TD application : filtrage linéaire

I Filtrage et spectres

Un signal périodique $e(t)$ (de fréquence 1 kHz), dont le spectre est donné en figure 1, est envoyé à l'entrée de trois filtres différents. On effectue l'analyse spectrale du signal de sortie pour chaque filtre, les spectres obtenus sont donnés en figure 2, 3 et 4.

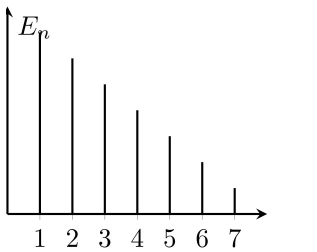


Fig. 1

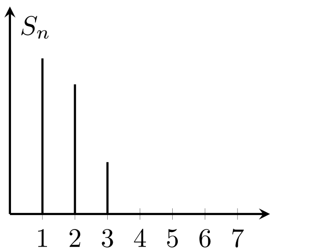


Fig. 2

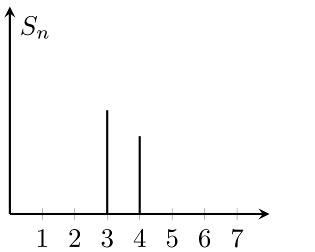


Fig. 3

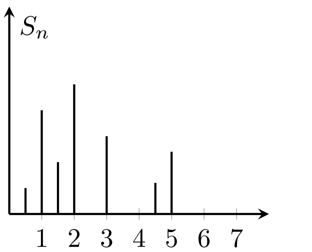
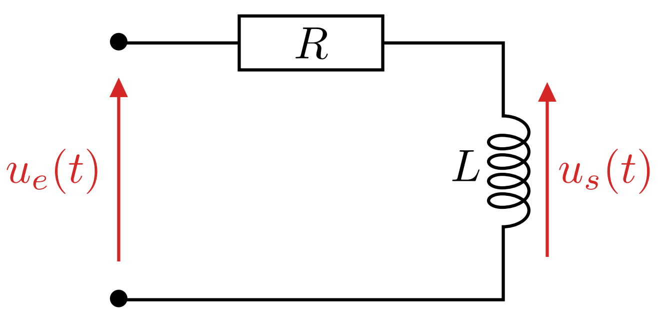


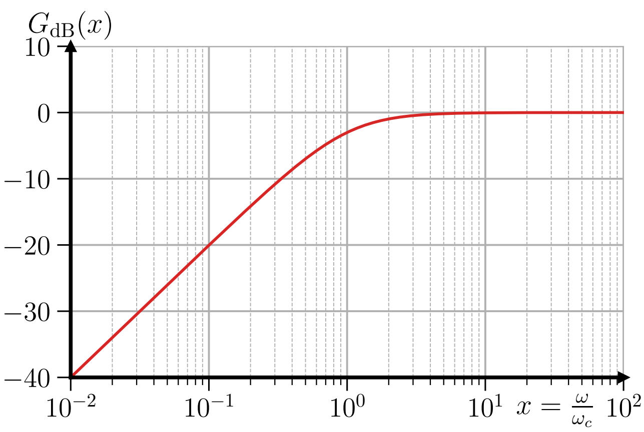
Fig. 4

1 Quelles caractéristiques de chaque filtre peut-on déduire de ces spectres ?

II Filtre avec une bobine

On considère ce circuit, avec $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 10\,\mathrm{mH}$, donnant le diagramme de Bode ci-dessous où $\omega_c = 1 \times 10^5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$:





1 Quelle est la nature du filtre ? Comment se comporte-t-il aux basses et hautes fréquences ? On donnera notamment sa pente en basses fréquences.

2 On considère une tension d'entrée $u_e(t)$ somme de 3 harmoniques de mêmes amplitudes E, de mêmes phases initiales, mais de fréquences respectives $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 1\,\mathrm{kHz}$ et $f_3 = 100\,\mathrm{kHz}$. Donner le spectre de sortie **en utilisant le diagramme**.

3 Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = H_0 \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$

avec H_0 et ω_c des constantes à préciser.

4 Montrer par le calcul que la pente de l'asymptote du diagramme de Bode pour $\omega \ll \omega_c$ est de 20 dB/décade.

5 Déterminer alors le spectre de sortie du singal précédent **par le calcul direct**.

III Lecture de diagrammes de Bode

On donne Figure E8.1 les diagrammes de Bode de quatre filtres.

