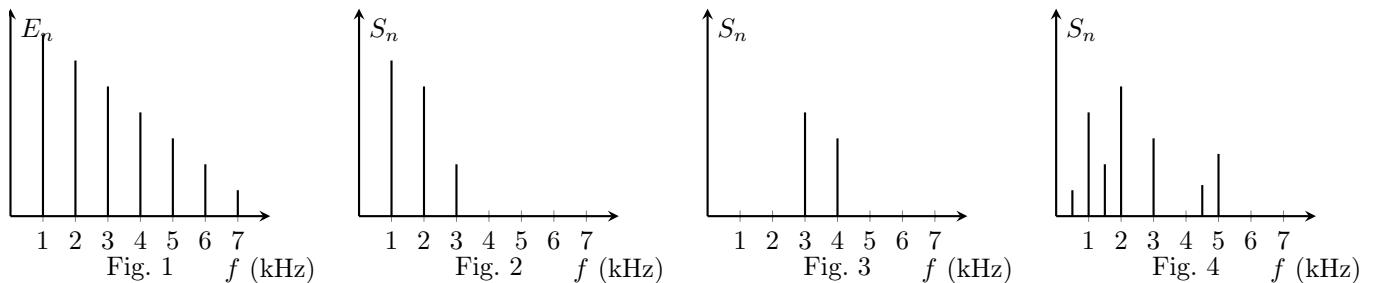


Correction du TD d'application



I Filtrage et spectres

Un signal périodique $e(t)$ (de fréquence 1 kHz), dont le spectre est donné en figure 1, est envoyé à l'entrée de trois filtres différents. On effectue l'analyse spectrale du signal de sortie pour chaque filtre, les spectres obtenus sont donnés en figure 2, 3 et 4.



- 1 Quelles caractéristiques de chaque filtre peut-on déduire de ces spectres ?

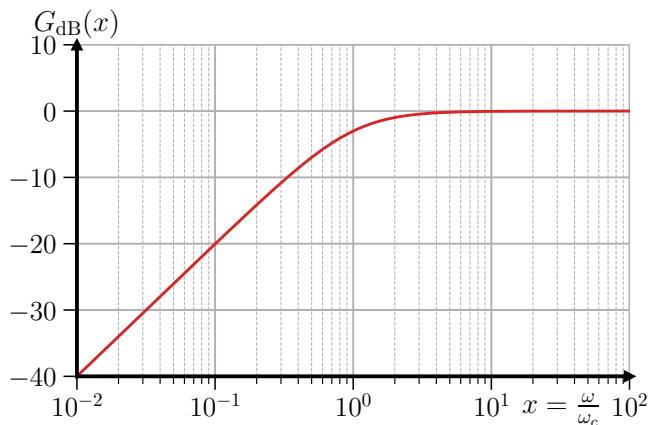
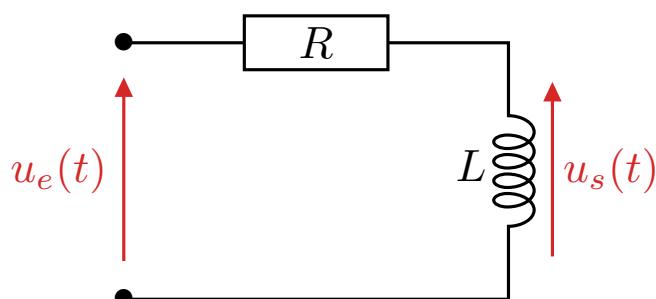
Réponse

- 1) Sur la figure deux, les basses fréquences sont globalement conservées, et les fréquences à partir de 3 kHz sont fortement atténuées voire coupées : **c'est un passe-bas**.
- 2) Sur la figure trois, seules les fréquences entre 3 et 4 kHz sont gardées, les fréquences supérieures ou inférieures sont coupées : **c'est un passe-bande**.
- 3) Sur la figure quatre, on ne distingue pas de relation simple vue en cours ; on remarque de plus que de nouvelles fréquences apparaissent, ce qui n'est pas le cas dans le filtrage linéaire : **c'est un filtre non-linéaire**.



II Filtre avec une bobine

On considère ce circuit, avec $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $L = 10 \text{ mH}$, donnant le diagramme de BODE ci-dessous où $\omega_c = 1 \times 10^5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$:



- 1 Quelle est la nature du filtre ? Comment se comporte-t-il aux basses et hautes fréquences ? On donnera notamment sa pente en basses fréquences.

Réponse

On observe sur le diagramme de BODE en gain qu'il **coupe les basses-fréquences mais conserve les hautes fréquences** ; c'est donc un **filtre passe-haut d'ordre 1**. Un signal d'entrée en hautes fréquences sera conservé ; en très basses fréquences il sera d'une part fortement atténué à la sortie, mais surtout **dérivé** étant donné la pente visible de 20 dB/décade.

- 2 On considère une tension d'entrée $u_e(t)$ somme de 3 harmoniques de mêmes amplitudes E , de mêmes phases initiales, mais de fréquences respectives $f_1 = 100 \text{ Hz}$, $f_2 = 1 \text{ kHz}$ et $f_3 = 100 \text{ kHz}$. Donner le spectre de sortie en utilisant le diagramme.

Réponse

On trouve le spectre de sortie en multipliant chaque amplitude d'entrée par le gain linéaire pour avoir l'amplitude de sortie. On convertit donc notre lecture de gain en dB en gain linéaire, en faisant attention que **pulsation \neq fréquence**. On a ainsi

$$u_s(t) = S_1 \cos(2\pi \cdot f_1 t + \phi_1) + S_2 \cos(2\pi \cdot f_2 t + \phi_2) + S_3 \cos(2\pi \cdot f_3 t + \phi_3)$$

avec $S_1 = E \cdot 10^{\frac{G(f_1)}{20}}$ et $S_2 = E \cdot 10^{\frac{G(f_2)}{20}}$ et $S_3 = E \cdot 10^{\frac{G(f_3)}{20}}$

Or, $x_n = \frac{\omega_n}{\omega_c} = \frac{2\pi f_n}{\omega_c}$ avec $\begin{cases} f_1 = 100 \text{ Hz} \\ f_2 = 1 \text{ kHz} \\ f_3 = 100 \text{ kHz} \\ \omega_c = 1 \times 10^5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases}$

A.N. : $x_1 = 6,3 \times 10^{-3}$ et $x_2 = 6,3 \times 10^{-2}$ et $x_3 = 6,3$

On ne voit pas $G_{\text{dB}}(f_1)$ sur le diagramme, mais on est clairement dans la zone où la pente est de 20 dB/décade. Ainsi, on lit d'abord $G_{\text{dB}}(f_2)$ et on lui soustrait 20 dB pour obtenir $G_{\text{dB}}(f_1)$. On a donc :

$$G_{\text{dB}}(f_1) \approx -44 \text{ dB} \Leftarrow G_{\text{dB}}(f_2) \approx -24 \text{ dB} \text{ et } G_{\text{dB}}(f_3) \approx 0 \text{ dB}$$

Autrement dit, $S_1 \ll \frac{E}{100}$ et $S_2 \ll \frac{E}{10}$ et $S_3 \approx E$



- 3 Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H}(\text{j}\omega) = H_0 \frac{\text{j} \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + \text{j} \frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec H_0 et ω_c des constantes à préciser.

