Mécanique – chapitre 4

Approche énergétique du mouvement

Sommaire

Capacités exigibles

- ◯ Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique.
- ◯ Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle.
- ◯ Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.
- ◯ Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
- ◯ Établir l'équation du mouvement au voisinage d'un équilibre.
- ◯ Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle :
  - ▷ le sens et l'intensité de la force associée ;
  - ▷ le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
  - ▷ l'existence de positions d'équilibre et analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Démonstrations

Implications

Théorèmes

Preuves

Applications

Outils

Points importants

I Force et énergie cinétique

I/A Puissance d'une force et théorème de la puissance cinétique

L'énergie est un concept physique très puissant et présent dans tous les domaines de la physique mais qu'il est difficile de définir simplement. En voici une première définition qualitative :

Définition M4.1 : Énergie

L'énergie d'un système est une grandeur **scalaire** caractérisant sa capacité à agir sur lui-même ou d'autres systèmes.

Unité

Ainsi, le mouvement d'un corps, les échanges de chaleur, les courants électriques et tous les phénomènes physiques résultent d'échanges d'énergie.

Important M4.1 : Conservation de l'énergie

L'énergie est une grandeur conservative. Elle ne peut être créée ou détruite. Elle ne peut que changer de forme et/ou passer d'un système à un autre.

Une énergie totale peut varier différemment selon les conditions du système, et notamment varier plus ou moins vite. On définit pour ça la puissance d'un système :

Rappel M4.1 : Puissance en terme d'énergie

La **puissance** $\mathcal{P}$ d'un système traduit la **variation temporelle** de son énergie $\mathcal{E}$, et on a

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}}$$

L'unité d'une puissance est donc homogène à des $\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$, et se compte couramment en **Watts** (W), avec :

Pratique pour retrouver son unité, cette expression est cependant peu utilisée ; en effet, lors de l'étude mécanique d'un corps, on connaît moins facilement son énergie que sa vitesse ou les forces qui s'y appliquent.

♥ Définition M4.2 : Énergie cinétique

Pour M de masse m de vitesse $v_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)$:

À quelle condition une force appliquée à un objet fait-elle varier son énergie cinétique ?

◇ Quand un objet est jeté vers le haut, le poids le ralentit, donc fait diminuer son énergie cinétique.

◇ Quand un objet tombe, le poids l'accélère et fait donc augmenter son énergie cinétique.

◇ Lorsqu'un objet est posé sur un support, la réaction normale ne fait pas varier son énergie cinétique.

♥ Définition M4.3 : Puissance d'une force

Pour $\vec{F}$ appliquée à M de vitesse $\vec{v}$:

Implication M4.1 : Autour de la puissance

◇

◇

Figure M4.1

♥ Outils M4.1 : Calculer une puissance

◇ On décompose : et

On a alors

◇ ou directement : avec α l'angle entre les vecteurs.

Application M4.1 : Puissance du poids en pente

Exprimer la puissance du poids lors d'une descente à vélo d'une pente d'angle α. Est-il moteur ou résistant ?

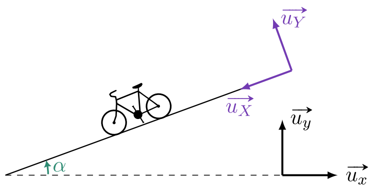


Figure M4.2 – Schéma

Dans $(\overrightarrow{u_X}, \overrightarrow{u_Y})$

et

Ainsi

Donc soit

Preuve M4.1 : Théorème de la puissance cinétique

On peut alors relier l'effet d'une force à la variation d'énergie cinétique, de deux manières :

Bilan de puissance

Définition de $\mathcal{E}_c$

♥ Théorème M4.1 : de la puissance cinétique

Les **puissances** des forces se somment pour **modifier la dérivée de l'énergie cinétique** d'un point M :

♥ Application M4.2 : Pendule simple par TPC

Établir l'équation différentielle du pendule.

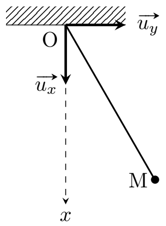


Figure M4.3 – Pendule

Implication M4.2 : Conséquence des frottements

Les frottements **fluides** conduisent à une baisse de l'énergie cinétique :

$\Rightarrow$ $\Rightarrow$

Mais les **frottements solides peuvent être moteurs** : ils permettent à un pneu d'avancer.