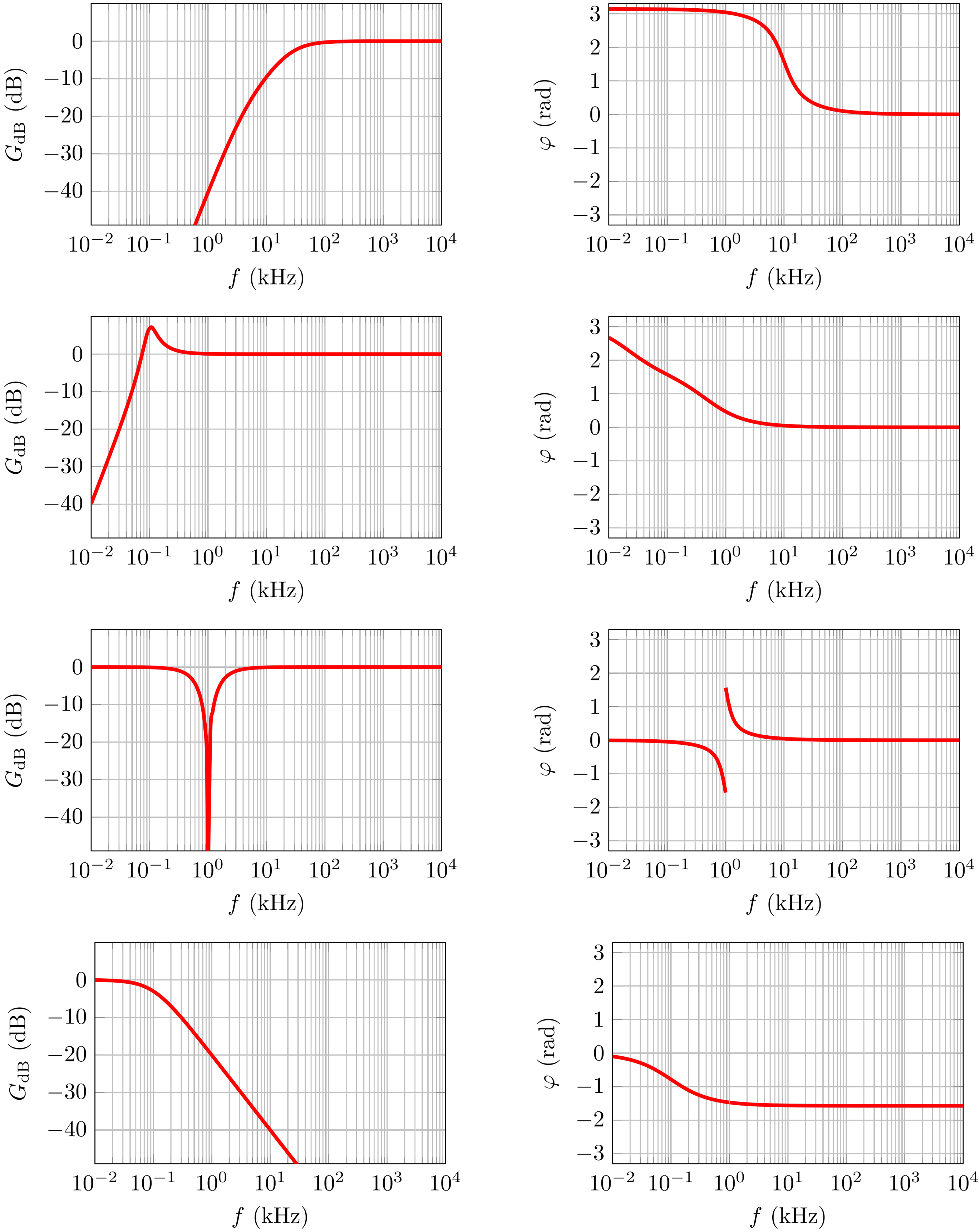


Figure E8.1 – Diagrammes exercice III

$\boxed{1}$ Pour chacun d'eux :

1) Indiquer le type de filtre dont il s'agit.

