Mécanique – chapitre 2

Dynamique du point en coordonnées cartésiennes

Sommaire

Capacités exigibles

- ☐ Première loi de Newton : décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
- ☐ Deuxième loi de Newton : déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen.
- ☐ Troisième loi de Newton : établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
- ☐ Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé.
- ☐ Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points : $\vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = m\vec{v}_{\mathrm{G}/\mathcal{R}}$.
- ☐ Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.
- ☐ Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.
- ☐ Étudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme.
- ☐ Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée.

L'essentiel

I Introduction

I/A Inertie et forces

Mettre en mouvement un corps revient à en **modifier la vitesse**. Il est cependant plus facile de mettre en mouvement (ou arrêter le mouvement) certains corps par rapport à d'autres. Ce phénomène s'appelle l'**inertie**, et est proportionnel à la **masse d'un corps**.

Définition M2.1 : Inertie et quantité de mouvement

La résistance d'un corps matériel de masse m à varier de vitesse est appelée **inertie**, quantifié par la **masse** et le **vecteur quantité de mouvement** du point matériel M du corps :

$$\boxed{\vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t) = m\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)}$$

avec $\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)$ le vecteur vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Il est en effet plus difficile de déplacer une voiture à l'arrêt qu'un caddie à l'arrêt, et inversement il est plus difficile d'arrêter une voiture qu'un caddie. Dans l'analogie électromécanique, c'est l'inductance L qui s'oppose à la variation du courant quand m s'oppose à la variation de la vitesse.

Définition M2.2 : Forces, forces fondamentales

Les **forces** caractérisent les actions mécaniques sur un point matériel M, et causent son mouvement. Ce sont des **vecteurs** et elles sont **indépendantes du référentiel**. Il existe quatre de ces forces que l'on caractérise de « fondamentales » :

Unité

$$\boxed{1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}}$$

Tableau M2.1 – Interactions fondamentales

Type / Caract.	**Faible**	**Forte**	**Électromag.**	**Gravitationnelle**
Intensité	Faible	Très forte	Forte	Faible
Portée	Extrême$^{\underline{t}}$ courte ($\approx 10^{-18}\,\mathrm{m}$)	Très courte ($\approx 10^{-14}\,\mathrm{m}$)	Longue	Très longue
Agit sur	Fermions	Quarks et gluons	Particules chargées	Particules massives
Conséquences	Désintégration radioactive, fusion nucléaire	Cohésion des nucléons	Cohésion des matériaux, propriétés mécaniques	Poids, organisation cosmique

Rappel M2.1 : Interactions électrostatique et gravitationnelle

Interaction électrostatique

Les particules de **même signe** se **repoussent**, tandis que celles de signes **opposées s'attirent**. Elle est responsable de la **cohésion des matériaux** et de leurs propriétés matérielles (dureté, viscosité...).

La force d'interaction électrostatique causée par une particule de charge q_A sur une charge q_B est :

$$\vec{F}_{e,\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A q_B}{\mathrm{AB}^2}\vec{u_r} \quad \text{avec} \quad \vec{u_r} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$$

$\vec{u_r}$ vecteur unitaire dirigé de A vers B.

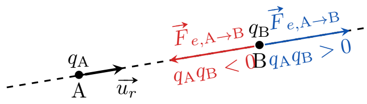

Figure M2.1 – Interaction électrostatique.

Interaction gravitationnelle

Avec l'interaction gravitationnelle, la masse étant une grandeur positive, toutes les massives s'attirent entre elles. Elle prédomine à l'échelle astronomique.

La force d'interaction gravitationnelle causée par une masse m_A sur une masse m_B est :

$$\vec{F}_{g,\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_B}{\mathrm{AB}^2}\vec{u_r} \quad \text{avec} \quad \vec{u_r} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$$

$\vec{u_r}$ vecteur unitaire dirigé de A vers B.

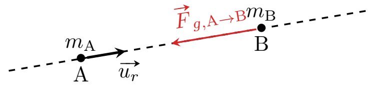

Figure M2.2 – Interaction gravitationnelle.

I/B Les trois lois de Newton (1687)

I/B) 1 Principe d'inertie

Loi M2.1 : Principe d'inertie

Il existe des référentiels dits **galiléens** dans lesquels un point M soumis à **aucune action mécanique** est

- soit **au repos** ;
- soit en **translation rectiligne uniforme**.

Ainsi, tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

Important M2.1 : Caractère galiléen des référentiels

Il n'existe rigoureusement aucun référentiel galiléen, mais on peut en considérer certains comme *approximativement* galiléens lorsqu'on étudie le problème sur **une durée assez courte** devant une durée typique du système, afin que les effets de non-galiléeanité soient négligeables. Les référentiels fondamentaux sont alors *supposés* galiléens si le mouvement est plus court que :

- **Héliocentrique** : un *trajet significatif du Soleil dans la galaxie*, soit **plusieurs millions d'années** ;
- **Géocentrique** : un *trajet significatif de la Terre autour du Soleil*, soit **une année** ;
- **Terrestres** : une *rotation significative de la Terre*, soit **une journée**.

