

Cinématique du point en coordonnées cartésiennes

Sommaire

I Description et paramétrage du mouvement	2
I/A Système	2
I/B Référentiel	2
I/C Repère	4
II Coordonnées cartésiennes	4
II/A Présentation	4
II/B Repérage	5
II/C Exemples de mouvements	7

Capacités exigibles

- ☐ Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.
- ☐ Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
- ☐ Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
- ☐ Coordonnées cartésiennes : exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse.
- ☐ Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes.
- ☐ Mouvement à vecteur accélération constant : exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- ☐ Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane.

L'essentiel

Définitions

☐ M1.1 : Cinématique, système et point matériel	2
☐ M1.2 : Référentiel	2
☐ M1.3 : Référentiels fondamentaux	2
☐ M1.4 : Repère spécifique	4
☐ M1.5 : Repère cartésien	4
☐ M1.6 : Position en cartésiennes	5
☐ M1.7 : Équations horaires et trajectoires	5
☐ M1.8 : Déplacement élémentaire cartésien	6
☐ M1.9 : Vitesse	6
☐ M1.10 : Accélération	7
☐ M1.11 : Mouvement rectiligne uniforme	7
☐ M1.12 : Uniformément accéléré	8

Propriétés

☐ M1.1 : Vitesse en cartésiennes	6
☐ M1.2 : Accélération en cartésiennes	7

Démonstrations

☐ M1.1 : Vecteur vitesse	6
---	---

Applications

☐ M1.1 : Mouvement rectiligne uniforme	7
☐ M1.2 : Mvt. rect. uniformément accéléré	8
☐ M1.3 : Mvt. courbe uniformément accéléré	8

Exemples

☐ M1.1 : Importance du référentiel	3
☐ M1.2 : Exemple d'effet relativiste	3
☐ M1.3 : Équations horaires et trajectoires en TP	5
☐ M1.4 : Vitesse selon expérience	7
☐ M1.5 : Accélération selon expérience	7

Points importants

☐ M1.1 : Vitesse et trajectoire	6
☐ M1.2 : Accélération et trajectoire	7

Erreurs communes

☐ M1.1 : Différence référentiel/repère	4
☐ M1.2 : Vitesse vecteur vs. scalaire	7
☐ M1.3 : Accélération	7

I Description et paramétrage du mouvement

I/A Système

♥ Définition M1.1 : Cinématique, système et point matériel

On appelle **cinématique** l'étude du mouvement des corps sans se soucier des causes.

En mécanique, le **système** est l'objet ou groupe d'objets dont on souhaite étudier le mouvement.

Le point matériel est le point géométrique qui représente le système entier, et que l'on repère pour connaître le son mouvement. On lui affecte toute la masse du système.

Remarque M1.1 :

La définition du système est **primordiale et indispensable** pour la mécanique. En effet, l'étude du mouvement sera radicalement différente entre les systèmes {bille} et {bille+Terre}. Il en sera de même en dynamique, où ce sont les forces **extérieures** au système qui entrent en jeu, il faut donc définir l'extérieur.

Dans le cadre de la **mécanique du point**, la forme de l'objet importe peu. Ainsi, on choisira de suivre un point caractéristique du système, souvent son centre de gravité. Celui-ci pourra être repéré dans l'espace et le temps par 3+1 coordonnées (3 d'espace, 1 de temps).

I/B Référentiel

♥ Définition M1.2 : Référentiel

Un **mouvement est toujours relatif** à un autre corps. Un **référentiel**, noté $\mathcal{R}$, est un **objet** de référence permettant de repérer un autre objet dans l'espace-temps. On y associe un **repère** générique pour décrire le mouvement dans l'espace, constitué de :

- ◇ une **origine** O pour mesurer des distances ;
- ◇ un **ensemble de 3 axes** pour définir des directions.