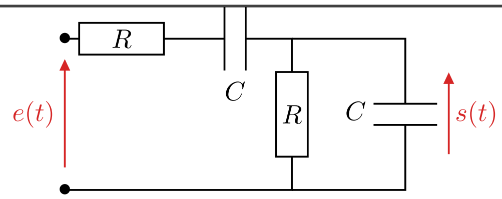
2) Déterminer l'expression du signal $s(t)$ de sortie du filtre pour un signal d'entrée

$$e(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega t) + E_{10} \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_{100} \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

avec une fréquence $f = 1\,\mathrm{kHz}$

IV Filtre de WIEN

On s'intéresse au filtre de WIEN, représenté ci-contre.



1 Par analyse des comportements asymptotiques, déterminer le type de filtre dont il s'agit.

2 Établir sa fonction de transfert complexe sous la forme

$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

où H_0, ω_0 et Q sont des constantes à exprimer en fonction (éventuellement) de R et C.

3 Calculer simplement le gain maximal du filtre, puis le gain maximal en décibels, et le déphasage correspondant à ce maximum.

4 Représenter le diagramme de BODE asymptotique du filtre et en déduire qualitativement le tracé réel.

5 Calculer la pulsation propre ω_0 pour $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 500\,\mathrm{nF}$. Donner le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est

$$e(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos(10\omega t) + E_0 \cos(100\omega t)$$

avec $E_0 = 10\,\mathrm{V}$ et $\omega = 200\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

Électrocinétique – chapitre 8

TD entraînement : filtrage linéaire

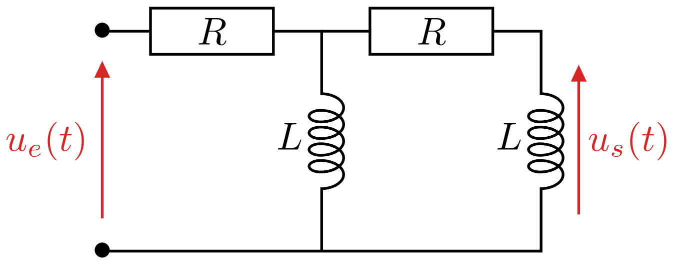
I Filtre ADSL

Vous avez égaré votre filtre ADSL. Heureusement, vous avez les connaissances pour en recréer un ! En sachant que les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une très large gamme de fréquences, divisée en deux parties :

- les signaux téléphoniques (transmettant la voix) utilisent les fréquences de 0 à 4 kHz ;
- les signaux informatiques (Internet) utilisent les fréquences de 25 kHz à 2 MHz.

1 Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? Les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

Vous réalisez le filtre ci-dessous.



2 Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique en basses fréquences et en hautes fréquences. En déduire pour quels signaux il peut être utilisé.

3 Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + 3\mathrm{j}x} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

et exprimer ω_0 en fonction de R et L.

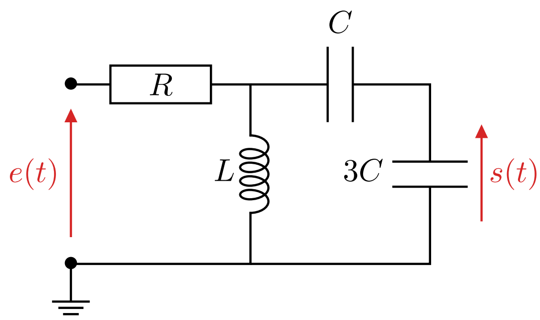
4 Y a-t-il résonance ? Justifier.

5 Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de ce filtre, puis esquisser les allures de leurs courbes réelles en les justifiant.

6 Vous possédez des résistances de 100 Ω. Quelle valeur d'inductance L choisir pour réaliser le filtre souhaité ?

II Filtre de Colpitts

On considère le quadripôle suivant, où C est une capacité, R une résistance et L une inductance. Il est utilisé en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω, en sortie « ouverte » (rien n'est branché aux bornes de sortie).