Réponse

Pont diviseur : $\frac{\underline{u}_s}{R + \text{j}L\omega} \underline{u}_e \Leftrightarrow \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \underline{H} = \frac{R'}{R} \times \frac{\text{j}\omega \frac{L}{R}}{1 + \text{j}\omega \frac{L}{R}}$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(\text{j}\omega) = H_0 \frac{\text{j} \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + \text{j} \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_0 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_c = \frac{R}{L} = 1 \times 10^5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}} \Leftrightarrow \boxed{f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \approx 16 \text{ kHz}}$$



- 4 Montrer par le calcul que la pente de l'asymptote du diagramme de BODE pour $\omega \ll \omega_c$ est de 20 dB/décade.

Réponse

$$\underline{H}(\text{j}\omega) \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} \frac{\text{j} \frac{\omega}{\omega_c}}{1} \Leftrightarrow G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} \frac{\omega}{\omega_c} \Leftrightarrow \boxed{G_{\text{dB}} = 20 \log(G(\omega)) \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

Ainsi, une multiplication de la pulsation par 10 (une décade) augmente bien le gain de $20 \log(10) = 20 \text{ dB}$, d'où la pente de 20 dB/décade.



- 5 Déterminer alors le spectre de sortie du signal précédent par le calcul direct.

Réponse

On a

$$G(f) = \frac{\frac{2\pi f}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi f}{\omega_c}\right)^2}}$$

◇ $G(f_1) \approx 6,3 \times 10^{-3}$: le fondamental est complètement atténué, il ne reste que 0,6% de son amplitude initiale ;

◇ $G(f_2) \approx 6,3 \times 10^{-2}$: l'harmonique f_2 est fortement atténué, il n'en reste que 6% ;

◇ $G(f_3) \approx 0,99$: l'harmonique f_3 est pratiquement entièrement conservé.

On retrouve bien les mêmes résultats que précédemment.



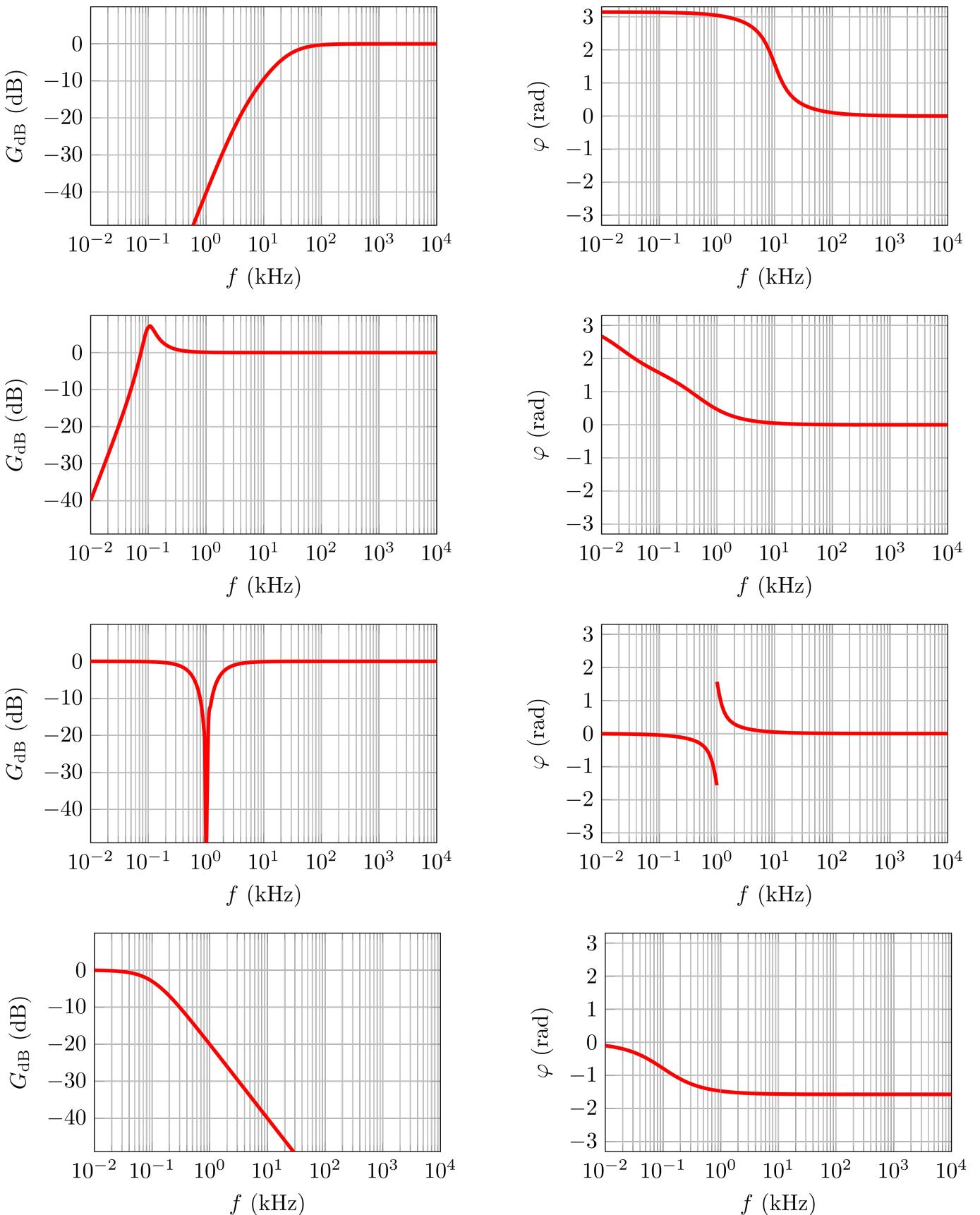


FIGURE E8.1 – Diagrammes exercice III



III Lecture de diagrammes de BODE

On donne Figure E8.1 les diagrammes de BODE de quatre filtres.

1 Pour chacun d'eux :

- 1) Indiquer le type de filtre dont il s'agit.
- 2) Déterminer l'expression du signal $s(t)$ de sortie du filtre pour un signal d'entrée

$$e(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega t) + E_{10} \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_{100} \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

avec une fréquence $f = 1 \text{ kHz}$

Réponse

Pour faciliter la rédaction on note $e(t) = e_0 + e_1(t) + e_{10}(t) + e_{100}(t)$, et de même pour le signal de sortie s . Ainsi, par linéarité, chaque composante e_n du signal d'entrée donne une composante s_n au signal de sortie.

