# TD application : mouvements courbes

## I Projection de vecteurs

**Outils M3.1 : Projection de vecteurs**

On peut projeter avec **trois méthodes** :

◇ **Produit scalaire** : on trouve individuellement les composantes du vecteur en calculant son produit scalaire avec chacun des vecteurs de la base donnée :

$$\vec{V} = \left(\vec{V}\cdot\vec{u_x}\right)\vec{u_x} + \left(\vec{V}\cdot\vec{u_y}\right)\vec{u_y} \quad \text{avec} \quad \vec{V}\cdot\vec{u_x} = V\cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{u_x}}\right) \quad \text{et} \quad \vec{V}\cdot\vec{u_y} = V\cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{u_y}}\right)$$

Il s'agit alors de **trouver les angles** sur le schéma, et de **remplacer les** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin(\alpha)$ etc, en faisant attention aux signes ($\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin(\alpha)$ par exemple).

◇ **Trigonométrie** : on peut aussi se baser sur le fait que les projections sont les **côtés adjacents et opposés d'un triangle rectangle**, et utiliser les fonctions trigonométriques pour écrire les composantes en fonction de la norme du vecteur et de l'angle. On trouve le signe en **regardant l'orientation de la projection**.

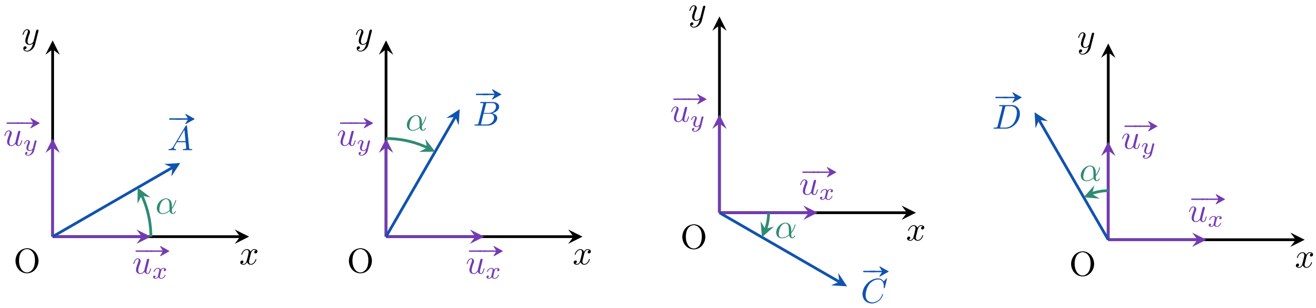
◇ **Vraisemblance** : pour vérifier son résultat, il est de bonne pratique de vérifier que le résultat est cohérent dans des cas limites, souvent $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, quand le vecteur cherché $\vec{V}$ est entièrement colinéaire à un vecteur de base. On peut en fait également utiliser cette méthode pour trouver les décompositions en sin et cos avec le bon signe directement. On procède ainsi :

▷ **Imaginer** $\alpha = 0$ : le vecteur cherché est **colinéaire** soit à $\vec{u_x}$, soit à $\vec{u_y}$ : étant donné que la décomposition donne toujours $\pm\cos(\alpha)$ et $\pm\sin(\alpha)$, pour $\alpha = 0$ il **ne reste que le cosinus** : c'est donc **ce vecteur qui porte le cosinus**.

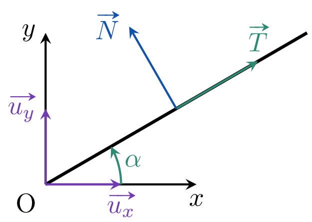
De plus, on **trouve le signe en regardant l'orientation relative** du vecteur cherché par rapport au vecteur de base : même sens $\Rightarrow$ signe $+$, sens opposé $\Rightarrow$ signe $-$.

▷ **Imaginer** $\alpha = \frac{\pi}{2}$ : par élimination, il **ne reste que le sinus pour l'autre**. On trouve le signe de la même manière.

