Correction du TD d'application

I Projection de vecteurs

Outils M3.1 : Projection de vecteurs

On peut projeter avec **trois méthodes** :

- **Produit scalaire** : on trouve individuellement les composantes du vecteur en calculant son produit scalaire avec chacun des vecteurs de la base donnée :

$$\vec{V} = \left(\vec{V}\cdot\vec{u_x}\right)\vec{u_x} + \left(\vec{V}\cdot\vec{u_y}\right)\vec{u_y} \quad \text{avec} \quad \vec{V}\cdot\vec{u_x} = V\cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{u_x}}\right) \quad \text{et} \quad \vec{V}\cdot\vec{u_y} = V\cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{u_y}}\right)$$

  Il s'agit alors de **trouver les angles** sur le schéma, et de **remplacer les** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin(\alpha)$ etc, en faisant attention aux signes ($\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin(\alpha)$ par exemple).

- **Trigonométrie** : on peut aussi se baser sur le fait que les projections sont les **côtés adjacents et opposés d'un triangle rectangle**, et utiliser les fonctions trigonométriques pour écrire les composantes en fonction de la norme du vecteur et de l'angle. On trouve le signe en **regardant l'orientation de la projection**.

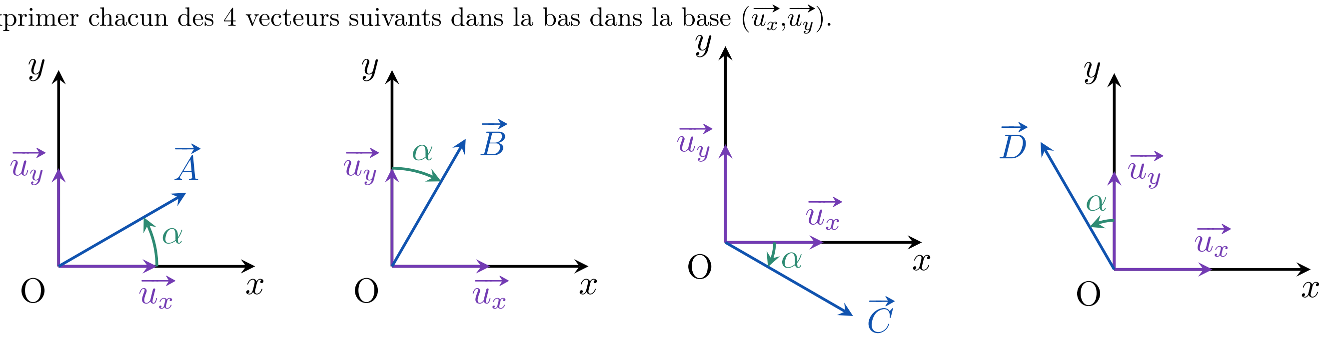
- **Vraisemblance** : pour vérifier son résultat, il est de bonne pratique de vérifier que le résultat est cohérent dans des cas limites, souvent $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, quand le vecteur cherché $\vec{V}$ est entièrement colinéaire à un vecteur de base. On peut en fait également utiliser cette méthode pour trouver les décompositions en sin et cos avec le bon signe directement. On procède ainsi :

  - **Imaginer** $\alpha = 0$: le vecteur cherché est **colinéaire** soit à $\vec{u_x}$, soit à $\vec{u_y}$: étant donné que la décomposition donne toujours $\pm\cos(\alpha)$ et $\pm\sin(\alpha)$, pour $\alpha = 0$ il **ne reste que le cosinus** : c'est donc **ce vecteur qui porte le cosinus**.

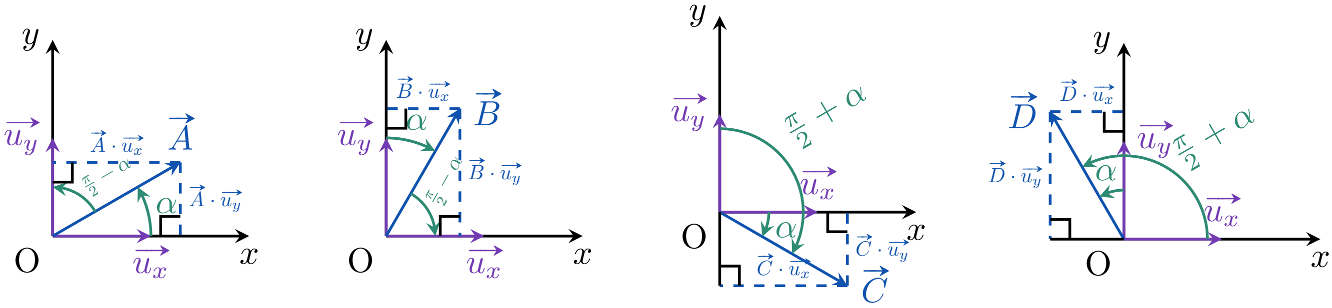
    De plus, on **trouve le signe en regardant l'orientation relative** du vecteur cherché par rapport au vecteur de base : même sens $\Rightarrow$ signe $+$, sens opposé $\Rightarrow$ signe $-$.