- ◊ Filtre 1 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre passe-haut, de fréquence de coupure f_c de l'ordre de 10 kHz. Reconstruisons le signal de sortie :
 - ▷ Le terme constant e_0 est complètement coupé par le filtre, donc $s_0 = 0$.
 - ▷ L'harmonique de fréquence f est atténuée de 40 dB et peut donc être négligée dans le signal de sortie (40 dB correspond à une division de l'amplitude par 100), soit $s_1(t) \ll$ autres harmoniques de $s(t)$.
 - ▷ L'harmonique de fréquence $10f$ est atténuée de 10 dB, soit

$$S_{10} = 10^{-10/20} E_{10} = 10^{-1/2} E_{10} \approx 0,3 E_{10}$$

et elle est également déphasée d'environ $+\pi/2$. Ainsi

$$s_{10}(t) \approx 0,3 E_{10} \cos(10\omega t + \pi/4 + \pi/2)$$

- ▷ L'harmonique de fréquence $100f$ n'est presque pas atténuée ni déphasée, donc $s_{100}(t) \approx e_{100}(t)$. Au final, on obtient le signal de sortie $s(t)$ suivant :

$$s(t) \approx 0,3 E_{10} \cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + E_{100} \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- ◊ Filtre 2 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre **passe-haut**, de fréquence de coupure f_c de l'ordre de 0,1 kHz. De la même manière que pour le filtre 1, on détermine que :

$$s(t) \approx E_1 \cos(\omega t) + E_{10} \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_{100} \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- ◊ Filtre 3 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre **coupé-bande**, la bande coupée étant proche de 1 kHz. Ainsi seule l'harmonique $e_1(t)$ est coupée (soit $s_1 = 0$). Les autres composantes harmoniques du signal d'entrée, y compris la composante continue, sont de fréquences suffisamment différentes de la fréquence coupée pour n'être ni atténuée ni déphasée. La signal de sortie $s(t)$ s'écrit donc sous la forme :

$$s(t) = E_0 + E_{10} \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + E_{100} \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- ◊ Filtre 4 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre **passe-bas**, de fréquence de coupure f_c de l'ordre de 0,1 kHz. Le terme constant e_0 passe au travers du filtre sans être modifié. Les termes suivants sont de fréquence suffisamment supérieure à la fréquence de coupure pour que le diagramme de BODE puisse être approximé par son asymptote. On peut alors déterminer le signal de sortie comme dans le cas du premier filtre, mais il y a plus simple ! Comme le filtre est d'ordre 1 (une seule asymptote de pente -20 dB/décade), alors il se comporte comme un intégrateur pour les signaux de fréquence supérieure à sa fréquence de coupure. En déduire le signal de sortie est donc très simple :

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_1 \sin(\omega t) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_{10} \sin\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} E_{100} \sin\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- ◊ En écrivant le signal en termes de cosinus, on obtient :

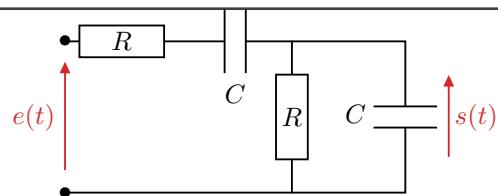
$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_{10} \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} E_{100} \cos\left(100\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$$





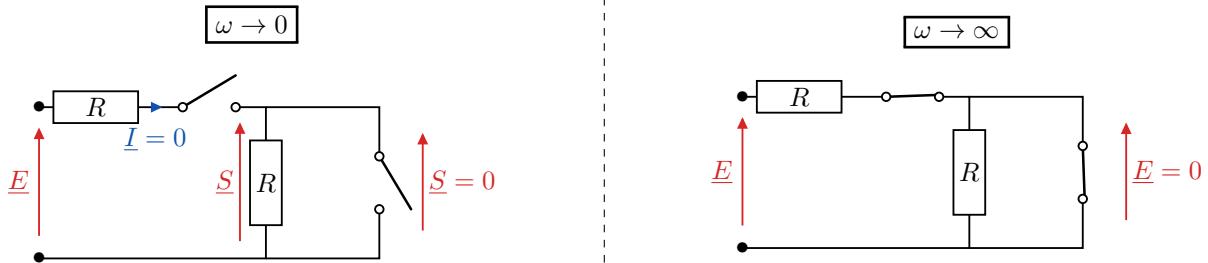
IV Filtre de WIEN

On s'intéresse au filtre de WIEN, représenté ci-contre.



- 1 Par analyse des comportements asymptotiques, déterminer le type de filtre dont il s'agit.

Réponse



Dans la limite très hautes fréquences, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{S} = 0$. Dans la limite très basses fréquences, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et on a donc également $\underline{S} = 0$. Selon toute vraisemblance, c'est donc un filtre **passe-bande**.

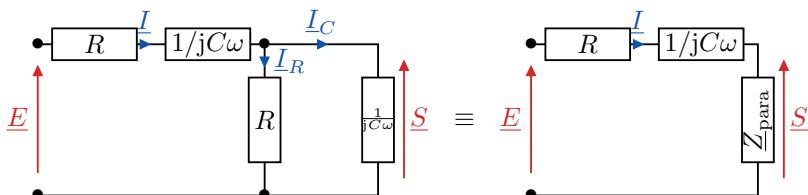
- 2 Établir sa fonction de transfert complexe sous la forme

$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

où H_0 , ω_0 et Q sont des constantes à exprimer en fonction (éventuellement) de R et C .

Réponse

Notons Z_{para} l'impédance et Y_{para} l'admittance de l'association RC parallèle. En utilisant cette impédance, on reconnaît un pont diviseur de tension :



$$\begin{aligned} H = \frac{U}{E} &= \frac{Z_{\text{para}}}{Z_{\text{para}} + Z_R + Z_C} \Leftrightarrow H = \frac{1}{1 + (Z_R + Z_C) Y_{\text{para}}} \\ \Leftrightarrow H &= \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) Y_{\text{para}}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right)} \\ \Leftrightarrow H &= \frac{1}{3 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)} \end{aligned}$$

En factorisant par 3 et en utilisant les notations introduites dans l'énoncé, on trouve

$$H = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3} \left(x - \frac{1}{x} \right)} \Leftrightarrow H = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1/3 \\ \omega_0 = \frac{1}{RC} \\ Q = 1/3 \end{cases}$$

Ce qui est remarquable avec ce montage, c'est que **le facteur de qualité est de 1/3 peu importe les valeurs de R et C** , tant que ce sont les mêmes R et C en série et en dérivation.

- 3 Calculer simplement le gain maximal du filtre, puis le gain maximal en décibels, et le déphasage correspondant à ce maximum.

Réponse

Le gain du filtre est défini par

$$G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à $x = 1$, d'où le gain maximal :

$$G_{\max} = G(x=1) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2(1-1)^2}} \Leftrightarrow \boxed{G_{\max} = H_0} \quad \text{A.N. : } G_{\max} = \frac{1}{3}$$

D'où $G_{\text{dB, max}} = 20 \log(G_{\max}) \Leftrightarrow \boxed{G_{\text{dB,max}} = 20 \log(H_0)} \quad \text{A.N. : } G_{\text{dB,max}} = -20 \log(3) \approx -9,5 \text{ dB}$

Et $\Delta\varphi_{s/e}(x) = \arg(\underline{H}(x)) \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi_{s/e}(1) = \arg(H_0)} \quad \text{A.N. : } \Delta\varphi_{s/e}(1) = 0$



- 4 Représenter le diagramme de BODE asymptotique du filtre et en déduire qualitativement le tracé réel.