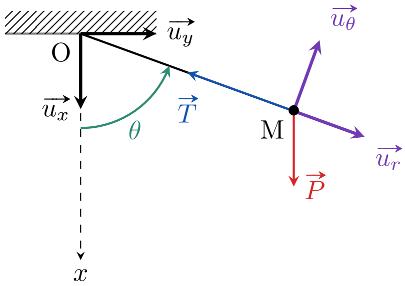
1 Exprimer chacun des 4 vecteurs suivants dans la bas dans la base $(\vec{u_x},\vec{u_y})$.




2 Exprimer $\vec{N}$ et $\vec{T}$ dans la base $(\vec{u_x},\vec{u_y})$ en fonction de $N$, $T$ et $\alpha$.



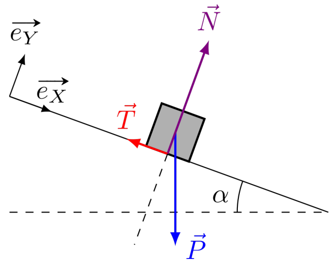

3 Exprimer $\vec{P}$ et $\vec{T}$ en fonction de $m$, $g$, $T$ et $\theta$ dans la base $(\vec{u_r},\vec{u_\theta})$ d'abord, puis dans la base $(\vec{u_x},\vec{u_y})$.




4 **Équilibre plan incliné** À l'équilibre des forces, on a

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$$

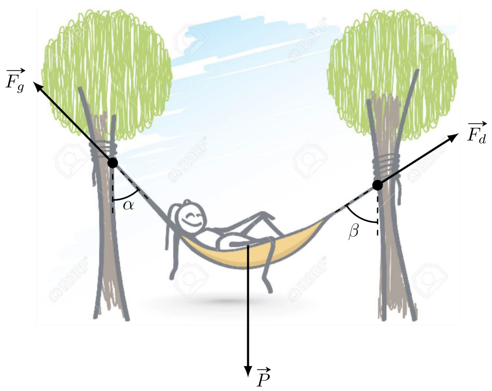
Projeter le poids dans la base inclinée et exprimer les normes de $\vec{T}$ et $\vec{N}$ en fonction de $m$, $g$ et $\alpha$.




5 **Équilibre hamac** À l'équilibre des forces, on a

$$\vec{F}_g + \vec{F}_d + \vec{P} = \vec{0}$$

Projeter les vecteurs $\vec{F}_g$ et $\vec{F}_d$ dans la base $(\vec{u_x},\vec{u_y})$ avec $\vec{u_x}$ parallèle au sol vers la droite et $\vec{u_y}$ vertical ascendant. En déduire la norme littérale de ces deux vecteurs. On prend $m = 60\,\text{kg}$, $\alpha = 45°$ et $\beta = 60°$. Faire l'application numérique.




## II Mouvement hélicoïdal

Un point matériel M a pour équations horaires en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega_0 t \qquad \text{avec} \qquad (\alpha,\omega_0) \quad \text{des constantes} \\ z(t) = \alpha t \end{cases}$$

1 Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base cylindrique.

2 Dessiner l'allure de la trajectoire.

3 Déterminer $h$ le pas de l'hélice, c'est-à-dire la distance selon l'axe $(\mathrm{O}z)$ dont sont séparés deux points successifs de la trajectoire correspondant à un même angle $\theta$ (modulo $2\pi$).

4 Ce mouvement est-il uniforme ? À quelle condition est-il circulaire ?

5 Déterminer les coordonnées cartésiennes de ce mouvement.

# III Masse du Soleil

La Terre subit de la part du Soleil la force d'attraction gravitationnelle :

$$\vec{F}_g = -\mathcal{G}\frac{M_T M_S}{R^2}\vec{u_r} \quad \text{où} \quad \mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{SI}$$

avec $\vec{u_r}$ le vecteur unitaire allant du Soleil vers la Terre. La Terre tourne autour du Soleil en décrivant un cercle de rayon $R = 149{,}6 \times 10^6\,\text{km}$.

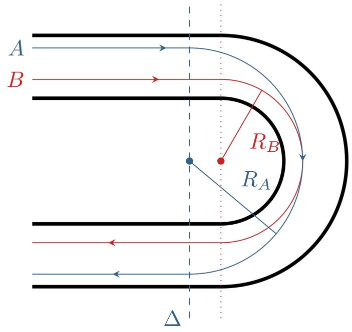
1 Déterminer la masse du Soleil.