Outils M4.2 : Quand appliquer le TPC ?

◇ Si le mouvement est **selon une seule coordonnée** (x, y ou z en cartésiennes, θ en coordonnées cylindriques), il sera pertinent d'utiliser le TPC.

◇ Sinon (chute libre avec angle par exemple), on revient au PFD qui contient toute l'information.

I/B Travail d'une force et théorème de l'énergie cinétique

Sur un temps dt, l'**effet total d'une force** se traduit par une **variation d'énergie totale** :

Définition M4.4 : Travail d'une force

Travail élémentaire

Le travail élémentaire δW d'une force $\vec{F}$ sur un point M lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est :

$\Leftrightarrow$

Travail total

Le travail W_{AB} d'une force $\vec{F}$ sur un chemin $\mathcal{C}$ allant du point A au point B est

C'est l'énergie fournie par la force $\vec{F}$ à M le long de la trajectoire

Unité

Important M4.2 : Travail et chemin

De façon générale, le travail dépend du chemin suivi.

Attention M4.1 : Notations δ vs. d

$\delta \Rightarrow$ grandeur totale dépend *a priori* du chemin et de la vitesse. d $\Rightarrow$ grandeur dépend uniquement du point de départ et du point d'arrivée ; or W est défini sur une **distance**, pas ~~**en un point**~~ :

On peut faire et

mais pas ou

Figure M4.4

Implication M4.3 : Travail d'une force constante sur un segment

Si $\vec{F}$ constante, sur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ segment :

Application M4.3 : Travail des frottements fluides

On considère une voiture allant d'un point A à un point B, éloignés de 100 km, avec une vitesse constante. La force de frottement exercée par l'air est

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S c_x v \vec{v}$$

Déterminer son travail, et faire l'application numérique pour $v = 50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ puis $80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. On donne $S = 3{,}07\,\mathrm{m^2}$, $c_x = 0{,}33$, $\rho = 1{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Convertir en litres d'essence consommée, sachant que $1\,\mathrm{L} = 3{,}15 \times 10^7\,\mathrm{J}$.

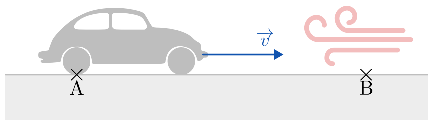


Figure M4.5 – Schéma

Application M4.4 : Travail des frottements solides

Soit un objet de $\vec{v}(0) = v_0\overrightarrow{u_x}$, soumis à une force de frottements solides sur un support horizontal.

Il subit la force sur la distance de freinage

1 Calculer le travail de la force de frottements sur cette distance. Est-il moteur ou résistant ?

2 Que vaut $\mathcal{E}_{c,0}$ l'énergie cinétique initiale ? $\mathcal{E}_{c,\infty}$ sont énergie cinétique finale ? Que peut-on en conclure ?

1

2

Preuve M4.2 : Théorème de l'énergie cinétique

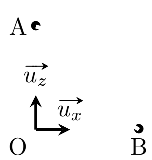
Si la **puissance** donne la **dérivée de l'énergie** cinétique, alors son **intégrale**, en donne la **variation totale** :

■

Théorème M4.2 : de l'énergie cinétique

Les **travaux** des forces se somment pour **modifier l'énergie cinétique** d'un point M :

Application M4.5 : TEC appliqué au ski



Déterminer la vitesse d'une skieuse en bas d'une piste de $h = 5\,\mathrm{m}$ de dénivelé partant avec une vitesse nulle, si on néglige les frottements.

◇ **Variation de** $\mathcal{E}_c$:

◇ **Travail de** $\vec{N}$:

◇ **Travail de** $\vec{P}$:

◇ **TEC** :

Outils M4.3 : TEC ou PFD ?

◇ Si l'on veut connaître seulement une vitesse/une distance à la fin d'un processus (chute, descente, freinage, etc.), les méthodes énergétiques sont souvent plus simples et plus rapides.

◇ Si on cherche les équations horaires/un temps/une trajectoire, il faut appliquer le PFD.

II Énergie mécanique

II/A Énergie potentielle

Définition M4.5 : Forces conservatives ou non

Une force est dite **conservative** si son **travail** de A à B ne **dépend pas du chemin** suivi ou de la vitesse, mais uniquement des positions A et B. Elle est <u>non-conservative</u> dans le <u>cas contraire</u>.