I/B) 2 Principe fondamental de la dynamique

C'est une des lois les plus importantes de la physique, permettant de **relier le mouvement cinématique** (vitesse et associés) d'un corps en **fonction de ses causes** (les forces extérieures).

Loi M2.2 : Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, l'évolution du vecteur **quantité de mouvement** $\vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)$ est reliée aux **forces extérieures** agissant sur le système :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}}$$

Lorsque le **système est fermé** et donc la **masse est constante**, on a $\forall t, m\cancel{(t)} \Rightarrow \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t) = m\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)$, ainsi

$$\boxed{m\vec{a}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t) = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}}$$

avec $\vec{a}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)$ le vecteur accélération du point M.

Remarque M2.1 : Mouvements de systèmes ouverts

Certains mouvements ne peuvent donc pas être traités avec cette dernière formulation s'ils s'accompagnent d'une variation de masse :

- Le mouvement d'une fusée qui brûle son carburant puis abandonne ses réservoirs ;
- Le mouvement d'une goutte d'eau qui s'évapore lors de sa chute.

Dans ces cas-là, on utilise la première formulation.

I/B) 3 Loi des actions réciproques

Loi M2.3 : Loi des actions réciproques

Pour deux points M_1 et M_2 en interaction, la force exercée par le point 1 sur le point 2 est égale à l'**opposé** de la force exercée par le point 2 sur le point 1 :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}}$$

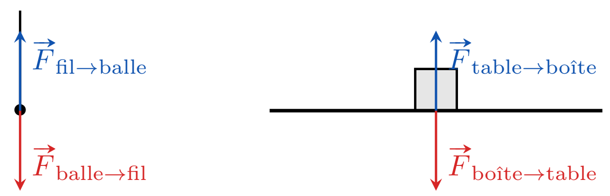

Figure M2.3 – Actions réciproques

II Ensembles de points

II/A Centre d'inertie

Définition M2.3 : Centre d'inertie

Le **centre d'inertie** ou **centre de gravité** G d'un ensemble de points matériels M_i de masses m_i est défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \sum_i \frac{m_i}{m_{\text{tot}}} \overrightarrow{OM_i}} \quad \text{avec} \quad \text{O quelconque}$$

Il s'agit du **barycentre** des points du système, **pondéré par leur masse**.

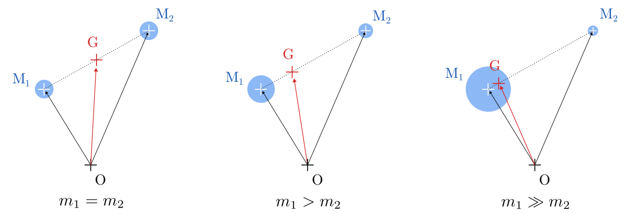

Figure M2.4 – Centres de gravités.

Propriété M2.1 : Centre d'inertie

On peut réécrire cette relation sous la forme :

$$\boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}}$$

Démonstration M2.1 : Centre d'inertie

$$\overrightarrow{OG} = \sum_i \frac{m_i}{m_{\text{tot}}} \overrightarrow{OM_i} \Leftrightarrow \underbrace{m_{\text{tot}}}_{=\sum_i m_i} \overrightarrow{OG} = \sum m_i \overrightarrow{OM_i}$$

$$\Leftrightarrow \sum_i m_i \left(\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}}$$

Application M2.1 : Centres d'inertie

Soient 2 masses placées en A et en B. Déterminer la position de G en calculant $\overrightarrow{AG}$ dans les deux cas suivants :

1) A (m) — G — B (m)

2) A ($3m$) — G — B (m)

---

1) O = A ⇒ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{m}{2m}\overrightarrow{AB} + \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$

2) De même, $\overrightarrow{AG} = \dfrac{m}{4m}\overrightarrow{AB} + \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}}$

Remarque M2.2 : Solides continus

Cette définition peut être étendue aux solides qui peuvent être vus comme un ensemble infini de points infiniment proches. Dans ce cas, la somme discrète devient une intégrale.

