q un facteur sans dimension à exprimer en fonction de R,L et C.

Réponse

$$Q\omega_0 = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad \frac{Q}{\omega_0} = RC \Rightarrow \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

4 Exprimer la bande passante $\Delta\omega$ de cette résonance en fonction de Q et ω_0.

Réponse

On cherche donc les pulsations de coupure telles que $U(\omega_k) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit

$$U(\omega_k) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_k}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_k}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{Q^2\left(\frac{\omega_k}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_k}\right)^2 = 1}$$

On pose alors $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite ; on cherche donc

$$
\begin{aligned}
\boxed{Q^2\left(x_k - \frac{1}{x_k}\right)^2 = 1} & \\
& \quad \sqrt{\cdot} \\
\Leftrightarrow Q\left(x_k - \frac{1}{x_k}\right) = \pm 1 & \\
& \quad \times x_k \\
\Leftrightarrow Q{x_k}^2 - Q = \pm x_k & \\
& \quad -\pm = \mp \\
\Leftrightarrow Q{x_k}^2 \mp x_k - Q = 0 &
\end{aligned}
$$

On a alors **deux trinômes**, soit **quatre racines possibles**.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \Delta = 1 + 4Q^2 \\
&\Rightarrow x_{k,\pm,\pm} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}
\end{aligned}
\quad \text{Solutions}
$$

On ne garde que les racines positives, sachant que $\boxed{\sqrt{1+4Q^2} > 1}$:

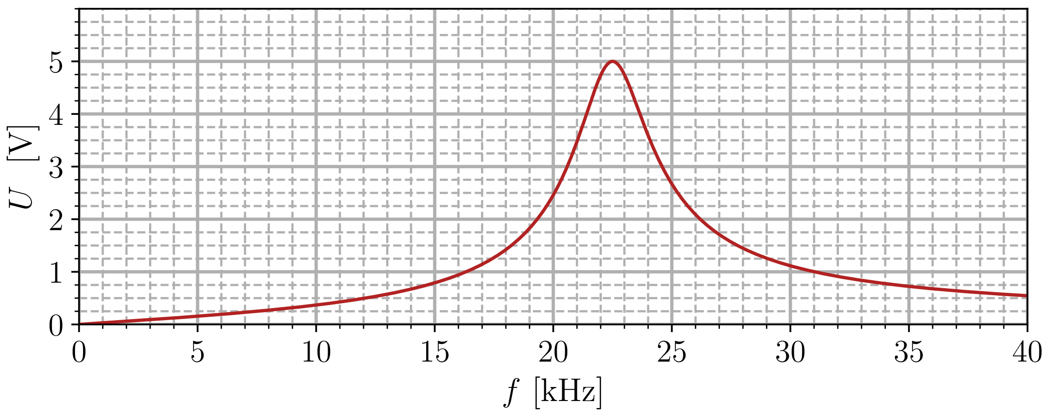
$$
x_1 = x_{k,-,+} = \frac{1}{2Q}\left(-1 + \sqrt{1+4Q^2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = x_{k,+,+} = \frac{1}{2Q}\left(1 + \sqrt{1+4Q^2}\right)
$$

puis on obtient la largeur de la bande passante en calculant la différence $|x_2 - x_1|$:

$$
x_2 - x_1 = \frac{1 + \cancel{\sqrt{1+4Q^2}} - \left(-1 + \cancel{\sqrt{1+4Q^2}}\right)}{2Q} \Leftrightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}
$$

---

5 En déduire les valeurs numériques de C, Q et E_0 à l'aide du graphe ci-dessous représentant l'amplitude réelle de $u(t)$ en fonction de la fréquence $f = \omega/2\pi$, sachant que $L = 1\,\mathrm{mH}$ et $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$.



Réponse

Tensions : $U_{\max} = 5\,\mathrm{V} = E_0$ donc $U_{\mathrm{eff}} = \dfrac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \approx 3{,}5\,\mathrm{V}$

Fréquences : $f_0 = 22{,}5\,\mathrm{kHz}$ avec $f_1 = 21\,\mathrm{kHz}$ et $f_2 = 24\,\mathrm{kHz}$ $\Rightarrow$ $\Delta f = 3\,\mathrm{kHz}$

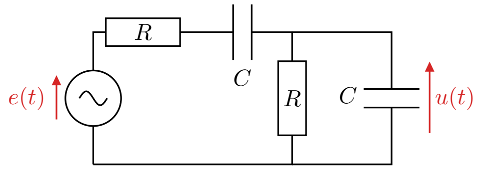
Facteur de qualité : $\boxed{Q = \dfrac{f_0}{\Delta f}} \Rightarrow \underline{Q \approx 7{,}5}$