Ainsi, on notera les grandeurs liées à un référentiel *via* l'indication de celui-ci en indice, précédé d'une barre oblique ou verticale selon la taille de la grandeur :

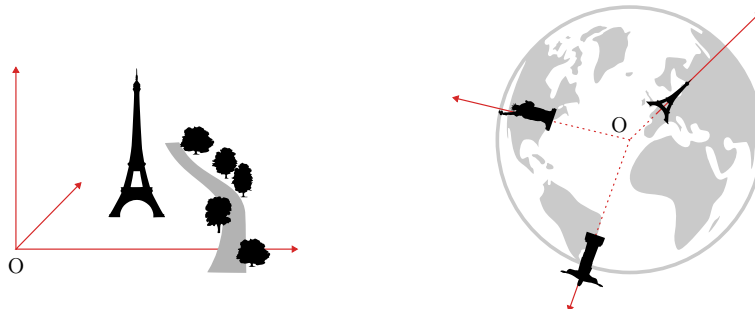
$$\vec{x}_{/\mathcal{R}} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

Comme le mouvement dépend du référentiel, il faut choisir le référentiel adéquat par rapport au mouvement que l'on souhaite étudier. Souvent, on choisit parmi trois référentiels classiques :

♥ Définition M1.3 : Référentiels fondamentaux

◇ Référentiels terrestres :

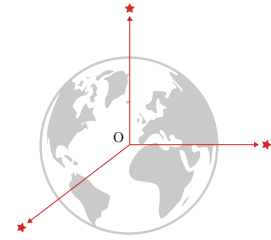
- ▷ **Origine** : O centre de la Terre ou point fixe à sa surface
- ▷ **Axes** : 3 axes vers des **points fixes** à sa surface ou 2 horizontaux, 1 vertical
- ▷ **Utilité** : mouvements sur la surface terrestre



Un objet fixe à la surface de la Terre ne bouge pas dans ce référentiel.

◇ **Référentiel géocentrique :**

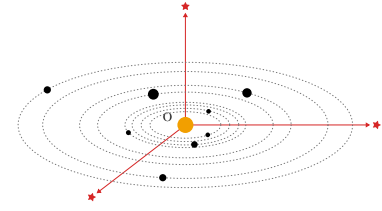
- ▷ **Origine :** O le centre de la Terre
- ▷ **Axes :** 3 axes vers des **étoiles lointaines** fixes
- ▷ **Utilité :** étude des satellites de la Terre



Un objet fixe à la surface de la Terre se déplace dans ce référentiel.

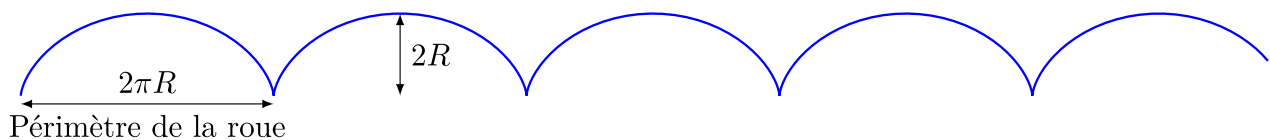
◇ **Référentiel héliocentrique :**

- ▷ **Origine :** O le centre du **Soleil**
- ▷ **Axes :** 3 axes vers des **étoiles lointaines** fixes
- ▷ **Utilité :** étude du mouvement des planètes du système solaire



Exemple M1.1 : Importance du référentiel

- ◇ Du point de vue d'un **cycliste**, la **valve** de sa roue est en **rotation** autour de l'axe de la roue. Selon un passant-e immobile, elle suit un mouvement de cycloïde. Son altitude atteint 0 à chaque tour de roue.



- ◇ Du point de vue d'un terrien-ne fixe sur Terre (référentiel terrestre), un arbre planté ne bouge pas. Du point de vue du centre de la Terre (référentiel géocentrique), il tourne à la vitesse vertigineuse de 1100 km·h⁻¹.

Remarque M1.2 : Mécanique relativiste

Nous resterons cette année en mécanique **classique**, c'est-à-dire que les corps étudiés auront une vitesse très inférieure à celle de la lumière dans le vide :

$$v \ll c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ce faisant, les mesures de longueurs ou de durées seront **absolues** et indépendantes du référentiel. Ça n'est pas le cas en mécanique *relativiste* : il faut alors ajouter une **horloge interne** au référentiel pour prendre en compte les effets de dilatation du temps.