II/B Quantité de mouvement d'un ensemble de points

Définition M2.4 : $\vec{p}$ d'un ensemble de points

Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble $\mathcal{S}$ de points matériels M_i de masses m_i s'exprime :

$$\boxed{\vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}(t) = \sum_i \vec{p}_{M_i/\mathcal{R}}(t) = \sum_i m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}(t)}$$

Propriété M2.2 : $\vec{p}_{\mathcal{S}}$ et centre d'inertie

La quantité de mouvement de cet ensemble $\mathcal{S}$ est celle d'un point matériel placé en G et de masse m_{tot} :

$\boxed{\vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}(t) = m_{\text{tot}}\vec{v}_{\mathrm{G}/\mathcal{R}}(t)}$ autrement dit, **tout se passe comme si la masse était concentrée en G**

Démonstration M2.2 : $\vec{p}_{\mathcal{S}}$ et centre d'inertie

Pour que les choses soient simples, il faudrait donc que $\vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}(t)$ soit relié au centre d'inertie. Or,

$$\vec{v}_{\mathrm{G}/\mathcal{R}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{1}{m_{\text{tot}}}\underbrace{\sum_i m_i \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}}_{\vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}(t)} \Leftrightarrow \boxed{\vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}(t) = m_{\text{tot}}\vec{v}_{\mathrm{G}/\mathcal{R}}(t)} \qquad \blacksquare$$

II/C Théorème de la résultante cinétique

Si on peut étudier la cinématique d'un corps par l'étude de son centre de gravité, comment les forces interviennent-elles sur cet ensemble de points ?

Démonstration M2.3 : Théorème de la résultante cinétique

Considérons pour simplifier un système de deux points M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 en mouvement dans un référentiel galiléen. On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacun d'entre eux :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{M}_1/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{M}_2\to\mathrm{M}_1} + \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_1} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{M}_2/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2} + \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_2}$$

avec deux types de forces : les **forces intérieures** du système, ici celles exercées par M_2 sur M_1, et les **forces extérieures**, c'est-à-dire toutes les autres. Ainsi, avec la définition de la quantité de mouvement d'un ensemble de points,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{M}_1/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{M}_2/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\vec{F}_{\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2} + \vec{F}_{\mathrm{M}_2\to\mathrm{M}_1}}_{=\vec{0} \text{ d'après la 3ème loi}} + \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_1} + \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_2} \qquad \blacksquare$$

Propriété M2.3 : Théorème de la résultante cinétique

Le **PFD pour un point** se transpose à un *ensemble de points* en prenant pour **point matériel** le **centre d'inertie G** affecté de la masse totale m_{tot} du système, en ne considérant que les **forces extérieures** s'appliquant à l'ensemble :

TRC : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = m_{\text{tot}}\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{G}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathcal{S}}}$$

Important M2.2 : Conclusion ensemble de points

Le mouvement du centre de gravité n'est affecté que par les forces extérieures au système. Ainsi, dans la suite, on étudiera le **mouvement du centre de gravité**, de masse m_{tot}, soumis aux **forces extérieures** au système.

Outils M2.1 : Étapes de résolution

1. **Système et référentiel** : quel est l'objet en mouvement, dans quel référentiel l'étudie-t-on ?
2. **Repère et repérage** : donner le repère, détailler le repérage, si existantes les conditions initiales, et *définir les notations* nécessaires.
3. **Bilan des forces** : faire le bilan **projeté dans le repère** choisi.
4. **Schéma** : faire un schéma du problème dans une **situation quelconque** [1], avec le système, repère, et forces.
5. **Deuxième loi de Newton** : appliquer le PFD/TRC au système.
6. **Équations scalaires** : donner les trois équations $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$ et $\ddot{z}(t)$.
7. **Répondre aux questions** : le plus souvent, obtenir les équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

III Forces usuelles

III/A Poids et poussée d'ARCHIMÈDE

Définition M2.5 : Poids et pesanteur

Dû à l'attraction gravitationnelle de la Terre, un corps de masse m à sa surface subit une force que l'on appelle le **poids**, telle que :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}}$$

avec $\vec{g}$ le vecteur **accélération de la pesanteur**, de norme $g = \|\vec{g}\| = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et dirigé **verticalement vers le sol**.

Par définition de l'interaction gravitationnelle, proche de la surface terrestre on a

$$\boxed{\vec{g} = -\mathcal{G}\frac{m_T}{{R_T}^2}\vec{u_z}}$$

avec m_T et R_T la masse et le rayon de la Terre, $\mathcal{G}$ la constante gravitationnelle, et $\vec{u_z}$ vertical ascendant.

Définition M2.6 : Chute libre, flèche et portée

Un système en **chute libre** pure ne subit **que son poids**. On appelle **portée** d'un tir la **distance horizontale** entre l'origine et le point d'impact, et **flèche** la **hauteur maximale** atteinte par le projectile.

Propriété M2.4 : Tir en chute libre

Soit un corps tiré à la surface de la Terre à altitude nulle, soumis uniquement à son poids, lancé à la vitesse $\vec{v_0}$ faisant un angle (α) avec le sol. Alors :

1) La masse du corps n'intervient pas dans l'expression de son accélération ;
2) La trajectoire qu'il forme est une parabole ;
3) La portée maximale est atteinte pour $(\alpha) = \underline{\pi/4 \text{ rad}}$;
4) La flèche maximale est atteinte pour $(\alpha) = \underline{\pi/2 \text{ rad}}$;
5) Le temps de vol est maximal pour $(\alpha) = \underline{\pi/2 \text{ rad}}$.