# IV Course de F1

Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Fernando Alonso (point A) et Jenson Button (point B) arrivent en ligne droite et coupent l'axe $\Delta$ au même instant de leur parcours. Ils prennent cependant le virage de deux façons différentes :

- Alonso suit une trajectoire circulaire de rayon $R_A = 90{,}0\,\text{m}$ ;
- Button choisit une trajectoire de rayon $R_B = 75{,}0\,\text{m}$.

On cherche à déterminer quelle est la meilleure trajectoire, c'est-à-dire lequel des deux pilote gagne du temps par rapport à l'autre à la sortie du virage.




1 Déterminer les distances $D_A$ et $D_B$ parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par l'axe $\Delta$. Que peut-on conclure ?

2 Pour simplifier, on imagine que les deux voitures roulent à des vitesse $v_A$ et $v_B$ constantes entre leurs deux passages par l'axe $\Delta$. Déterminer ces vitesses, sachant que l'accélération des voitures doit rester inférieur à 0,8 g sous risque de dérapage. Les calculer numériquement.

3 Conclure quant à la meilleure trajectoire des deux.

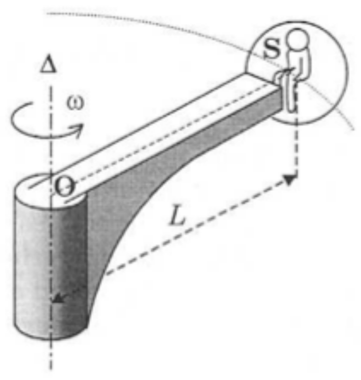
# V Entraînement d'une spationaute

Une spationaute doit subir différents tests d'aptitude aux vols spatiaux, notamment le test des accélérations. Pour cela, on l'installe dans une capsule de centre O, fixée au bout d'un bras métallique horizontal dont l'autre extrémité est rigidement liée à un arbre de rotation vertical $\Delta$. La longueur du bras est notée $L$. On assimilera la spationaute au point matériel S.

L'ensemble {capsule + bras + arbre} est mis en rotation avec une vitesse angulaire croissante, selon la loi

$$\omega(t) = \omega_0(1 - \exp^{-t/\tau})$$

avec $\omega_0$ la vitesse angulaire nominale du simulateur, et $\tau$ un temps caractéristique. On donne $L = 10{,}0\,\text{m}$ et $g = 9{,}81\,\text{m·s}^{-2}$.




1 Établir proprement le système d'étude.

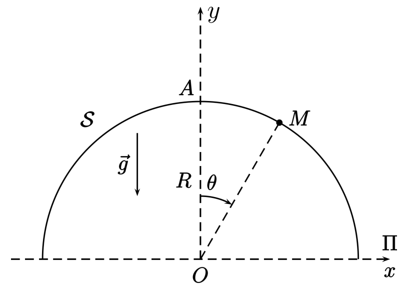
2 À partir de quelle durée peut-on supposer que le mouvement est circulaire et uniforme ? Que deviennent les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans ce cas ? Calculer alors la norme de l'accélération subie par la spationaute.

3 Quelle doit être la valeur de $\omega_0$ pour que l'accélération atteigne 10 g lors du régime de rotation uniforme ? On donnera le résultat en tours par second.

# TD entraînement : mouvements courbes

## I Glissade d'un pingouin sur un igloo

Un pingouin, assimilable à un point matériel M de masse $m$ décide de faire du toboggan. Il s'élance sans vitesse initiale du sommet A d'un igloo voisin, assimilable à une demi sphère $S$ de rayon $R$ et de centre O, posée sur un plan horizontal Π. On considère que le glissement s'effectue sans frottement dans le plan vertical $(x\mathrm{O}z)$.




1 Appliquer le PFD au pingouin pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle $\theta$. Identifier l'équation du mouvement qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre information contient-elle ?