Réponse

Dans la limite très basses fréquences, la fonction de transfert est équivalente à

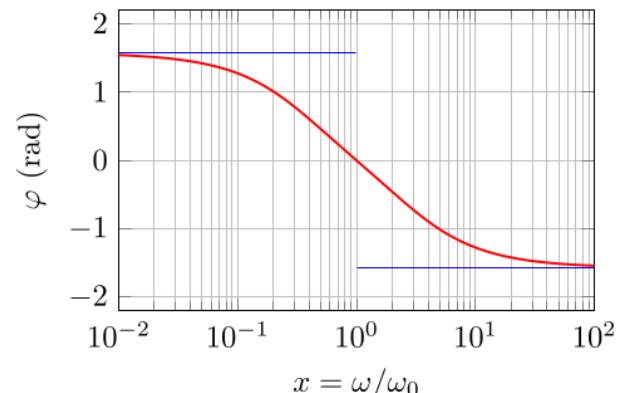
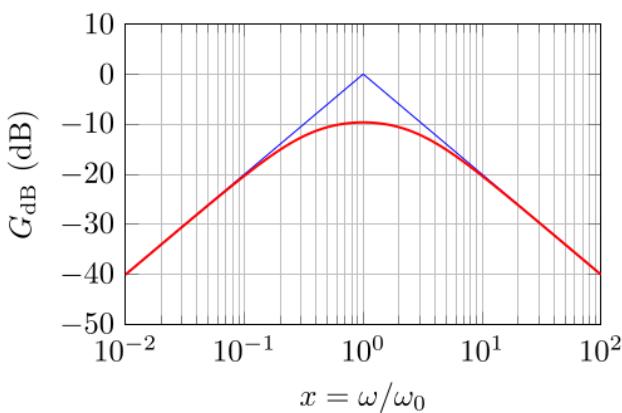
$$\underline{H} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{H_0}{-\text{j}Q/x} = \text{j} \frac{H_0}{Q} x = \text{j}x \quad \text{donc} \quad \begin{cases} G(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \\ G_{\text{dB}}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 20 + 20 \log(x) \\ \Delta\varphi_{s/e}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

De même, dans la limite très hautes fréquences, on a

$$\underline{H} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{H_0}{\text{j}Qx} = -\text{j} \frac{H_0}{Q} \frac{1}{x} = -\text{j} \frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} G(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x} \\ G_{\text{dB}}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} -20 \log(x) \\ \Delta\varphi_{s/e}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de BODE asymptotique en gain compte **deux asymptotes de pentes $\pm 20 \text{ dB/décade}$ passant par $G_{\text{dB}} = 0$ pour $x = 1$** , alors que le diagramme asymptotique en phase compte **deux asymptotes horizontales de hauteurs $\pm \pi/2$** .

Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus les résultats de la question précédente qui indique que la courbe réelle passe par $G_{\text{dB}} = -9,5 \text{ dB}$ en $x = 1$, alors que la courbe de phase réelle passe par 0 en $x = 1$; d'où les diagrammes ci-dessous.



- 5 Calculer la pulsation propre ω_0 pour $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 500 \text{ nF}$. Donner le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est

$$e(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos(10\omega t) + E_0 \cos(100\omega t)$$

avec $E_0 = 10 \text{ V}$ et $\omega = 200 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Réponse

Numériquement, on trouve $\omega_0 = 2,0 \times 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Comme le diagramme de BODE réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée :

- ◊ Le terme continu est complètement coupé par le filtre ;
- ◊ Le terme de pulsation $\omega = \omega_0/10$ se trouve une décade en-dessous de la pulsation propre : avec le diagramme asymptotique il est donc atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad si le diagramme réel tracé ;
- ◊ Le terme de pulsation $10\omega = \omega_0$ est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur 1/3 (gain maximal) ;
- ◊ Le terme à la pulsation $100\omega = 10\omega_0$ est une décade au-dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ $-1,2$ rad. Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{10} \cos(\omega t - 1,2) + \frac{E_0}{3} \cos(10\omega t) + \frac{E_0}{10} \cos(100\omega t + 1,2)$$



Correction du TD d'entraînement



I Filtre ADSL

Vous avez égaré votre filtre ADSL. Heureusement, vous avez les connaissances pour en recréer un ! En sachant que les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une très large gamme de fréquences, divisée en deux parties :

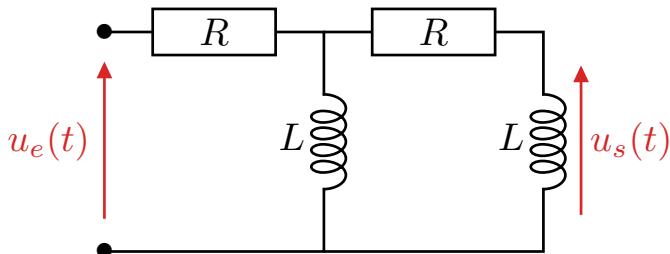
- ◊ les signaux téléphoniques (transmettant la voix) utilisent les fréquences de 0 à 4 kHz ;
- ◊ les signaux informatiques (Internet) utilisent les fréquences de 25 kHz à 2 MHz.

- 1** Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? Les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

Réponse

On isole les signaux téléphoniques avec un **filtre passe-bas**, et les signaux informatiques avec un **filtre passe-haut**. La fréquence de coupure doit être à la fois nettement supérieure aux fréquences téléphoniques et nettement plus faible que les fréquences informatiques : on prendra donc $f_0 = 10 \text{ kHz}$.

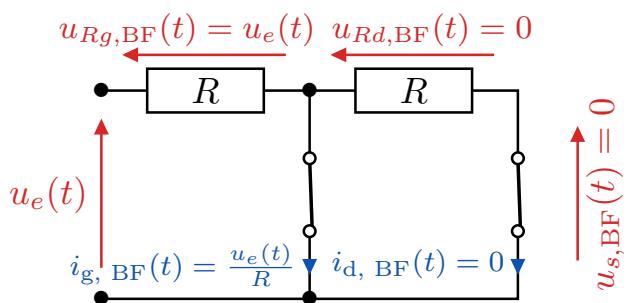
Vous réalisez le filtre ci-dessous.



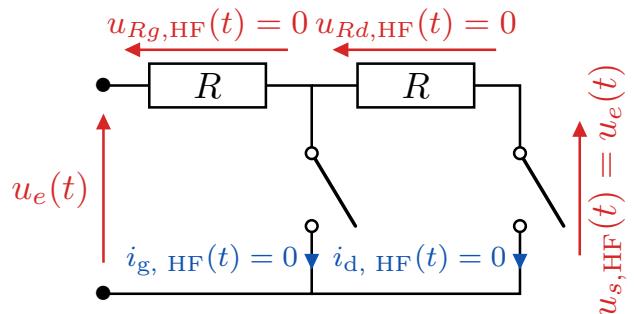
- 2** Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique en basses fréquences et en hautes fréquences. En déduire pour quels signaux il peut être utilisé.

Réponse

En basses fréquences ($\omega \rightarrow 0$), les bobines se comportent comme des fils, soit



En hautes fréquences ($\omega \rightarrow \infty$), les bobines se comportent comme des interrupteurs ouverts, soit



Ainsi, le signal de sortie est non nul pour les hautes fréquences, et négligeable pour les basses fréquences : c'est un **filtre passe-haut**. Il permettra d'obtenir les signaux informatiques.