Démonstration M2.4 : Tir en chute libre

1) $\boxed{1}$ **Système et référentiel** : {balle} dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen

$\boxed{2}$ **Repère et repérage** :

◇ **Repère** : $(\mathrm{O}, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ (voir schéma)

◇ **Repérage** :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= x(t)\vec{u_x} + y(t)\vec{u_y} + z(t)\vec{u_z}\\
\vec{v}(t) &= \dot{x}(t)\vec{u_x} + \dot{y}(t)\vec{u_y} + \dot{z}(t)\vec{u_z}\\
\vec{a}(t) &= \ddot{x}(t)\vec{u_x} + \ddot{y}(t)\vec{u_y} + \ddot{z}(t)\vec{u_z}
\end{aligned}$$

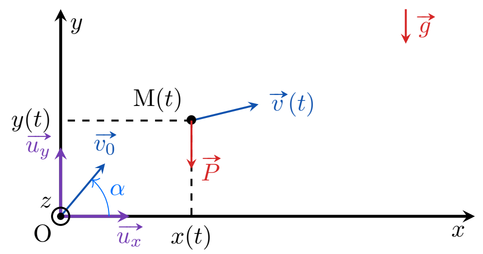

FIGURE M2.5 – $\boxed{4}$ Schéma

◇ **Conditions initiales** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(0) = v_0\cos(\alpha)\vec{u_x} + v_0\sin(\alpha)\vec{u_y}$

$\boxed{3}$ **Bilan des forces** : Ici, seul le poids s'applique :

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$

$\boxed{5}$ **PFD.** $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}(t) = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P}$

$\boxed{6}$ **Équations scalaires** : on projette sur les axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0\\ m\ddot{y}(t) = -mg\\ m\ddot{z}(t) = 0 \quad \text{ignoré dans la suite}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ddot{x}(t) = 0\\ \ddot{y}(t) = -g\end{cases}$$

1. On ne fait **jamais** de schéma à l'équilibre ou à des angles particuliers (45° par exemple)

On remarque donc bien que l'accélération ne dépend pas de la masse ; ainsi, *sans frottements*, **tous les corps chutent à la même vitesse**. Voir cette vidéo pour une expérience sous vide.

2) On commence par trouver les équations horaires. Pour cela, on intègre l'accélération pour obtenir la vitesse :

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = K_1 \\ \dot{y}(t) = -gt + K_2\end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases}\dot{x}(0) = v_0\cos(\alpha) = K_1 \\ \dot{y}(0) = v_0\sin(\alpha) = K_2\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\dot{x}(t) = v_0\cos(\alpha) \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0\sin(\alpha)\end{cases}}$$

De même pour les équations horaires du mouvement :

$$\begin{cases}x(t) = v_0 t\cos(\alpha) + C_1 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin(\alpha) + C_2\end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases}x(0) = 0 = C_1 \\ y(0) = 0 = C_2\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}x(t) = v_0 t\cos(\alpha) \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin(\alpha)\end{cases}}$$

Si on cherche la trajectoire, il s'agit alors d'obtenir la courbe $y(x)$ décrite dans le plan xy, c'est-à-dire éliminer le temps t. À partir de l'équation horaire sur $\overrightarrow{u_x}$, on a

$$t = \frac{x}{v_0\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{{v_0}^2\cos^2(\alpha)} + v_0\sin(\alpha)\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x) = -\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2(\alpha)x^2} + x\tan(\alpha)}$$

■

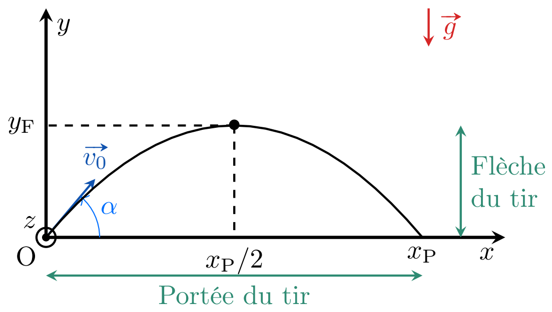

Figure M2.6 – Tir en chute libre.