Exemple M1.2 : Exemple d'effet relativiste

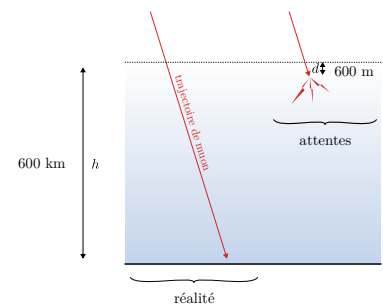
En plus de sa lumière, le Soleil émet plein de particules. Parmi elles se trouvent les **muons**. On peut en recréer en laboratoire et mesurer leur temps de demie-vie dans l'atmosphère ; on trouve alors $\tau_{\text{labo}} = 2,0 \mu\text{s}$. Ainsi, même en allant à la vitesse de la lumière, leur distance de parcours attendue d dans l'atmosphère d'épaisseur h serait de :

$$d = c\tau_{\text{labo}} = 600 \text{ m} \ll h = 600 \text{ km}$$

Or, **on détecte de nombreux muons au sol!** Dans le cadre de la mécanique classique, ils devraient aller à une vitesse **supérieure à la célérité de la lumière dans le vide**, ce qui est prohibé par la théorie.

Il y a en fait une **dilatation de son temps de vie** pour un observateur extérieur en fonction de sa vitesse :

$$\tau_{\text{propre}} = \gamma \tau_{\text{labo}} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \tau_{\text{propre}} = 82 \mu\text{s} \Rightarrow d_{\text{réelle}} = 27 \text{ km}$$



I/C Repère

Rappel M1.1 : Vecteur

Un vecteur est un objet mathématique qui se dénote avec une flèche vers la droite ($\vec{\cdot}$), et ayant :

- ◇ Un **point d'application** ;
- ◇ Un **sens** ;
- ◇ Une **direction** ;
- ◇ Une distance appelée **norme**, notée $\|\vec{\cdot}\|$.

Une égalité de vecteurs $\Rightarrow$ **trois** égalités de scalaires, une pour chaque direction de l'espace.

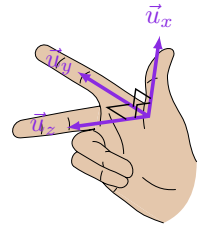
En plus du repère générique du référentiel, il faut choisir un **repère spécifique** à l'étude du problème.

♥ Définition M1.4 : Repère spécifique

Un **repère spécifique** comporte une **origine** et d'une **base de projection ortho-normée directe**, constituée de 3 vecteurs tels que :

- ◇ **Ortho** : les trois vecteurs sont orthogonaux entre eux ;
- ◇ **Normée** : leur norme est égale à 1 (on dit qu'ils sont *unitaires*) ;
- ◇ **Directe** : ils respectent la **règle de la main droite** (chaque vecteur est égal au produit vectoriel des deux précédents).

Les vecteurs de base n'ont **pas d'unité**. Ils définissent les trois directions dans lesquelles le point M pourrait se mouvoir.



Notation M1.1 : Vecteur colonne ou explicite

Ainsi pour une base générique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on représente de manière équivalente un vecteur par ses composantes sur chaque vecteur de base exprimées en colonne, ou par sa représentation explicite en fonction desdits vecteurs de base :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{A} = A_i \vec{i} + A_j \vec{j} + A_k \vec{k}$$

Attention M1.1 : Différence référentiel/repère

Il ne faut pas confondre le **référentiel**, c'est-à-dire le système de référence (notion *physique*) avec le **repère**, c'est-à-dire l'outil géométrique qui sert à décrire le mouvement (notion *mathématique*). Il y a une infinité de repères spécifiques différents qui peuvent être associés à un même référentiel.