On isole C : $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} \Leftrightarrow \boxed{C = \dfrac{Q^2 L}{R^2}}$ avec $\begin{cases} Q = 7{,}5 \\ L = 1\,\mathrm{mH} \\ R = 1\,\mathrm{k\Omega} \end{cases}$

A.N. : $\boxed{C = 5{,}6 \times 10^{-8}\,\mathrm{F}}$

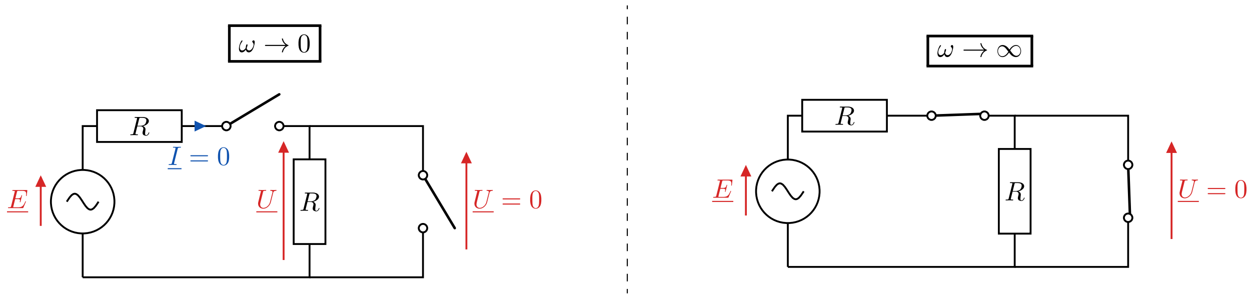
II Filtre de WIEN

On considère le circuit ci-contre avec $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. On note $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ et on pose $H_m = U_m/E_m$.



1 Déterminer les valeurs limites de $u(t)$ à basse et haute fréquences.

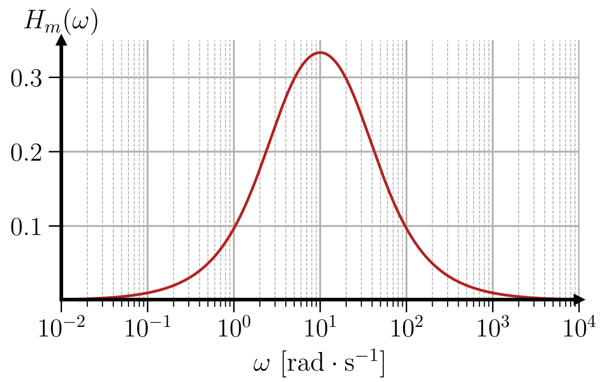
Réponse

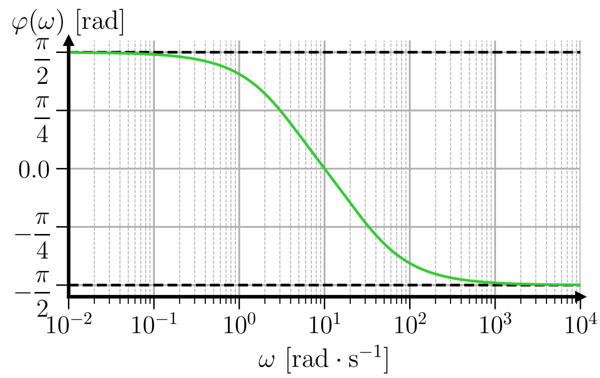


Dans la limite très hautes fréquences, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{u} = 0$. Dans la limite très basses fréquences, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et on a donc également $\underline{u} = 0$. Selon toute vraisemblance, c'est donc un filtre **passe-bande**.

◇

Les courbes représentatives de $H_m(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sont fournies par les figures ci-dessous.





2 Observe-t-on un phénomène de résonance en tension ? Justifier.

Réponse

On observe bien une résonance en tension, étant donné qu'on trouve un **maximum de l'amplitude pour** $\omega \neq 0$ **et** $\omega \neq \infty$.

◇

3 Déterminer graphiquement la pulsation de résonance, les pulsations de coupure et la bande passante du filtre.

Réponse

On lit $\boxed{\omega_r = 10\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$, et on trouve les pulsations de coupure en traçant une droite horizontale à $H_{m,\max}/\sqrt{2} = 0{,}23$ (avec $H_{m,\max} = 0{,}33$) et en prenant les abscisses des intersections. On trouve alors

$$\boxed{\omega_1 = 2\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2 = 20\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta\omega = 18\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

En effet, l'axe des abscisses est en échelle logarithmique, il faut donc faire attention à la lecture.