3) On trouve x_P tel que :

$$y(x_P) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x_P}_{\neq 0}\left(-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2(\alpha)}x_P + \tan(\alpha)\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2(\alpha)}x_P + \tan(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_P = \frac{2{v_0}^2\cos^2(\alpha)}{g}\tan(\alpha) = \frac{2{v_0}^2\cos^{\cancel{2}}(\alpha)}{g}\frac{\sin(\alpha)}{\cancel{\cos(\alpha)}} = \frac{{v_0}^2}{g}\times 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_P = \frac{{v_0}^2}{g}\sin(2\alpha)} \quad \text{et} \quad x_{P,\max} \quad \text{pour} \quad \sin(2\alpha_{\max}) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{\max} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}}$$

■

4) On trouve y_F quand la vitesse **verticale** s'annule, $\dot{y}(t_F) = 0$:

$$\dot{y}(t_F) = -gt_F + v_0\sin(\alpha) = 0 \Leftrightarrow t_F = \frac{v_0\sin(\alpha)}{g}$$

$$\Rightarrow y(t_F) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin(\alpha)}{g}\right)^2 + v_0\sin(\alpha)\times\frac{v_0\sin(\alpha)}{g}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y_F = \frac{{v_0}^2}{2g}\sin^2(\alpha)} \quad \text{et} \quad y_{F,\max} \quad \text{pour} \quad \sin^2(\alpha_{\max}) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{\max} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}}$$

■

5) Le temps de vol est le temps pour lequel le projectile retombe au sol, c'est-à-dire $t(x_P)$:

$$\Leftrightarrow t(x_P) = \frac{\frac{v_0^{\cancel{2}}}{g}\times 2\sin(\alpha)\cancel{\cos(\alpha)}}{\cancel{v_0}\cancel{\cos(\alpha)}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t(x_P) = 2\frac{v_0}{g}\sin(\alpha)} \quad \text{et} \quad t_{x_P,\max} \quad \text{pour} \quad \sin(\alpha_{\max}) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{\max} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}}$$

■

Définition M2.7 : Poussée d'Archimède

Lorsqu'un objet est dans un fluide, il subit une force nommée **poussée d'Archimède** et égale à l'**opposé du poids du fluide déplacé**. Elle est parfois notée $\vec{\Pi}$ ou $\vec{F}_A$, et on a :

$$\boxed{\vec{F}_A = -\rho_{\text{fluide}}V_{\text{immergé}}\,\vec{g}}$$

avec ρ_{fluide} la masse volumique du fluide et $V_{\text{immergé}}$ le volume de l'objet qui est dans le fluide.

Application M2.2 : Glaçon immergé

Quelle est la proportion immergée d'un glaçon ? On donne $\rho_{\text{eau}} = 1{,}00 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\rho_{\text{glace}} = 9{,}17 \times 10^2\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

On suppose un glaçon immobile, donc d'accélération nulle. Il subit son poids et la poussée d'Archimède :

$$\vec{0} = \vec{\Pi} + \vec{P}$$

Or $\quad \vec{P} = m\vec{g} = \rho_{\text{glace}} V_{\text{glaçon}}\,\vec{g} \quad$ et $\quad \vec{\Pi} = -\rho_{\text{eau}} V_{\text{immergé}}\,\vec{g}$

$$\Rightarrow -\rho_{\text{eau}} V_{\text{immergé}}\cancel{\vec{g}} + \rho_{\text{glace}} V_{\text{glaçon}}\cancel{\vec{g}} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{V_{\text{immergé}}}{V_{\text{glaçon}}} = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} = 91{,}7\,\%}$$

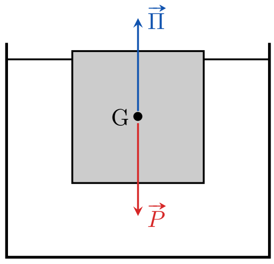

Figure M2.7

III/B Frottements fluides

III/B) 1 Définition

Définition M2.8 : Forces de frottements fluide

Un objet en mouvement dans un fluide subit une force de frottements dite fluide $\vec{F_f}$ qui est une force de **freinage**, donc **opposée à la vitesse** $\vec{v}$. Selon la norme de la vitesse, on a :

Faibles vitesses

$\vec{F_f} \propto v$: $\boxed{\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}(t)}$ linéaire

Vitesses élevées

$\vec{F_f} \propto v^2$: $\boxed{\vec{F_f} = -\beta v(t)\vec{v}(t)}$ quadratique

Remarque M2.3 : Coefficient frottements fluides

En pratique, on verra parfois $\quad \beta = \dfrac{1}{2}\rho_{\text{fluide}} S c_x \quad$ avec

- ρ_{fluide} la masse volumique du fluide ;
- S la surface frontale (« l'ombre » que fait l'objet sur un flux) ;
- c_x un coefficient sans dimension dépendant surtout de la forme de l'objet.

III/B) 2 Chute avec frottements linéaires

Propriété M2.5 : Chute frottements linéaires

Soit une bille chutant dans une éprouvette d'huile, lâchée sans vitesse initiale à son entrée dans le fluide. L'expression de sa vitesse est alors

$$\boxed{v(t) = g\tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{m}{\alpha}}$$

Démonstration M2.5 : Chute frottements linéaires

1 **Système et référentiel** : {bille} dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen

2 ◇ **Repère** : $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ avec $\vec{u_y}$ verticale ascendante.