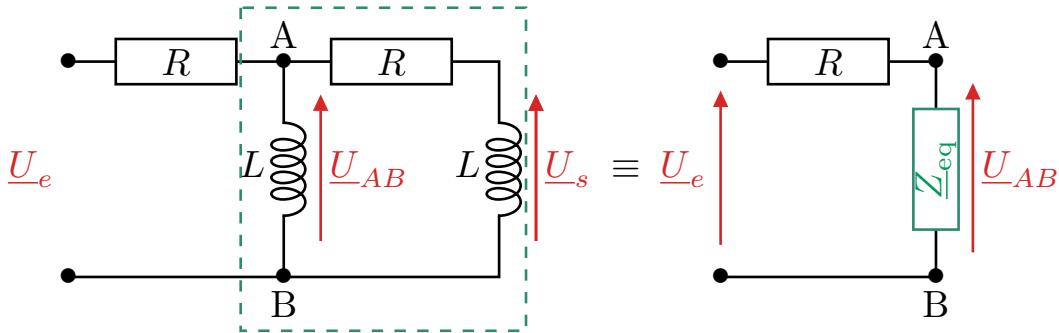
- 3** Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :

$$H(x) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + 3jx} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

et exprimer ω_0 en fonction de R et L .

Réponse

Pour exprimer U_s en fonction de U_e , on peut faire un premier pont diviseur de tension pour exprimer U_s en fonction de U_{AB} du milieu ; puis avec une impédance équivalente à l'ensemble des 3 dipôles de droite, on refait un pont diviseur de tension pour avoir U_{AB} en fonction de U_e , et on combine.



On a donc d'abord : $\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{jL\omega}{jL\omega + R} \underline{U}_{AB}$

On aura donc ensuite : $\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_R} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_R Y_{eq}} \underline{U}_e$

On calcule alors Y_{eq} : $Y_{eq} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega}$

Et on combine : $\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \cdot \frac{1}{1 + \underline{Z}_R Y_{eq}} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + R \left(\frac{R + jL\omega}{jL\omega} + 1 \right)} \cdot \frac{jL\omega}{jL\omega} \underline{U}_e$
 $\Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{-(L\omega)^2}{R^2 - (L\omega)^2 + 3jRL\omega} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \cancel{\frac{R^2}{R^2}} \frac{-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}{1 - \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2 + 3j\frac{L}{R}\omega} \underline{U}_e$

Ainsi, en divisant par \underline{U}_e pour avoir la fonction de transfert, on a :

$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + 3jx}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}}$$



- 4] Y a-t-il résonance ? Justifier.

Réponse

On cherche le maximum de $G(x) = |\underline{H}(x)|$. Or, le numérateur n'est pas constant ; on se ramène donc à une forme facile à étudier en divisant $\underline{H}(x)$ par son numérateur :

$$\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + 3jx} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(x) = \cancel{\frac{x^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2} - 3\frac{j}{x}}}$$

D'où le gain

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2}}}$$

max quand dénominateur min

On étudie donc

$$f : x \mapsto \left(1 - x^{-2}\right)^2 + 9x^{-2}$$

$$f'(x) = 2\left(-2x^{-3}\right)\left(1 - x^{-2}\right) + 9(-2)x^{-3}$$

Dérivée :

$$f'(x_r) = 0 \Leftrightarrow x_r^{-3} \left(2\left(1 - x_r^{-2}\right) - 9\right) = 0$$

Annulation :

$$\Leftrightarrow 1 - x_r^{-2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x_r^{-2} = -\frac{7}{2}$$

Résonance ssi $x_r \neq (0, +\infty)$ donc ce qui n'a pas de solution réelle. Ainsi, le maximum se trouve en $x_{\max}^{-1} = 0 \Leftrightarrow x_{\max} \rightarrow \infty$; ça n'est pas une résonance.



- 5] Tracer le diagramme de BODE asymptotique (gain et phase) de ce filtre, puis esquisser les allures de leurs courbes réelles en les justifiant.

Réponse

OPTIONNEL Gains $\forall x$: $G(x) = \frac{x^2}{(1 - x^2)^2 + (3x)^2} \quad \text{et} \quad G_{dB}(x) = 40 \log(x) - 10 \log((1 - x^2)^2 + 9x^2)$

OPTIONNEL Déphasage $\forall x$: $\Delta\varphi_{s/e}(x) = \arg(\underline{H}(x)) = \arg\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x^2} - 3\frac{j}{x}}\right)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \Delta\varphi_{s/e}(x) = -\arg\left(\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{3j}{x}\right)\frac{j}{j}\right) \\
&\Leftrightarrow \Delta\varphi_{s/e}(x) = -\left[\arg\left(\frac{3}{x} + j\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right) - \arg(j)\right] \\
&\Leftrightarrow \Delta\varphi_{s/e}(x) = -\arg\left(\frac{3}{x} + j\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right) + \frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \Delta\varphi_{s/e}(x) = -\arctan\left(\frac{x}{3}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right) + \frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi_{s/e}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)}
\end{aligned}$$

OBLIGATOIRE Asymptotes : $\underline{H}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = -x^2$ et $\underline{H}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-x^2}{-x^2} = 1$

Pour G : $G(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} |-x^2| = x^2$ et $G(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 1$

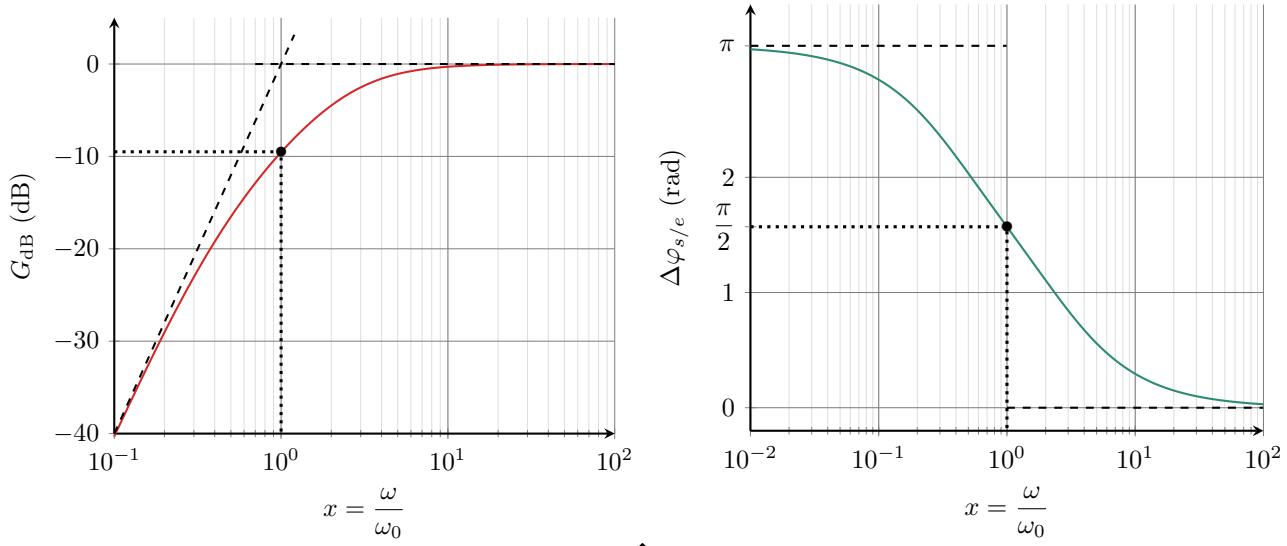
Pour G_{dB} : $G_{dB}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(x^2) = 40 \log(x)$ et $G_{dB}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 20 \log(1) = 0$

Pour $\Delta\varphi_{s/e}$: $\Delta\varphi_{s/e}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arg(-x^2) = \pm\pi$ et $\Delta\varphi_{s/e}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \arg(1) = 0$

Or, $\underline{H}(1) = \frac{-1}{1 - 1 + 3j} = \frac{-1}{3j} = \frac{j}{3}$ donc $\Delta\varphi_{s/e}(1) = \frac{\pi}{2}$ et $\Delta\varphi_{s/e}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arg(-x^2) = \pi$

Gains en 1 : $G(1) = |\underline{H}(1)| = \frac{1}{3}$ et $G_{dB}(1) = 20 \log\left(\frac{1}{3}\right) = -9,5 \text{ dB}$

Intersection des asymptotes : $\Leftrightarrow 40 \log(x_{its}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_{its} = 1}$ et $y_{its} = G_{dB}(x \rightarrow 0) \Big|_{x_{its}} = 0$



- 6 Vous possédez des résistances de 100Ω . Quelle valeur d'inductance L choisir pour réaliser le filtre souhaité ?