II Coordonnées cartésiennes

II/A Présentation

Définition M1.5 : Repère cartésien

La base cartésienne se définit par les vecteurs :

$$\vec{u}_x, \vec{u}_y \text{ et } \vec{u}_z \text{ de direction constante dans le temps.}$$

Jusqu'à notifié autrement, ce sera notre repère de prédilection. On trouve parfois la notation $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

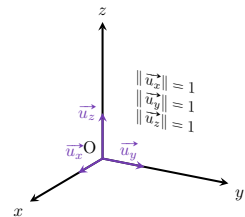


FIGURE M1.1

On aura souvent des vecteurs définis par une **norme** et un **angle** par rapport à l'un des axes, et l'on souhaiterait obtenir leurs décompositions dans la base de projection.

♥ Outils M1.1 : Projection vectorielle (2D)

Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{A}$ sur les vecteurs de base d'un repère, on réalise une **projection** :

$$\vec{A} \cdot \vec{u}_x = A_x \quad \text{et} \quad \vec{A} \cdot \vec{u}_y = A_y$$

On peut alors utiliser les propriétés du produit scalaire :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\theta)$$

avec θ l'angle entre les vecteurs, pris **positivement en sens trigonométrique**.

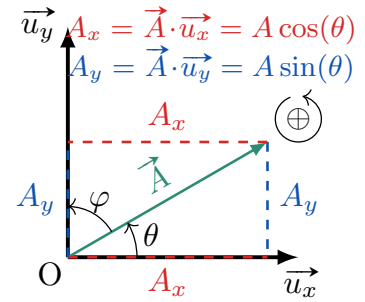


FIGURE M1.2 – Projection 2D

II/B Repérage

II/B) 1 Position

Définition M1.6 : Position en cartésiennes

On note la position $\vec{OM}(t)$, **homogène à une distance**. Elle s'exprime

$$\vec{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$$

et sa **norme** se calcule avec :

$$OM(t) = \|\vec{OM}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$

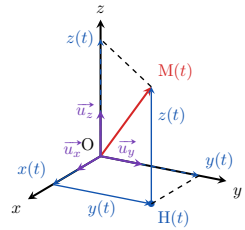


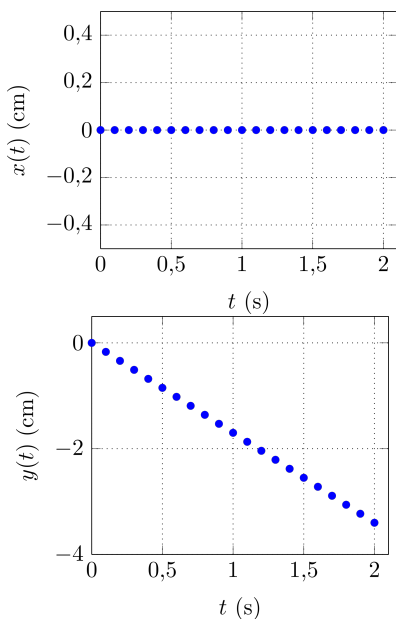
FIGURE M1.3

Définition M1.7 : Équations horaires et trajectoires

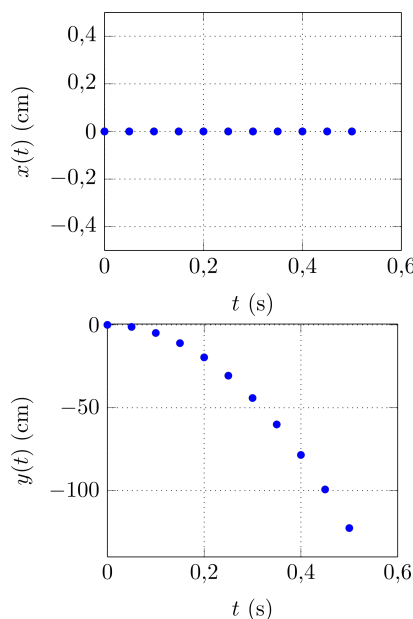
- ◇ Les **équations horaires** du mouvement sont les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ exprimées **explicitement** en fonction du temps t .
- ◇ La **trajectoire** est l'**ensemble des positions** successives du point $M(t)$ au cours du temps. C'est le « dessin » fait par le mobile au cours du temps dans l'espace.