◇

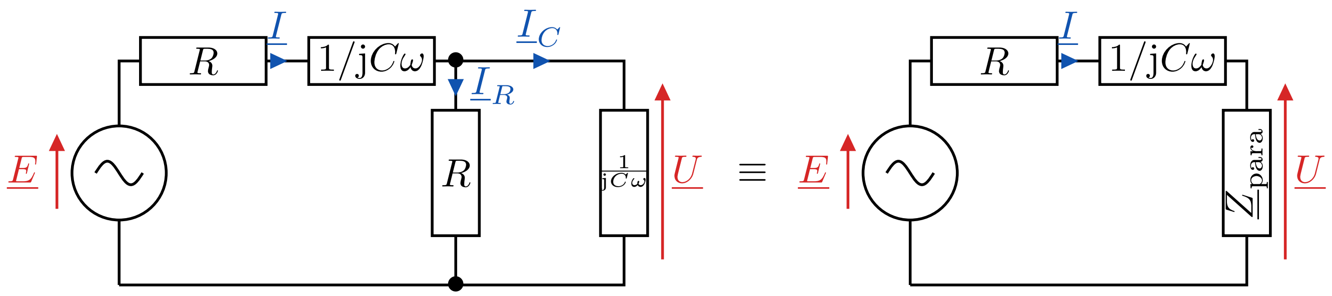
4 Après avoir associé certaines impédances entre elles, établir l'expression de $\underline{H} = \underline{u}/\underline{e}$. La mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

avec H_0, ω_0 et Q des constantes à exprimer en fonction (éventuellement) de R et C.

Réponse

Notons $\underline{Z}_{\text{para}}$ l'impédance et $\underline{Y}_{\text{para}}$ l'admittance de l'association RC parallèle. En utilisant cette impédance, on reconnaît un pont diviseur de tension :



$$\underline{H} = \frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_{\text{para}}}{\underline{Z}_{\text{para}} + \underline{Z}_R + \underline{Z}_C} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + (\underline{Z}_R + \underline{Z}_C)\,\underline{Y}_{\text{para}}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{Y}_{\text{para}}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\left(\frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{3 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}}$$

En factorisant par 3 et en utilisant les notations introduites dans l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1 + \frac{\mathrm{j}}{3}\left(x - \frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\left\{\begin{aligned} H_0 &= 1/3 \\ \omega_0 &= \frac{1}{RC} \\ Q &= 1/3 \end{aligned}\right.}$$

Ce qui est remarquable avec ce montage, c'est que **le facteur de qualité est de 1/3 peu importe les valeurs de R et C**, tant que ce sont les mêmes R et C en série et en dérivation.

◇

5 Déterminer graphiquement la valeur du produit RC.

Réponse

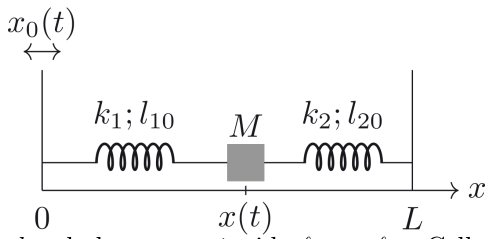
Par cette étude, on trouve que $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{RC}$; ainsi, on a simplement

$$\boxed{RC = 0{,}10\,\mathrm{Hz}}$$

◇

☆★★ III Système à deux ressorts

Un point matériel M, de masse m, peut se déplacer sur une tige *horizontale* parallèle à l'axe Ox au sein d'un fluide visqueux qui exerce sur lui la force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$ avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ du laboratoire. Les frottements entre M et l'axe horizontal sont négligeables. On repère M par son abscisse $x(t)$.



M est relié à deux parois verticales par deux ressorts de raideurs k_1 et k_2, de longueurs à vide ℓ_{10} et ℓ_{20}. Celle de droite est immobile en $x = L$, celle de gauche, d'abscisse $x_0(t)$, est animée d'un mouvement d'équation horaire $x_0(t) = X_{0m}\cos(\omega t)$. On supposera que $L = \ell_{10} + \ell_{20}$.

1 Identifier les différentes forces s'exerçant sur M.

Réponse

◇ **Système** : masse ;

◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O,x,y,t)$;

◇ **Position de la masse** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\overrightarrow{u_x}$;

◇ **Longueur ressort 1** : $\ell_1(t) = x(t) - x_0(t)$;

◇ **Longueur ressort 2** : $\ell_2(t) = L - x(t)$.

Bilan des forces :

1) Poids $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_y}$;

2) Réaction du support $\vec{R} = R\overrightarrow{u_y}$;

3) Rappel du ressort 1 $\vec{F_1} = -k_1(\ell_1(t) - \ell_{10})\overrightarrow{u_x}$;

4) Rappel du ressort 2 $\vec{F_2} = k_2(\ell_2(t) - \ell_{20})\overrightarrow{u_x}$;

5) Force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{x}(t)\overrightarrow{u_x}$.