◇ **Repérage** : $\overrightarrow{OM}(t) = y(t)\vec{u_y} \quad$ et $\quad \vec{v}(t) = \dot{y}(t)\vec{u_y} \quad$ et $\quad \vec{a}(t) = \ddot{y}(t)\vec{u_y}$

◇ **Conditions initiales** : $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0} \quad$ et $\quad \vec{v}(0) = v_0\cos(\alpha)\vec{u_x} + v_0\sin(\alpha)\vec{u_y}$

3 **Bilan des forces.**

Poids $\quad \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$

Frottements fluides $\quad \vec{F_f} = -\alpha\vec{v}(t) = -\alpha\dot{y}(t)\vec{u_y}$

Poussée d'Archimède $\vec{F}_A$ négligée

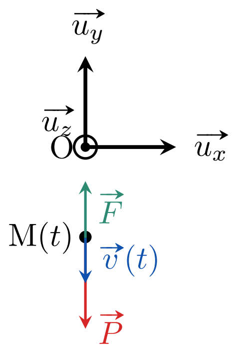

Figure M2.8 – 4

5 **PFD.** $\quad m\vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{F_f}$

6 **Équations scalaires.** On obtient ici trois équations différentielles sur la vitesse, mais en absence de vitesse initiale sur x et z, il n'y aura pas de mouvement sur ces coordonnées : on s'intéresse donc à l'équation différentielle sur $v_y(t)$ que l'on appelle simplement $v(t)$:

$$m \left.\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}\right|_t = -mg - \alpha\dot{y}(t) \Leftrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_t + \frac{\alpha}{m}v(t) = -g \Leftrightarrow \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_t + \frac{v(t)}{\tau} = -g} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\alpha}$$

7 **Résolution** :

$$v_p = -g\tau \quad \text{et} \quad v_h(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau}$$
$$\Rightarrow v(t) = v_h(t) + v_p = v(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau} - g\tau$$

Or, $$v(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{K = g\tau} \quad \text{donc} \quad \boxed{v(t) = g\tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)}$$ ■

Nous avons déjà établi que, par analyse des équations différentielles, il est aisé de trouver des grandeurs typiques du système : la solution particulière donne la solution limite, et on trouve le temps typique par analyse dimensionnelle. On systématise cette démarche pour trouver des informations sans résolution : c'est l'**adimensionnement**.

Important M2.3 : Adimensionnement d'équations différentielles

Soit une équation différentielle linéaire $$\sum_i f_i(t) \left.\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i}\right|_t = g(t)$$

Il est possible d'adimensionner cette équation en définissant

$$\boxed{t^* = \frac{t}{T}} \quad \text{et} \quad \boxed{y^*(t^*) = \frac{y(t)}{Y}} \quad \text{tels que} \quad \boxed{\sum_i 1 \cdot \left.\frac{\mathrm{d}^i y^*}{\mathrm{d}t^{*i}}\right|_{t^*} = \pm 1}$$

auquel cas, Y et T sont des grandeurs caractéristique du système physique.

Ceci fonctionne également pour des ED non-linéaires.

Application M2.3 : Adimensionnement frottements linéaires

Adimensionner l'équation précédente pour retrouver le temps caractéristique et la vitesse en régime permanent.

$$\frac{V}{T}\left.\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*}\right|_{t^*} + \frac{\alpha}{m}Vv^*(t^*) = -g$$
$$\Leftrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*}\right|_{t^*} + \frac{\alpha T}{m}v^*(t^*) = -\frac{gT}{V}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*}\right|_{t^*} + v^*(t^*) = -1}$$

Avec $$\boxed{T = \frac{m}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \boxed{V = gT = \frac{gm}{\alpha}}$$

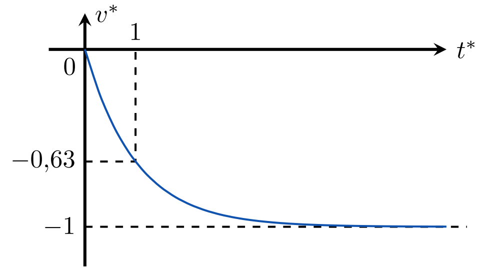

Figure M2.9

Interprétation M2.1 : Équations adimensionnées

L'écriture sous forme adimensionnée permet de ramener la résolution de l'équation à un problème uniquement mathématique, débarrassé des constantes physiques et permettant de voir rapidement le fonctionnement d'un système même quand on ne sait pas résoudre l'équation.

III/B) 3 Chute avec frottements quadratiques

Propriété M2.6 : Chute frottements quadratiques

Soit un corps chutant dans l'air, lâché sans vitesse initiale depuis l'origine. En prenant en compte les frottements, on trouve les grandeurs typiques

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{m}{\beta g}}}$$

Démonstration M2.6 : Chute frottements quadratiques

Pour une chute dans l'air, la vitesse d'un corps est presque toujours suffisamment élevée pour que les frottements soient quadratiques en la vitesse.