Propriété M4.1 : Travail du poids et de Hooke

◇ Le **poids est une force conservative**, et pour $\overrightarrow{u_z}$ un axe vertical, on a

$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ avec $\{$

◇ La **force de rappel d'un ressort est conservative**, et pour $\overrightarrow{u_x}$ dans le sens ressort–masse :

$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

Démonstration M4.1 : Travail du poids et de Hooke

Poids

On a et

D'où $\Rightarrow$ ■

Figure M4.6

Hooke

On a et

D'où $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$ ■

Dans le cas d'une **force conservative**, on remarque qu'on peut donc légitimement écrire $\delta \mathcal{W}$ avec une forme différentielle d plutôt qu'avec δ, définissant l'**énergie potentielle** liée à une force :

Définition M4.6 : Travail d'une force conservative et énergie potentielle

À une **force conservative** $\vec{F}_{\text{cons}}$ s'associe une **énergie potentielle** $\mathcal{E}_p(\mathrm{M})$ telle que :

Attention M4.2 : Énergie potentielle

◇ Une énergie potentielle est **définie à une constante** près, donc **peut être négative**.

◇ Une énergie potentielle est une **fonction de l'espace** (et du temps mais c'est secondaire) : $\mathcal{E}_p(\mathrm{M})$.

Propriété M4.2 : Énergie potentielle de pesanteur et élastique

◇ Le **poids est une force conservative**, donc dérive d'une **énergie potentielle** :

◇ La **force de rappel** d'un ressort est une **force conservative**, donc dérive d'une **énergie potentielle** :

Démonstration M4.2 : Énergie potentielle de pesanteur et élastique

◇ Avec Dm.M4.1, pour $\mathcal{E}_{p,p}$: ■

◇ et pour $\mathcal{E}_{p,\text{el}}$: ■

On identifie ou on intègre ainsi les expressions de $\mathcal{E}_{p,p}$ et $\mathcal{E}_{p,\text{el}}$ (attention à la constante).

II/B Différentielle et gradient

Définition M4.7 : Dérivée partielle, différentielle et gradient

Dérivée partielle

Soit f une fonction scalaire à plusieurs variables, x, y et z. On définit sa **dérivée partielle** par rapport à x comme **sa dérivée selon cette variable**, les autres variables considérées comme constantes :

où « ∂ » se lit « d-rond ».

Elles décrivent l'évolution partielle de la fonction f lorsque l'on fait varier un seul paramètre.

Différentielle totale

À elles toutes, elles permettent de construire la **variation infinitésimale totale** de la fonction, selon **toutes ses dépendances** ; il suffit de **sommer les variations individuelles** :

C'est **l'extension de la dérivée à une variable**, $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$. Cela revient à **localement linéariser** la fonction pour en donner le **taux de variation dans une direction**.

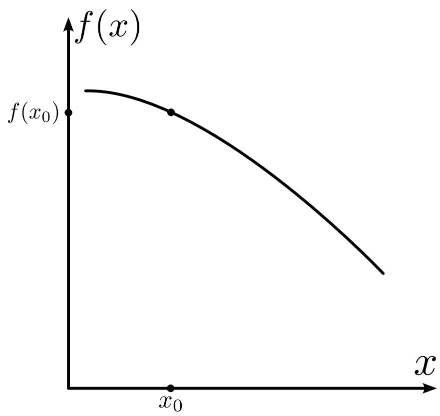


Figure M4.7 – Dérivée usuelle.

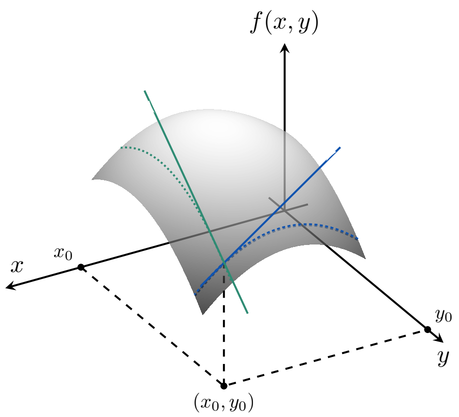


Figure M4.8 – Dérivée partielle.