Exemple M1.3 : Équations horaires et trajectoires en TP

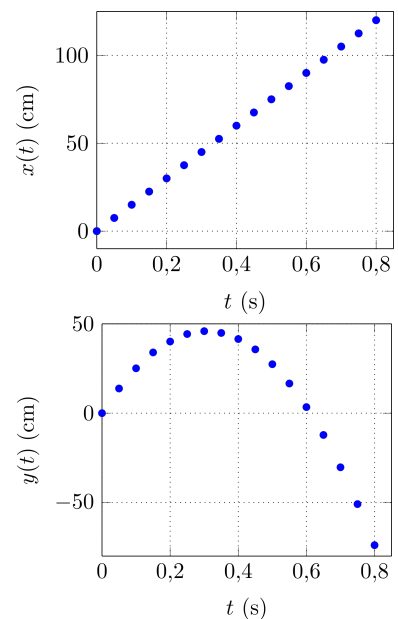
Chute dans glycérol



Chute libre verticale

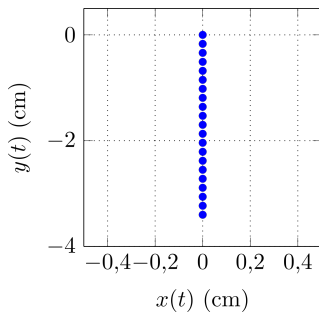


Chute libre $\vec{v}(0) \neq \vec{0}$

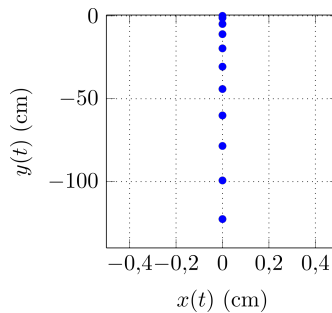
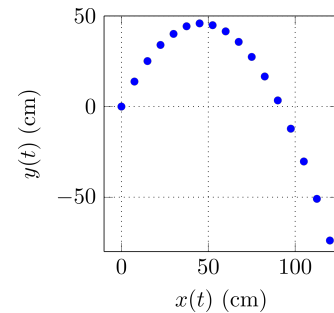


La trajectoire est la courbe $y(x)$ car le mouvement est plan. C'est une droite dans les deux premiers cas, et une parabole dans le dernier.

Chute dans glycérol



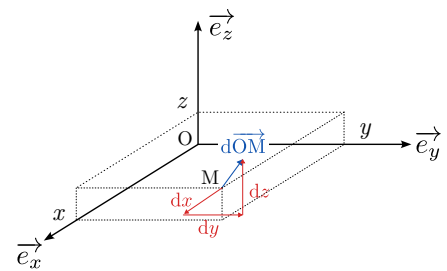
Chute libre verticale

Chute libre $\vec{v}(0) \neq \vec{0}$ 

Définition M1.8 : Déplacement élémentaire cartésien

Le **déplacement élémentaire** est le déplacement infiniment petit du point M pendant un temps infinitésimal dt . En cartésiennes,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{OM}(t+dt) = \begin{pmatrix} x(t)+dx \\ y(t)+dy \\ z(t)+dz \end{pmatrix} \\ \Rightarrow d\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t) = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z\end{aligned}$$

FIGURE M1.4 – $d\overrightarrow{OM}$ en cartésiennes.

II/B) 2 Vitesse

Définition M1.9 : Vitesse

La **vitesse** est la **limite du taux d'accroissement** du vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_t$$

Unité $[\vec{v}] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$



Important M1.1 : Vitesse et trajectoire

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire.