2 En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ et en intégrant sur $t$, montrer que

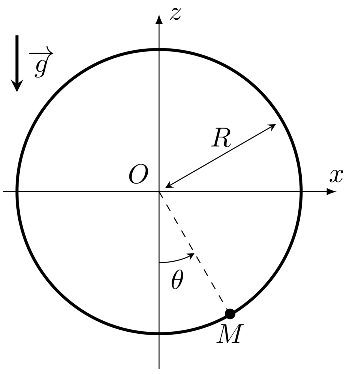
$$\dot{\theta}^2(t) = \frac{2g}{R}(1 - \cos(\theta(t)))$$

3 En déduire la norme de la force de réaction de l'igloo.

4 Le pingouin décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle ?

## II Oscillations d'un anneau sur un cerceau

Un cerceau de centre O et de rayon $R$ est maintenu dans un plan vertical, et un anneau de masse $m$ assimilé à un point matériel M peut glisser sans frottements le long de ce cerceau.




1 Qu'est-ce que l'hypothèse « sans frottements » implique pour la réaction du cerceau sur l'anneau ?

2 Écrire le PFD appliqué à l'anneau et le projeter dans une base adaptée.

3 En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement.

On se place dans l'approximation des petits angles ($|\theta| < \theta_0 = 20°$). Initialement, l'anneau est situé à la verticale en-dessous de O et il est lancé vers la droite, avec une vitesse initiale de norme $v_0$.

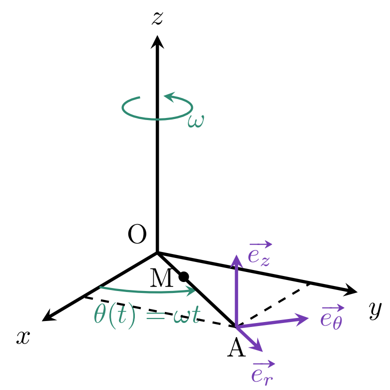
4 En déduire l'équation horaire du mouvement.

5 À quelle condition sur $v_0$ l'approximation des petits angles est-elle vérifiée ?

## ★★ III Anneau sur une tige en rotation

On considère un petit anneau M de masse $m$ considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottement le long d'une tige OA horizontale dans le plan $(x\mathrm{O}y)$, de longueur $\ell$, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire $\omega$ constante autour d'un axe fixe vertical $\Delta$ passant par son extrémité O. Le référentiel lié au laboratoire est considéré comme galiléen. On considère la base cylindrique locale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ associée au point M.

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige, à une distance $r_0$ du point O (avec $r_0 < \ell$). On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance $r(t) = \mathrm{OM}(t)$ entre le point O et l'anneau M.




1. Faire un bilan des forces agissant sur l'anneau en les projetant dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

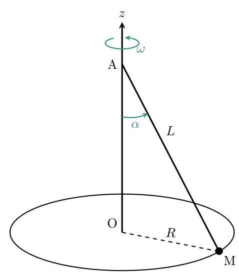
2. Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment, et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de $r_0$, $\omega$ et $t$.

3. Exprimer les composantes de la réaction $\overrightarrow{R}$ de la tige sur M dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ en fonction de $m$, $g$, $\dot{r}$ et $\omega$.

4. Déduire de la question 2 le temps $\tau$ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera $\tau$ en fonction de $r_0$, $\ell$ et $\omega$.

## ★☆ IV Pendule conique

Dans un champ uniforme de pesanteur $\overrightarrow{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse $m$ tourne à la vitesse angulaire $\omega$ constante autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ dirigé vers le haut en décrivant un cercle de centre O et de rayon $R$. M est suspendu à un fil inextensible de longueur $L$ et de masse négligeable, fixé en un point A de $(\mathrm{O}z)$. L'angle $\alpha$ de $(\mathrm{O}z)$ avec AM est constant.




1. Quel système de coordonnées utiliser ?

2. Effectuer un bilan des forces s'appliquant à la masse et les écrire dans la base choisie, en fonction de $L$, $\omega$ et $\alpha$.

3. Appliquer le PFD puis exprimer $\cos(\alpha)$ en fonction de $g$, $L$ et $\omega$. En déduire que la vitesse angulaire doit forcément être supérieure à une vitesse angulaire limite $\omega_{\mathrm{lim}}$ pour qu'un tel mouvement puisse être possible.

4. Que dire du cas où $\omega$ devient très grande ? Application numérique : calculer $\alpha$ pour $L = 20\,\mathrm{cm}$ et $\omega = 3\,\mathrm{tours{\cdot}s^{-1}}$.