Réponse

La fréquence de coupure est $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$; on doit donc prendre

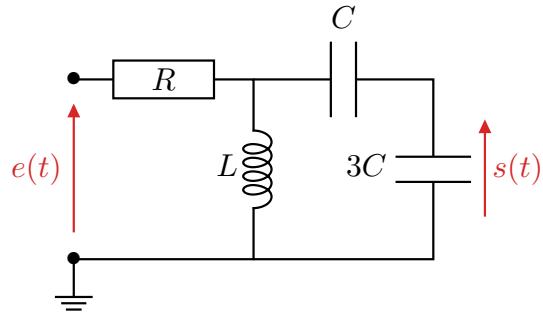
$$L = \frac{R}{2\pi f_0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 100 \Omega \\ f_0 = 10 \text{ kHz} \end{cases}$$

A.N. : $\boxed{L = 1,6 \text{ mH}}$



II Filtre de COLPITTS

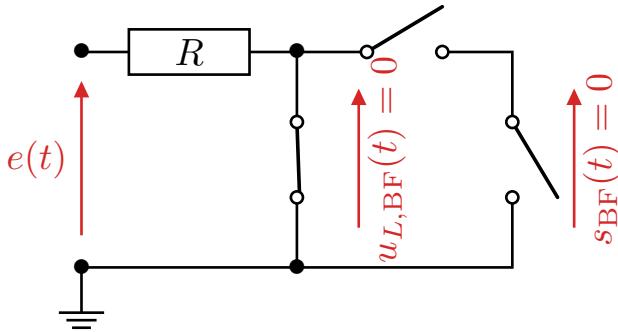
On considère le quadripôle suivant, où C est une capacité, R une résistance et L une inductance. Il est utilisé en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω , en sortie « ouverte » (rien n'est branché aux bornes de sortie).



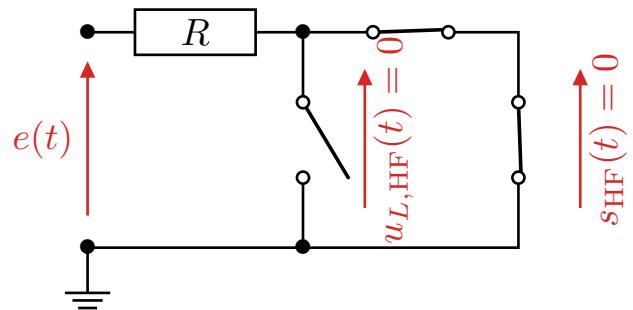
- 1 Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en hautes et basses fréquences. De quel type de filtre s'agit-il ?

Réponse

En basses fréquences ($\omega \rightarrow 0$), les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, la bobine comme un fil : la tension $s(t)$ est donc nulle.



En hautes fréquences ($\omega \rightarrow \infty$), les condensateurs se comportent comme des fils, la bobine comme un interrupteur ouvert : la tension $s(t)$ est donc nulle.



Comme la tension est nulle aux extrêmes, c'est un **passe-bande**. Si elle était égale à la tension d'entrée aux extrêmes, ça serait un coupe-bande.

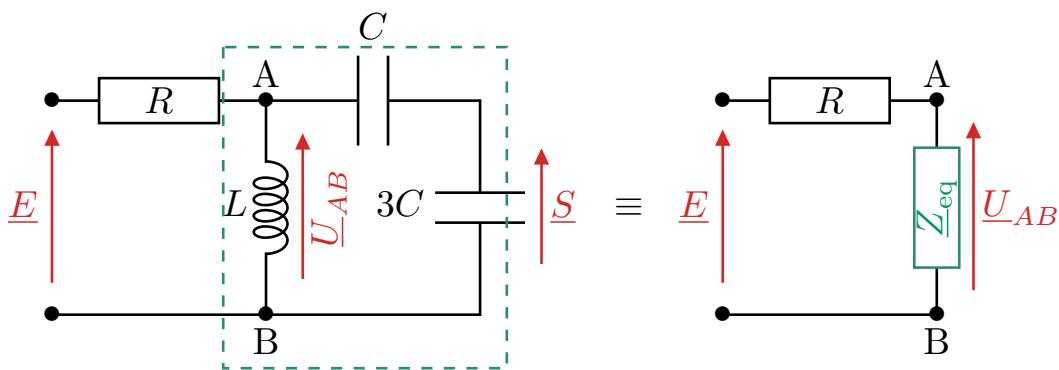
- 2 Déterminer sa fonction de transfert $H(j\omega)$ et la mettre sous l'une des formes équivalentes :

$$H(j\omega) = \frac{A}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{j \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

En introduisant des constantes A , ω_0 et Q dont on précisera les expressions en fonction de R , L et C .

Réponse

On effectue deux diviseurs de tension successifs : un pour déterminer S en fonction de U_{AB} , puis avec une impédance équivalente des trois dipôles de droite, on détermine U_{AB} en fonction de E et on combine. C'est le même fonctionnement que pour l'exercice sur l'ADSL, question [3].



On a ainsi en premier lieu $\underline{S} = \frac{\underline{Z}_{3C}}{\underline{Z}_{3C} + \underline{Z}_C} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{S} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_C \cdot \underline{Y}_{3C}} \underline{U}_{AB}$
 $\Leftrightarrow \underline{S} = \frac{1}{1 + 3} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \boxed{\underline{S} = \frac{\underline{U}_{AB}}{4}}$

On aura donc ensuite : $\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + \underline{Z}_R} \underline{E} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_{\text{eq}}} \underline{E}}$

On calcule alors $\underline{Y}_{\text{eq}}$ de l'association en parallèle de L et C en série avec $3C$. **Attention** à l'association en série de capacités :

$$\underline{Z}_{C+3C} = \frac{1}{j3C\omega} + \frac{1}{jC\omega} \times \boxed{\frac{3}{3}} = \frac{4}{j3C\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_L + \underline{Y}_{C+3C} \Leftrightarrow \boxed{\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{jL\omega} + j3C\omega/4}$$

Et on combine : $\underline{S} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + R \left(\frac{1}{jL\omega} + \frac{j3C\omega}{4} \right)} \underline{E} \Leftrightarrow \underline{S} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + j \left(-\frac{R}{L\omega} + \frac{3RC\omega}{4} \right)} \underline{E}$