On choisit $\boxed{\text{ici } \overrightarrow{u_y} \text{ vers le bas}}$, tel que $v(t) = \dot{y}(t) > 0$. On reprend l'établissement précédente du système, on obtient alors

$$\overrightarrow{F_f} = -\beta\dot{y}^2(t)\overrightarrow{u_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u_y} \quad \text{soit} \quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_t + \frac{\beta}{m}v^2(t) = g}$$

La résolution analytique exacte de cette équation sort du cadre du programme ; on peut en revanche **l'adimensionner pour trouver ses grandeurs typiques**. On définit donc $t^* = t/T$, $v^*(t*) = v(t)/V$, avec T et V des constantes à définir :

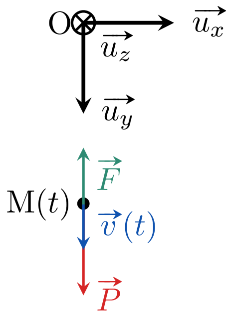

Figure M2.10

$$\begin{aligned} &\frac{V}{T}\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\beta}{m}V^2(v^*)^2 = g \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\beta}{m}VT(v^*)^2 = \frac{gT}{V} \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + (v^*)^2 = 1} \end{aligned}$$

Avec $VT = \dfrac{m}{\beta}$ et $\dfrac{V}{T} = g$

$$\Leftrightarrow V\cancel{T}\cdot\frac{V}{\cancel{T}} = \frac{mg}{\beta} \quad \text{et} \quad \frac{\cancel{V}T}{\cancel{V}/T} = \frac{m}{\beta g}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{m}{\beta g}}} \qquad \blacksquare$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle adimensionnée donne T grandeur typique du temps d'évolution de la vitesse, et V est la vitesse atteinte en régime permanent. Pour un-e humain-e chutant depuis un avion sans parachute, avec $m = 60\,\mathrm{kg}$ et $\beta \approx 0{,}25\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$, on a

$$\boxed{V = 50\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \approx 175\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{T \approx 5\,\mathrm{s}}$$

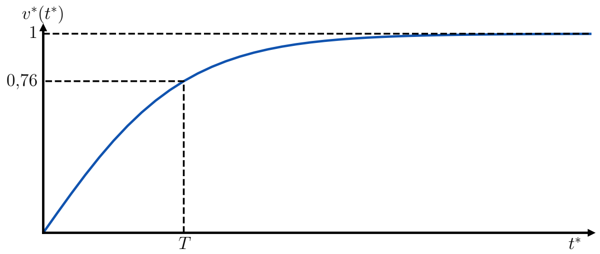

Figure M2.11 – $v^*(t^*) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t^*} - 1}{\mathrm{e}^{2t^*} + 1}$

III/C Force de frottements solides

Définition M2.9 : Réaction d'un support

La force exercée par un support sur un objet posé à sa surface est appelée **réaction** et est notée $\overrightarrow{R}$. Elle se décompose en deux forces :

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{R}_T$$

◇ $\overrightarrow{N}$ **normale** ($\perp$) au support ;

◇ $\overrightarrow{T}$ **tangentielle** ($\parallel$) au support, **opposée à** $\overrightarrow{v}$.

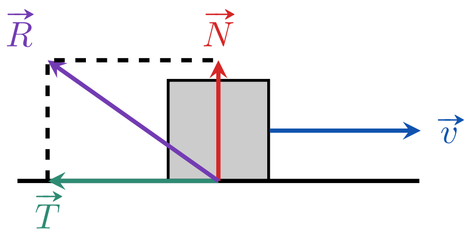

Figure M2.12 – Réaction support.

Implication M2.1 : Condition de support

La condition de support est $\|\overrightarrow{N}\| > 0$.

Propriété M2.7 : Lois du frottement de Coulomb

Les réactions normales et tangentielles sont reliées par les lois de Coulomb, telles que :

Solide non-glissant/statique	Solide glissant/dynamique
$T \leq f_s N$	$T = f_d N$

avec f_d le coefficient de frottements dynamiques (glissement) et f_s le coefficient de frottement statique (non-glissement), avec $f_d < f_s$; souvent, $f_s = f_d = f$.

Exemple M2.1 : Frottements solides

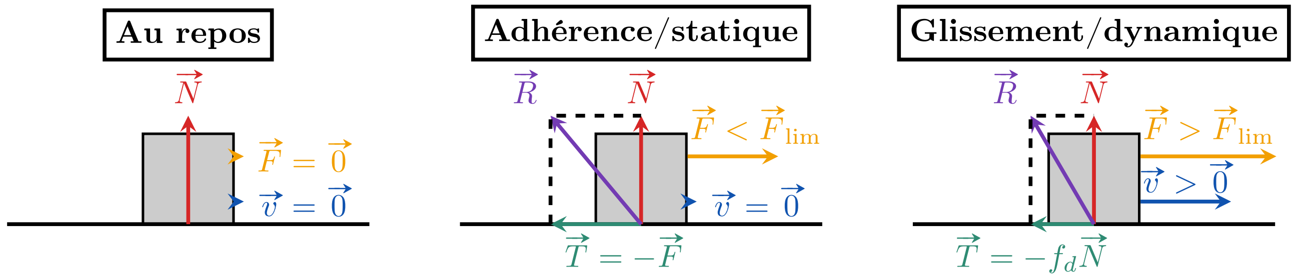

FIGURE M2.13 – Schéma exemple.