Gradient

Sous cette forme, la différentielle ressemble fortement à un **produit scalaire** entre le **vecteur des dérivées partielles** et le **déplacement élémentaire**. On peut formaliser cela avec l'opérateur gradient, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ ou parfois $\vec{\nabla}$, appliqué à la fonction **scalaire** $f(x,y,z)$, tel que :

soit en cartésiennes :

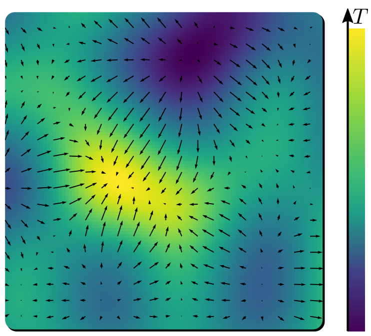


Figure M4.9 – Gradient de T

Sur cet exemple, le champ scalaire de température $T(x,y)$ est en couleur, et le **gradient est représenté par les flèches noires**. On remarque que :

- **Sa direction** indique comment **suivre l'augmentation** de T autour d'un point ;
- **Sa norme** indique la **pente** de T dans cette direction.

On peut en quelques sortes voir le gradient comme une **généralisation vectorielle de la dérivée** à plusieurs variables :

Attention M4.3 : Gradient et coordonnées

L'opérateur gradient dépend des coordonnées, puisque $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dépend du repère. Notamment :

En cylindriques :

En sphériques :

Les formules de gradient ne sont pas à connaître, et seront extensivement revues et justifiées en deuxième année.

Application M4.6 : Calcul de dérivées partielles

Soit $f(x,y,z) = xy^2$. Déterminer ses dérivées partielles.

Propriété M4.3 : Force conservative et énergie potentielle

Une **force conservative** $\vec{F}_{\text{cons}}$ dérive donc d'une **énergie potentielle** $\mathcal{E}_p$ selon la relation :

avec $\mathcal{E}_p(\mathrm{M})$ définie à une constante près.

Démonstration M4.3 : Force conservative et énergie potentielle

Outils M4.4 : Déterminer une énergie potentielle

On a donc deux méthodes équivalentes pour déterminer l'énergie potentielle associée à une force conservative.

Utilisation du travail

- On utilise les Df.M4.6 et M4.4 :
  $\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -\delta\mathcal{W}(\vec{F}) = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$;
- On travaille l'expression pour se ramener à une différentielle totale ;
- On **identifie avec le signe** $-$ pour obtenir $\mathcal{E}_p$.

Utilisation du gradient

- On utilise la Pt.M4.3 : $\vec{F}_{\text{cons}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathcal{E}_p)$;
- On exprime les dérivées partielles de $\mathcal{E}_p$ en fonction des composantes de $\vec{F}_{\text{cons}}$;
- On intègre chaque dérivée partielle pour obtenir $\mathcal{E}_p$.

Application M4.7 : $\mathcal{E}_{p,p}$ et $\mathcal{E}_{p,\text{el}}$ par le gradient

$\mathcal{E}_{p,p}$ avec z descendant

$\mathcal{E}_{p,\text{el}}$ avec $\vec{u_x}$ ressort–masse

II/C Énergie mécanique et théorèmes associés

Définition M4.8 : Énergie mécanique

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ d'un point matériel en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ est la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives s'appliquant sur ce point :

Les énergies potentielles étant définies à une constante près, l'énergie mécanique l'est également.

Preuve M4.3 : Théorème de l'énergie mécanique

On sépare les forces conservatives $\vec{F}_{\text{cons}}$ et non-conservatives $\vec{F}_{\text{NC}}$ dans le TEC :

■

Théorème M4.3 : de l'énergie mécanique

Les **travaux des forces non-conservatives** se somment pour **modifier l'énergie mécanique** d'un point M :

Application M4.8 : TEM appliqué au ski

Retrouver la vitesse d'une skieuse au bas d'une pente de hauteur h. On ignore les frottements.