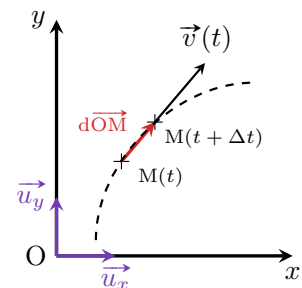


FIGURE M1.5

♥ Propriété M1.1 : Vitesse en cartésiennes

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z$$

Démonstration M1.1 : Vecteur vitesse

On peut donc voir la vitesse comme étant le **rapport** entre $d\overrightarrow{OM}$ et dt , ou comme étant la **dérivée** de $\overrightarrow{OM}(t)$. Comme les **vecteurs de la base cartésienne** sont constants dans le temps, on obtient dans les deux cas :

Rapport

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z}{dt} \\ \Leftrightarrow \vec{v}(t) &= \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z\end{aligned}$$

Dérivée

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} (x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z) \\ \Leftrightarrow \vec{v}(t) &= \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z\end{aligned}$$

Exemple M1.4 : Vitesse selon expérience

- ◇ Pour la chute dans le glycérol, $\dot{x}(t) = 0$ et $\dot{y}(t) = \text{cte}$. Ainsi, $\vec{v}(t)$ est constant, et dirigé vers le bas.
- ◇ Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\dot{x}(t) = 0$ et $\dot{y}(t)$ diminue : $\vec{v}$ vers le bas, de norme variable.
- ◇ Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\dot{x}(t) = \text{cte}$ et $\dot{y}(t)$ varie : $\vec{v}$ tourne, de norme variable.

Attention M1.2 : Vitesse vecteur vs. scalaire

Selon le contexte, on fera particulièrement attention à ne pas confondre le mot « vitesse » entre le **vecteur** ou sa **norme**. Une vitesse, en **norme**, **ne peut pas être négative** ; les **composantes** du vecteur vitesse **peuvent être négatives**. On utilise parfois le mot « **vélocité** » pour faire référence explicite au **vecteur vitesse**.

II/B) 3 Accélération**Définition M1.10 : Accélération**

On définit l'**accélération** comme la **limite du taux d'accroissement** du vecteur vitesse :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_t = \left. \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right|_t \quad \text{Unité} \quad [\vec{a}] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Important M1.2 : Accélération et trajectoire

Le vecteur accélération est toujours dirigé vers l'intérieur à la trajectoire (partie concave).

Propriété M1.2 : Accélération en cartésiennes

Par distribution de $\frac{d}{dt}$, on obtient : $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z$

Exemple M1.5 : Accélération selon expérience

- ◇ Pour la chute dans le glycérol, $\ddot{x}(t)$ et $\ddot{y}(t)$ sont nuls : le vecteur accélération est nul.
- ◇ Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\ddot{x}(t) = 0$ et $\ddot{y}(t)$ est constant : $\vec{a}$ vers le bas, norme constante.
- ◇ Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\ddot{x}(t) = 0$ et $\ddot{y}(t)$ est constant : $\vec{a}$ vers le bas, norme constante.

Attention M1.3 : Accélération

- ◇ L'accélération étant liée à la **variation de la vélocité**, si la vitesse diminue, l'accélération peut être négative.
- ◇ Pour que l'accélération soit nulle, il faut que **toutes les composantes** de la vitesse soient constantes. Un mouvement peut être de $v = \text{cte}$, mais $\vec{v}$ tourne donc $\vec{v} \neq \text{cte}$, donc $\vec{a} \neq 0$ (cf. chapitre M3).

II/C Exemples de mouvements**II/C) 1 Mouvement rectiligne uniforme****Définition M1.11 : Mouvement rectiligne uniforme**

Un mouvement est dit **uniforme** si la **vitesse scalaire** $v = \|\vec{v}\|$ **est constante**. Il est dit rectiligne si la trajectoire est une droite.

Application M1.1 : Mouvement rectiligne uniforme

Montrer qu'un mouvement caractérisé $\vec{v}(t) = v_0 \vec{u}_x$ donne un mouvement rectiligne uniforme.

$$\vec{OM}(t) = \int_0^t \vec{v}(t) dt + \vec{OM}(0) = [v_0 t]_0^t \vec{u}_x + \vec{OM}(0) \Leftrightarrow \vec{OM}(t) = v_0 t \vec{u}_x + \vec{OM}(0)$$

ce qui décrit bien une droite dans l'espace. C'est le cas de la chute dans le glycérol.