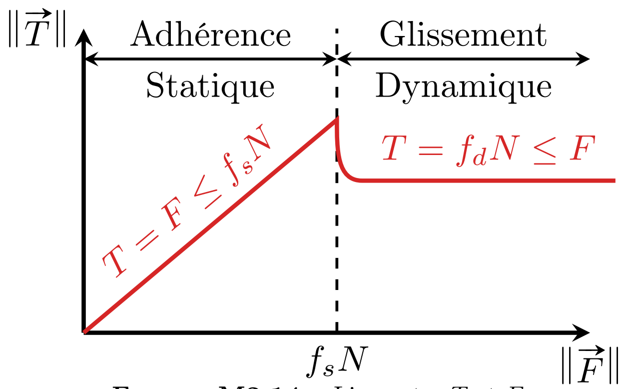

FIGURE M2.14 – Lien entre T et F

Attention M2.1 : Absence de frottements solides

L'absence de frottements solides implique $f = 0$, donc $T = 0$, mais N **n'est pas nulle**.

III/D Force de rappel d'un ressort

Rappel M2.2 : Force de rappel d'un ressort

On définit la force de rappel du ressort par :

$$\boxed{\vec{F}_r = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_k}}$$

- ◇ $k > 0$ la **constante de raideur** en $\underline{\text{N·m}^{-1}}$;
- ◇ ℓ_0 sa **longueur à vide** en $\underline{\text{m}}$;
- ◇ $\vec{u_k}$ unitaire dirigé **du support au point d'application**.

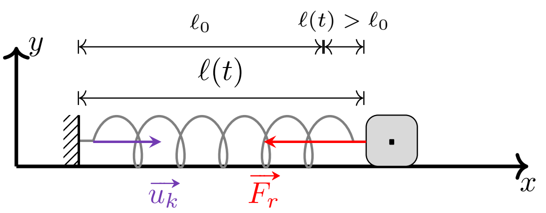

FIGURE M2.15 – Force de HOOKE.

Démonstration M2.7 : Ressort vertical

$\boxed{1}$ **Système et référentiel** : {masse} point M masse m, $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen.

$\boxed{2}$ **Repère et repérage** :

- ◇ **Repère** : $(\text{O}, \vec{u_z})$ vertical ascendant.
- ◇ **Repérage** : $\overrightarrow{\text{OM}}(t) = z(t)\vec{u_z}$; $\vec{v}(t) = \dot{z}(t)\vec{u_z}$; $\vec{a}(t) = \ddot{z}(t)\vec{u_z}$

$\boxed{3}$ **BdF** :

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$

Force HOOKE $\vec{F}_r = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_k} = k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_z}$

$\boxed{5}$ **PFD à l'équilibre** :

$$0 = -mg + k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) \Leftrightarrow k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = mg$$

$$\Leftrightarrow k\ell_{\text{eq}} = mg + k\ell_0 \Leftrightarrow \boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

■

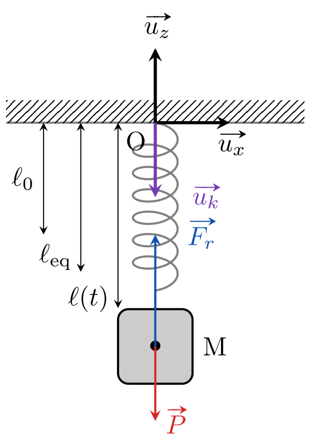

FIGURE M2.16 – $\boxed{4}$

5' **PFD général** :

$$
\begin{aligned}
m\ddot{z}(t) &= -mg + k(\ell(t) - \ell_0) \quad \ell(t) = -z(t)\\
\Leftrightarrow m\ddot{z}(t) + kz(t) &= -(mg + k\ell_0) \quad k\ell_{eq} = mg + k\ell_0\\
\Leftrightarrow & \boxed{\ddot{z}(t) + {\omega_0}^2 z(t) = -{\omega_0}^2 \ell_{eq}}
\end{aligned}
$$

■

Propriété M2.8 : Ressort vertical

Longueur d'équilibre

$$\boxed{\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

Équation différentielle

$$\boxed{\ddot{z}(t) + {\omega_0}^2 z(t) = -{\omega_0}^2 \ell_{eq}}$$