◇ **Variation de $\mathcal{E}_m$** : avec $\vec{P}$ force conservative prise comme énergie potentielle :

▷ **En A** :

▷ **En B** :

◇ **Travail de $\vec{N}$** :

◇ **TEM** :

Outils M4.5 : Système conservatif et TEM

Ainsi, pour traiter un problème où l'énergie mécanique se conserve ($\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$ ou $\Delta_{\text{AB}}\mathcal{E}_m = 0$) :

1) Calculer l'énergie mécanique initiale puis à un instant quelconque en fonction de sa vitesse et/ou de sa position ;

2) Comme l'énergie mécanique se conserve, $\sum_i \mathcal{W}_{\text{AB}}(\vec{F}_{\text{NC},i}) = 0$, et on conclut donc en utilisant $\mathcal{E}_m(\text{A}) = \mathcal{E}_m(\text{B})$.

Théorème M4.4 : de la puissance mécanique

Les **puissances des forces non-conservatives** se somment pour **modifier la dérivée de $\mathcal{E}_m$** :

Preuve M4.4 : Théorème de la puissance mécanique

Différentes démonstrations sont ici aussi possibles ; par exemple avec un bilan de puissance :

■

Application M4.9 : Pendule simple par TPM

Établir l'équation différentielle du pendule simple par le TPM.

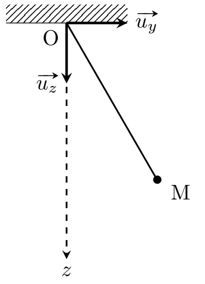


FIGURE M4.10

III Utilisation de l'énergie potentielle

III/A Énergie potentielle et équilibres

III/A) 1 Notion d'équilibre

Définition M4.9 : Hypothèses étude équilibre

- ◇ On suppose le système **conservatif**, avec $\mathcal{E}_p$ l'énergie potentielle totale et $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{\text{cons},i}$ la somme des forces ;
- ◇ On considère un mouvement à **1 degré de liberté**, noté x (x peut être une longueur mais aussi un angle).

Définition M4.10 : Point à l'équilibre

L'équilibre veut dire immobile, donc $\vec{a}_{\text{eq}} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$

Démonstration M4.4 : Équilibre et énergie potentielle

Or, $\vec{F}$ conservative donc

D'où

Propriété M4.4 : Équilibre et énergie potentielle

Les points d'équilibres d'un système correspondent aux extrema de l'énergie potentielle :

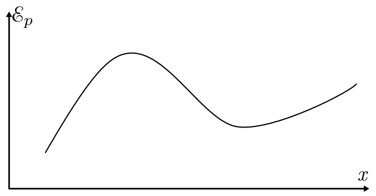


FIGURE M4.11

III/A) 2 Équilibres stables et instables

Définition M4.11 : Équilibres stables et instables

Soit un point matériel sur une position d'équilibre. En l'écartant un peu de cette position :

- ◇ s'il **revient** vers sa position d'équilibre, on dit que l'équilibre est **stable** ;
- ◇ s'il s'**écarte** définitivement de cette position, on dit qu'il est **instable**.

♥ Propriété M4.5 : Stabilité des positions d'équilibre

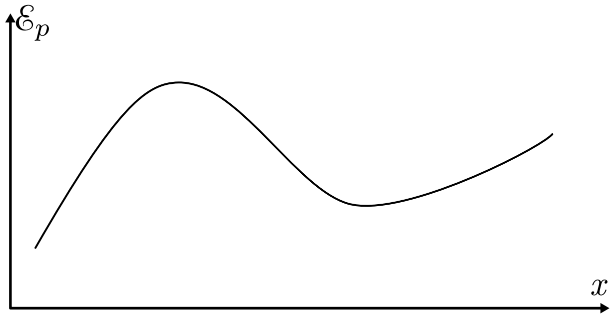


Figure M4.12

◇ x_{eq} stable $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathscr{E}_p(x_{\text{eq}}) \text{ minimale}}$

$\Leftrightarrow$

◇ x_{eq} instable $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathscr{E}_p(x_{\text{eq}}) \text{ maximale}}$

$\Leftrightarrow$

♥ Outils M4.6 : Formule de Taylor-Young

La **tangente** en un point permet de passer d'une coordonnée x_0 à la coordonnée x un peu plus loin en suivant la **fonction affine** de pente égale à la tangente. Ce résultat se **généralise** avec **toutes les dérivées** d'une fonction f :

$\forall f \in \mathcal{C}^n$

Démonstration M4.5 : Stabilité des positions d'équilibre

Pour étudier ces situations mathématiquement, on peut développer l'expression de la somme $\vec{F}$ au voisinage d'un point d'équilibre x_{eq} quelconque :

Et on s'intéresse au signe de F autour de x_{eq}.