II/C) 2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Définition M1.12 : Uniformément accéléré

Un mouvement est dit **uniformément accéléré** si la **norme du vecteur accélération** $\|\vec{a}\|$ est **constante**.

Application M1.2 : Mvt. rect. uniformément accéléré

Déterminer les équations horaires pour un mouvement uniformément accéléré caractérisé par $\vec{a}(t) = -g\vec{u}_y$ avec des conditions initiales nulles ($\vec{OM}(0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(0) = \vec{0}$). Tracer $v(t)$ et $y(t)$.

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= -gt\vec{u}_y + \underbrace{\vec{v}_0}_{=\vec{0}} \\ \Rightarrow \vec{OM}(t) &= -\frac{1}{2}gt^2\vec{u}_y + \underbrace{\vec{OM}(0)}_{=\vec{0}} \\ \text{D'où } \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

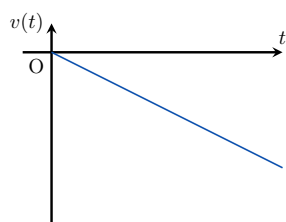
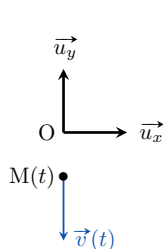


FIGURE M1.6

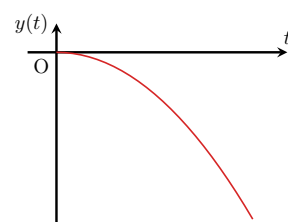


FIGURE M1.7

II/C) 3 Mouvement courbe uniformément accéléré

♥ Application M1.3 : Mvt. courbe uniformément accéléré

Soit $\vec{a}(t) = -g\vec{u}_y$ avec $\vec{v}(0) = v_0\vec{u}_x$ et $\vec{OM}(0) = \vec{0}$.

- 1 Déterminer les équations horaires. Tracer les composantes de la vitesse et de la position.
- 2 Déterminer l'équation de la trajectoire. Tracer la trajectoire.

1

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= -gt\vec{u}_y + \vec{v}(0) = -gt\vec{u}_y + v_0\vec{u}_x \\ \Rightarrow \vec{OM}(t) &= -\frac{1}{2}gt^2\vec{u}_y + v_0t\vec{u}_x \\ \text{Soit } \begin{cases} x(t) = v_0t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

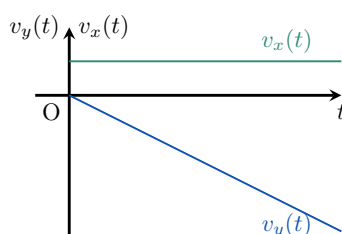


FIGURE M1.8

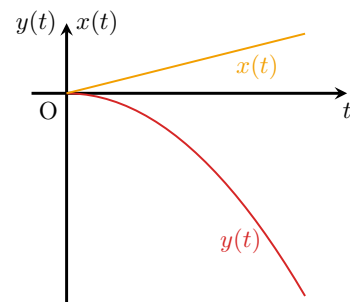


FIGURE M1.9

2

Pour obtenir la trajectoire, on veut déterminer la courbe $y(x)$ décrite dans le plan xy . Pour cela, exprimons t en fonction de x et remplaçons t dans l'expression de y :

$$\begin{aligned}t &= \frac{x}{v_0} \\ \Rightarrow y(x) &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2}\end{aligned}$$

La trajectoire obtenue est alors une parabole.

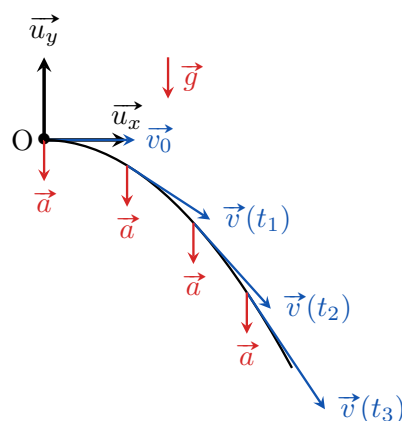


FIGURE M1.10