Soit $\underline{H}(j\omega) = \frac{1/4}{1 + j \left(\frac{3RC\omega}{4} - \frac{R}{L\omega} \right)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{A}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{A = \frac{1}{4}}$

Reste à trouver Q et ω_0 . Pour cela, on identifie membre à membre :

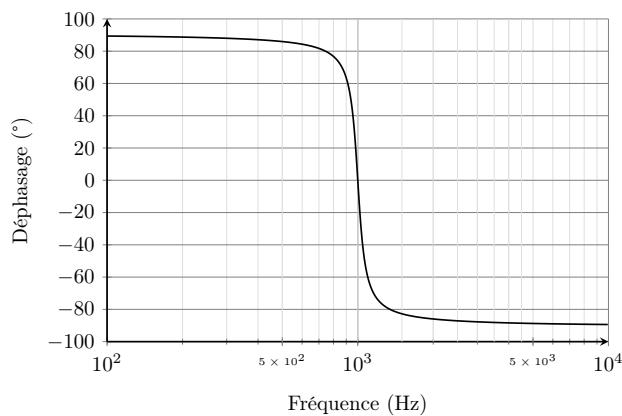
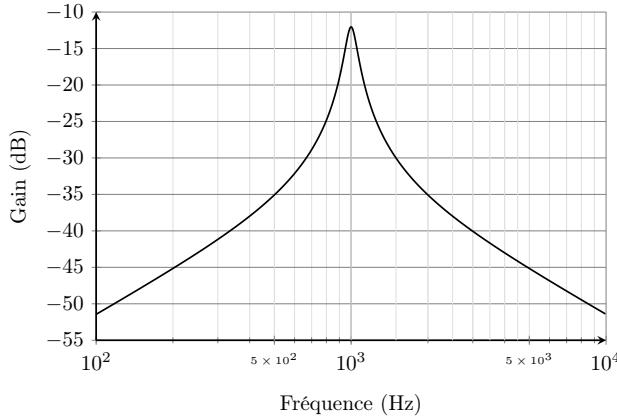
$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{3RC}{4} \quad (1) \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{R}{L} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{3C}{L}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3LC}}}$$

où l'on obtient Q et ω_0 en multipliant les équations (1) et (2) d'une part puis en en prenant la racine carrée, et en divisant (2) par (1) en en prenant la racine carrée, respectivement.



Le diagramme de BODE de ce quadripôle pour $Q = 6$ est donné ci-dessous.



- 3] Justifier l'allure des parties rectilignes du diagramme. Déduire du diagramme la valeur de la fréquence d'accord $f_0 = \omega_0/2\pi$ ainsi que des fréquences de coupure. En rappelant le lien entre acuité, facteur de qualité et largeur de bande passante, vérifier la cohérence de ces résultats.

Réponse

Les parties rectilignes du diagramme correspondent aux limites asymptotiques du gain en décibels, c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$; on y trouve des pentes de $\pm 20 \text{ dB/decade}$ en gain et des droites de $\pm \frac{\pi}{2}$ en déphasage. En effet,

Asymptotes : $\underline{H}(\omega) \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} j \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \underline{H}(\omega) \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} -j \frac{A}{Q} \frac{\omega_0}{\omega}$

Pour G : $\Leftrightarrow G(\omega) \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad G(\omega) \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} \frac{A}{Q} \frac{\omega_0}{\omega}$

Pour G_{dB} : $\Leftrightarrow G_{\text{dB}}(\omega) \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} 20 \log\left(\frac{A}{Q}\right) + 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}}(\omega) \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} 20 \log\left(\frac{A}{Q}\right) - 20 \log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$

Pour $\Delta\varphi_{s/e}$:

$$\Leftrightarrow \Delta\varphi_{s/e}(\omega) \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\varphi_{s/e}(\omega) \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} -\frac{\pi}{2}$$

En $\omega = \omega_0$, on a : $\underline{H}(\omega_0) = \frac{A}{1 + jQ(1 - 1)} = A = \frac{1}{4} = G_{\max}$

donc $G_{\text{dB}}(\omega_0) = -20 \log(4) = -12 \text{ dB}$ et $\Delta\varphi_{s/e}(\omega_0) = \arg\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

La fréquence de résonance (ou fréquence d'accord) correspond au pic du diagramme de BODE (ou à l'intersection des asymptotes du gain en décibels) d'une part, ou correspond à la fréquence pour laquelle la phase est nulle : on lit simplement $f_0 = 1 \text{ kHz}$.

On trouve les fréquences de coupure en trouvant les fréquences f_1 et f_2 telles que $G_{\text{dB}} = G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB}$, soit $G_{\text{dB}} = -15 \text{ dB}$: on lit approximativement $f_1 = 950 \text{ Hz}$ et $f_2 = 1010 \text{ Hz}$. Ainsi,

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 60 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad A_c = Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} \Rightarrow Q = 6 \quad \text{comme annoncé, c'est cohérent.}$$



III Filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3

On veut réaliser un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3, dont le gain de sa fonction de transfert harmonique en tension \underline{H} s'exprime :

$$G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$$

- 1 Montrer qu'une fonction de transfert $\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3}$ correspond bien à un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

Réponse

Il suffit pour cette question de développer les puissances sur les j , de calculer le module et de développer :

$$\begin{aligned} \underline{H}(x) &= (1 + 2jx - 2x^2 - jx^3)^{-1} \Leftrightarrow G(x) = ((1 - 2x^2)^2 + (2x - x^3)^2)^{-1/2} \\ &\Leftrightarrow G(x) = (1 - 4x^2 + 4x^4 + 4x^2 - 4x^4 + x^6)^{-1/2} = (1 + x^6)^{-1/2} \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

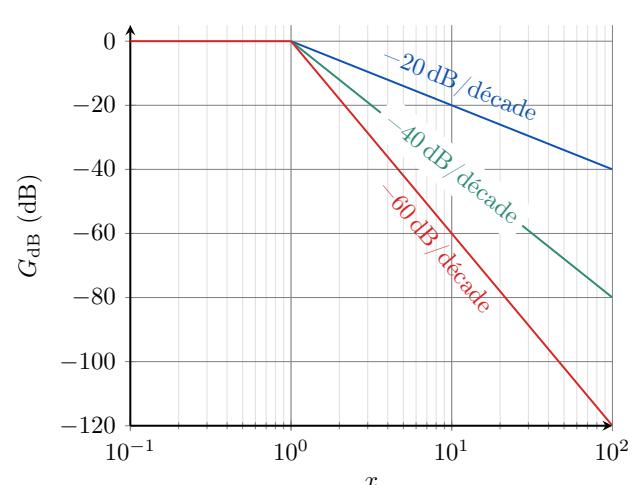


- 2 Étudier et représenter le diagramme de BODE asymptotique en amplitude de cette fonction de transfert.