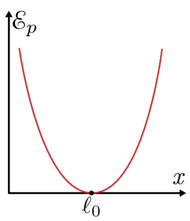
En analysant la Figure M4.12 :

◇

◇

Application M4.10 : Équilibre d'un ressort

Trouver la position d'équilibre d'un ressort. Est-elle stable ou instable ?



III/A) 3 Étude générale au voisinage d'un point d'équilibre stable

♥ Propriété M4.6 : Mouvement autour d'un équilibre stable

Tout système conservatif au voisinage d'un point d'équilibre stable est un oscillateur harmonique.

Démonstration M4.6 : Mouvement autour d'un équilibre stable

On effectue un développement limité de l'énergie potentielle autour d'une position d'équilibre stable :

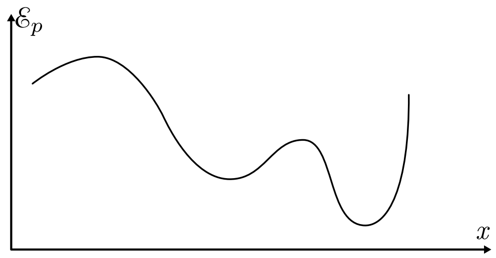


Figure M4.13

Ce qui est phénoménal, c'est que **la seule supposition est que le système soit conservatif**. Ceci explique l'abondance des systèmes harmoniques dans la nature.

On retrouve **l'équation de l'oscillateur harmonique** ! Le mobile oscille autour de la position d'équilibre à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ avec $k = \left.\dfrac{\partial^2 \mathscr{E}_p}{\partial x^2}\right|_{x_{\text{eq}}}$.

Remarque M4.1 : Étude mouvement équilibre instable

Si instable : $$k = \left.\frac{\partial^2 \mathscr{E}_p}{\partial x^2}\right|_{x_{\text{eq}}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) - \frac{k}{m}(x - x_{\text{eq}}) = 0$$

de solution $$x(t) - x_{\text{eq}} = A\mathrm{e}^{\omega_0 t} + B^{-\omega_0 t} \Leftrightarrow \boxed{x - x_{\text{eq}} = x_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

donc proche d'un point d'équilibre instable, le mobile **s'écarte exponentiellement** de cette position.

III/B Énergie potentielle et trajectoire

Démonstration M4.7 : Trajectoire et énergie potentielle

Pour un point matériel soumis seulement à des forces conservatives (ou ne travaillant pas), il est possible de prévoir les zones accessibles au mobile ainsi que l'aspect de la trajectoire en étudiant l'énergie potentielle :

Propriété M4.7 : Trajectoire et énergie potentielle

◇

◇

◇

État lié

Le système reste en zone bornée, vers l'équilibre.

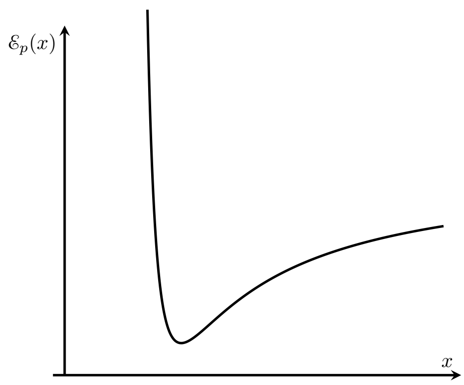


Figure M4.14 – État lié

État de diffusion

Le système peut s'éloigner indéfiniment de l'équilibre.

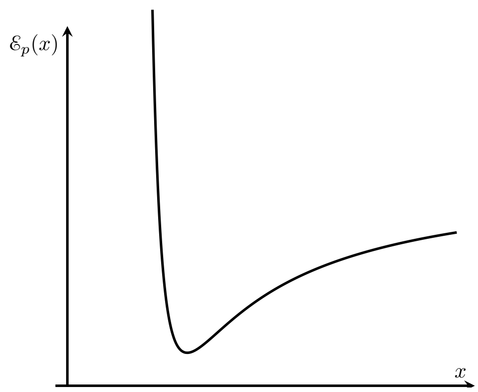


Figure M4.15 – État de diffusion