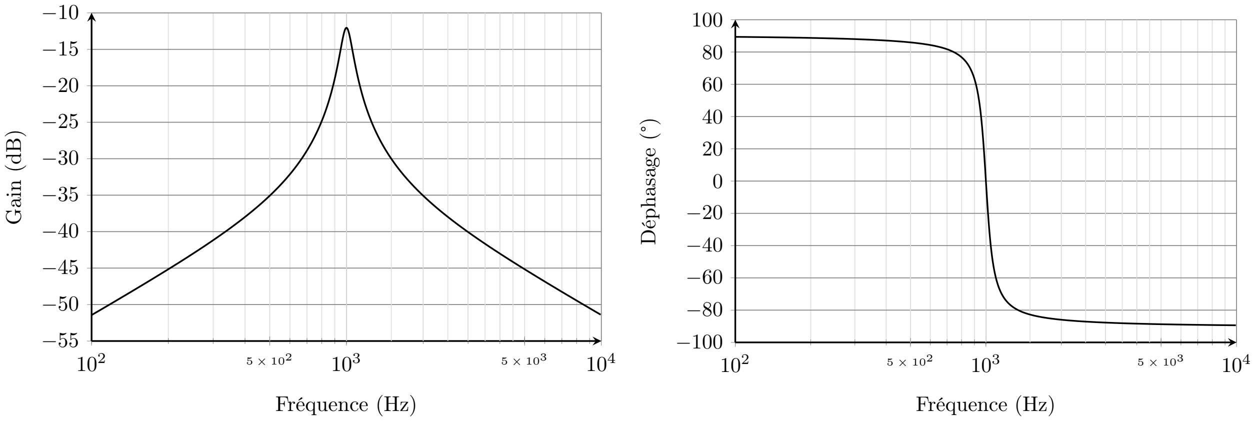
1 Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en hautes et basses fréquences. De quel type de filtre s'agit-il ?

2 Déterminer sa fonction de transfert $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$ et la mettre sous l'une des formes équivalentes :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{A}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{A}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2} + \dfrac{\mathrm{j}}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

En introduisant des constantes A, ω_0 et Q dont on précisera les expressions en fonction de R, L et C.

Le diagramme de BODE de ce quadripôle pour $Q = 6$ est donné ci-dessous.



3 Justifier l'allure des parties rectilignes du diagramme. Déduire du diagramme la valeur de la fréquence d'accord $f_0 = \omega_0/2\pi$ ainsi que des fréquences de coupure. En rappelant le lien entre acuité, facteur de qualité et largeur de bande passante, vérifier la cohérence de ces résultats.

III Filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3

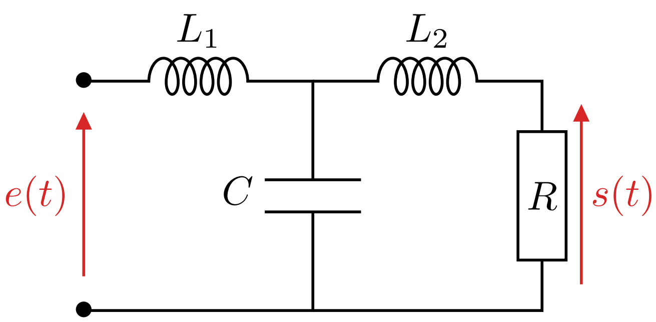
On veut réaliser un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3, dont le gain de sa fonction de transfert harmonique en tension $\underline{H}$ s'exprime :

$$G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^6}}$$

1 Montrer qu'une fonction de transfert $\underline{H}(x) = \dfrac{1}{1 + 2\mathrm{j}x + 2(\mathrm{j}x)^2 + (\mathrm{j}x)^3}$ correspond bien à un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

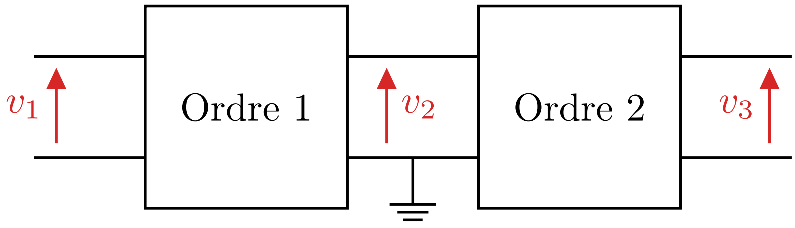
2 Étudier et représenter le diagramme de BODE asymptotique en amplitude de cette fonction de transfert.

3 On considère le quadripôle ci-dessous :



Calculer en fonction de R et ω_0, les valeurs de L_1, L_2 et C pour que ce filtre soit un filtre de BUTTERWORTH.

4 Rappeler la condition sur les impédances des filtres pour les mettre en cascade. Justifier que l'on puisse réaliser le filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3 en associant en cascade un filtre d'ordre 1 et un filtre d'ordre 2, comme sur le circuit suivant :



Préciser alors la valeur du facteur de qualité du filtre d'ordre 2.