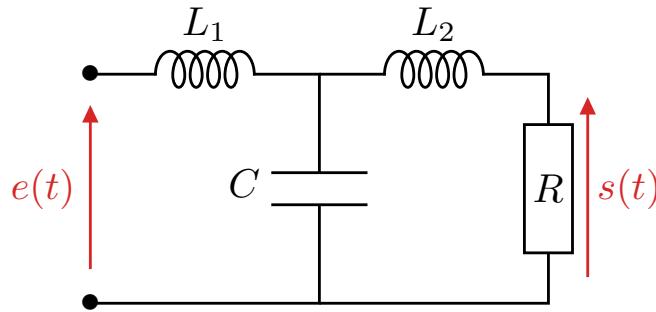
Réponse

$$\begin{aligned} G_{\text{dB}} &= 20 \log(G(x)) = -10 \log(1 + x^6) \\ \Rightarrow G_{\text{dB}} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} -60 \log(x) \end{aligned}$$

d'où le diagramme de BODE asymptotique ci-contre. Par rapport à de l'ordre 1 (-20 dB/décade) ou de l'ordre 2 (-40 dB/décade), l'atténuation des hautes fréquences est encore plus prononcé : une fréquence 10 fois supérieure à f_0 serait atténuée d'un facteur 1000 au lieu d'un facteur 10.



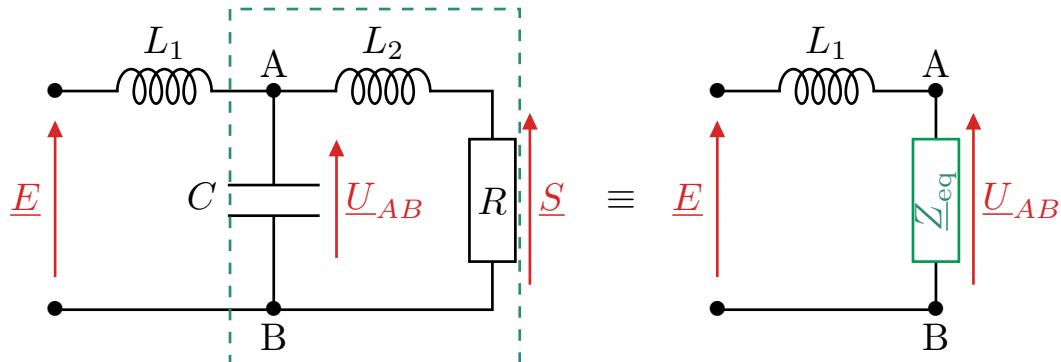
- 3 On considère le quadripôle ci-dessous :



Calculer en fonction de R et ω_0 , les valeurs de L_1 , L_2 et C pour que ce filtre soit un filtre de BUTTERWORTH.

Réponse

Ici encore, on utilise deux ponts diviseurs de tension successifs : on calcule u_s en fonction de u_{AB} , puis u_{AB} en fonction de u_e après avoir déterminé l'impédance équivalente de l'ensemble des dipôles de droite.



On a d'abord :

$$\underline{S} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L_2}} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{S} = \frac{R}{R + jL_2\omega} \underline{U}_{AB}$$

Et ensuite, on aura

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_{L_1}} \underline{E} \Leftrightarrow \underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_{L_1} \underline{Y}_{eq}} \underline{E}$$

On calcule alors \underline{Y}_{eq} de l'association en parallèle de C et L_2 en série avec R :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{L_2+R} &= jL_2\omega + R \Leftrightarrow \underline{Y}_{L_2+R} = \frac{1}{jL_2\omega + R} \\ &\Leftrightarrow \underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_C + \underline{Y}_{L_2+R} \Leftrightarrow \underline{Y}_{eq} = jC\omega + \frac{1}{jL_2\omega + R} \\ &\Leftrightarrow \underline{Y}_{eq} = \frac{jC\omega(jL_2\omega + R) + 1}{jL_2\omega + R} \Leftrightarrow \underline{Y}_{eq} = \frac{1 - L_2C\omega^2 + jRC\omega}{R + jL_2\omega} \end{aligned}$$

Et on combine :

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \frac{R}{R + jL_2\omega} \cdot \frac{1}{1 + jL_1\omega \left(\frac{1 - L_2C\omega^2 + jRC\omega}{R + jL_2\omega} \right)} \underline{E} \\ &\Leftrightarrow \underline{S} = \frac{R}{R + jL_2\omega} \cdot \frac{1}{1 + \frac{jL_1\omega - jL_1L_2C\omega^3 + (j\omega)^2RCL_1}{R + jL_2\omega}} \underline{E} \\ &\Leftrightarrow \underline{S} = \frac{R}{R + jL_2\omega + jL_1\omega - jL_1L_2C\omega^3 + (j\omega)^2RCL_1} \underline{E} \\ &\Leftrightarrow \underline{S} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_1 + L_2}{R} + (j\omega)^2 L_1 C + (j\omega)^3 \frac{L_1 L_2 C}{R}} \underline{E} \end{aligned}$$

en utilisant que $-j = j^3$. Ainsi, en divisant par \underline{E} pour avoir la fonction de transfert, on a bien

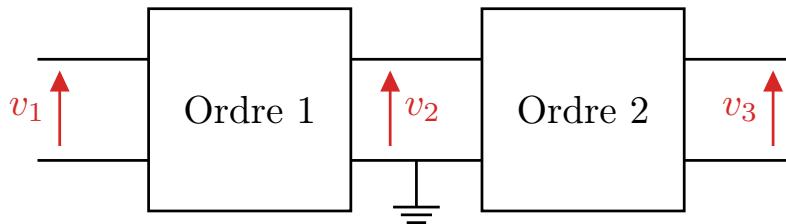
$$\boxed{H = \frac{1}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3}}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{2}{\omega_0} = \frac{L_1 + L_2}{R} \\ \frac{2}{\omega_0^2} = L_1 C \\ \frac{1}{\omega_0^3} = \frac{L_1 L_2 C}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} L_1 = \frac{3R}{2\omega_0} \\ L_2 = \frac{R}{2\omega_0} \\ C = \frac{4}{3R\omega_0} \end{cases}}$$

◇

- 4 Rappeler la condition sur les impédances des filtres pour les mettre en cascade. Justifier que l'on puisse réaliser le filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3 en associant en cascade un filtre d'ordre 1 et un filtre d'ordre 2, comme sur le circuit suivant :



Préciser alors la valeur du facteur de qualité du filtre d'ordre 2.

Réponse

Pour mettre des filtres en cascade et avoir $\underline{H}(x) = \underline{H}_{01}\underline{H}_{02}$ avec H_{0k} les fonctions en boucles ouvertes, il faut que **l'impédance de sortie du filtre 1 soit faible devant l'impédance d'entrée du filtre 2**.

Dans ce cas, on utilise un filtre d'ordre 1 avec un numérateur constant, donc un passe-bas de la forme $\underline{H}_{01}(x) = \frac{H_1}{1+jx}$, et un filtre d'ordre 2 avec un numérateur lui aussi constant. On a deux choix, soit un passe-bas soit un passe-bande

Le passe-bande fait intervenir $jQ(x - \frac{1}{x})$ au dénominateur, donc il est plus simple d'utiliser une **passe-bas d'ordre 2** avec $1 + j/Qx + (jx)^2$ au dénominateur. Ainsi :

$$\underline{H}(x) = \underline{H}_{01}(x) \cdot \underline{H}_{02}(x) = \frac{H_1}{1+jx} \cdot \frac{H_2}{1 + \frac{j}{Q}x + (jx)^2} = \frac{H_1 H_2}{1 + jx \left(1 + \frac{1}{Q}\right) + (jx)^2 \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) + (jx)^3}$$

Pour trouver un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3 de cette manière, il faut donc $H_1 = H_2 = 1$ et $\boxed{Q = 1}$.