◇

2 Déterminer la position d'équilibre x_{eq} de M lorsque la paroi de gauche est immobile en $x_0 = 0$.

Réponse

Avec le PFD, on trouve

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{f} \\ \Leftrightarrow \ddot{x}(t)\overrightarrow{u_x} &= \left(-k_1(\ell_1(t) - \ell_{10}) + k_2(\ell_2(t) - \ell_{20}) - h\dot{x}(t)\right)\overrightarrow{u_x} + (-mg + R)\,\overrightarrow{u_y} \end{aligned}$$

La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids. Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) &= -k_1(\ell_1(t) - \ell_{10}) + k_2(\ell_2(t) - \ell_{20}) \\ \Leftrightarrow m\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) &= -k_1(x(t) - x_0(t) - \ell_{10}) + k_2(L - x(t) - \ell_{20}) \\ \Leftrightarrow m\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) + (k_1 + k_2)\,x(t) &= k_1x_0(t) + k_2\underbrace{(L - \ell_{20})}_{=\ell_{10}} + k_1\ell_{10} \\ \Leftrightarrow \boxed{m\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) + (k_1 + k_2)\,x(t) = k_1x_0(t) + (k_1 + k_2)\,\ell_{10}} \end{aligned}$$

À l'équilibre, $x(t) = x_{\text{eq}}$ donc les dérivées de $x(t)$ sont nulles, et $x_{0,\text{eq}} = 0$, d'où

$$(k_1 + k_2)x_{\text{eq}} = (k_1 + k_2)\ell_{10} \Leftrightarrow \boxed{x_{\text{eq}} = \ell_{10}}$$

◇

3 On introduit $x_h(t) = x(t) - x_{\text{eq}}$. Établir l'équation différentielle sur $x_h(t)$ lorsque la paroi bouge.

Réponse

Cette fois-ci, on garde $x_0(t)$ dans l'équation. Il vient alors

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + (k_1 + k_2)(x(t) - x_{\text{eq}}) = k_1x_0(t)$$

et en effectuant le changement de variable $x_h(t) = x(t) - x_{\text{eq}}$, on trouve l'équation habituelle

$$\boxed{m\ddot{x}_h(t) + h\dot{x}_h(t) + kx_h(t) = KX_{0m}\cos(\omega t)}$$

avec $k = k_1 + k_2$.

◇

Pour étudier le régime sinusoïdal forcé, on introduit les grandeurs complexes $\underline{x}_0(t) = X_{0m}\exp(\mathrm{j}\omega t)$, $\underline{x}_h(t) = X_m\exp(\mathrm{j}(\omega t + \varphi))$ et $\underline{v}(t) = V_m\exp(\mathrm{j}(\omega t + \phi))$ associées à $x_0(t)$, $x_h(t)$ et $v(t) = \dot{x}_h(t)$.

4 Définir les amplitudes complexes $\underline{X}_0$, $\underline{X}$ et $\underline{V}$ de $x_0(t)$, $x_h(t)$ et $v(t)$.

Réponse

On a simplement $\underline{X}_0 = X_{0m}$, $\underline{X} = X_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$ et $\underline{V} = V_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$.

◇

5 En exprimant ω_0, Q et α en fonction des données du problème, établir la relation :

$$\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{X}_0$$

Réponse

En utilisant l'équation différentielle mais en complexes et sous forme canonique, on trouve

$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{X} + \mathrm{j}\omega\frac{h}{m}\underline{X} + \frac{k}{m}\underline{X} = \frac{k_1}{m}X_{0m} \Leftrightarrow \underline{X} = \frac{k_1X_{0m}}{m} \times \frac{1}{\dfrac{k}{m} - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\dfrac{h}{m}}$$

Étant donné que $V = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$, $\underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{X}$, soit

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \frac{k_1X_{0m}}{m} \times \frac{\mathrm{j}\omega}{\dfrac{k}{m} - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\dfrac{h}{m}} \\ \Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{k_1X_{0m}}{m} \times \frac{1}{\dfrac{h}{m} - \mathrm{j}\dfrac{k}{m\omega} + \mathrm{j}\omega} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V} = \frac{k_1}{h - \mathrm{j}\dfrac{k}{\omega} + \mathrm{j}m\omega} X_{0m}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V} = \frac{k_1/h}{1 + \mathrm{j}\left(\dfrac{m\omega}{h} - \dfrac{k}{h\omega}\right)} \underline{X}_0$$

Avec $Q\omega_0 = \frac{k}{h}$ et $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{m}{h}$, on trouve bien

$$\boxed{\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \underline{X}_0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{k_1}{h} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ Q &= \frac{\sqrt{km}}{h} \end{aligned}\right.}$$

---

6 Mettre en évidence l'existence d'une résonance de vitesse.

Réponse

L'amplitude réelle de la vitesse donne

$$V_m(\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} X_{0m}$$

qui est maximale pour $\omega = \omega_0$. On observe donc bien une résonance en vitesse pour cette pulsation, avec $V_{\max} = \alpha X_{0m}$.