  - **Imaginer** $\alpha = \frac{\pi}{2}$: par élimination, il **ne reste que le sinus pour l'autre**. On trouve le signe de la même manière.

1 Exprimer chacun des 4 vecteurs suivants dans la bas dans la base $(\vec{u_x},\vec{u_y})$.



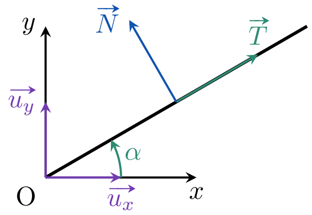
Réponse



On trouve : $\vec{A} = A\left(\cos(\alpha)\,\vec{u_x} + \sin(\alpha)\,\vec{u_y}\right)$; $\vec{B} = B\left(\sin(\alpha)\,\vec{u_x} + \cos(\alpha)\,\vec{u_y}\right)$

et $\vec{C} = C\left(\cos(\alpha)\,\vec{u_x} - \sin(\alpha)\,\vec{u_y}\right)$; $\vec{D} = D\left(-\sin(\alpha)\,\vec{u_x} + \cos(\alpha)\,\vec{u_y}\right)$

2 Exprimer $\vec{N}$ et $\vec{T}$ dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$ en fonction de N, T et α.



Réponse

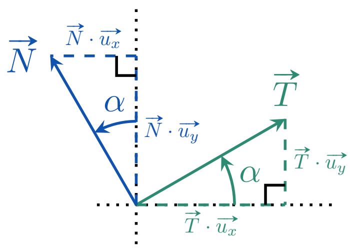


Figure M3.1 – Zoom sur les projections de $\vec{N}$ et $\vec{T}$.

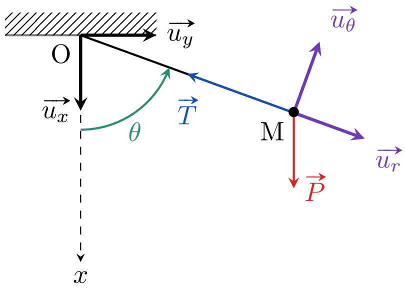
On peut se reposer sur les résultats trouvés à la première question : $\vec{T}$ est équivalent au vecteur $\vec{A}$ de la première question, et $\vec{N}$ au vecteur $\vec{D}$. On trouve alors :

$$\vec{T} = T(\cos(\alpha)\,\vec{u_x} + \sin(\alpha)\,\vec{u_y})$$

et

$$\vec{N} = N(-\sin(\alpha)\,\vec{u_x} + \cos(\alpha)\,\vec{u_y})$$

3 Exprimer $\vec{P}$ et $\vec{T}$ en fonction de m, g, T et θ dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ d'abord, puis dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$.



Réponse

Toujours même réflexion. Par exemple, par vraisemblance :

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}\cdot\vec{u_r} = 1 \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{P}\cdot\vec{u_\theta} = -1$$

Ainsi

$$\boxed{\vec{P} = mg\cos(\theta)\,\vec{u_r} - mg\sin(\theta)\,\vec{u_\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{T} \triangleq -T\,\vec{u_r}}$$

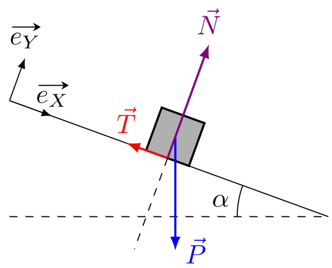
On trouve également dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$:

$$\boxed{\vec{P} = mg\vec{u_x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{T} = T\left(-\cos(\theta)\,\vec{u_x} - \sin(\theta)\,\vec{u_y}\right)}$$

4 **Équilibre plan incliné** À l'équilibre des forces, on a

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$$

Projeter le poids dans la base inclinée et exprimer les normes de $\vec{T}$ et $\vec{N}$ en fonction de m, g et α.



Réponse

Ici aussi : $\alpha = 0 \Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{e_Y} = -1$ et $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{e_X} = 1$

Ainsi $\boxed{\vec{P} = mg(\sin(\alpha)\,\vec{e_X} - \cos(\alpha)\,\vec{e_Y})}$ et $\boxed{\vec{N} = N\,\vec{e_Y}}$ et $\boxed{\vec{T} = -T\vec{e_X}}$

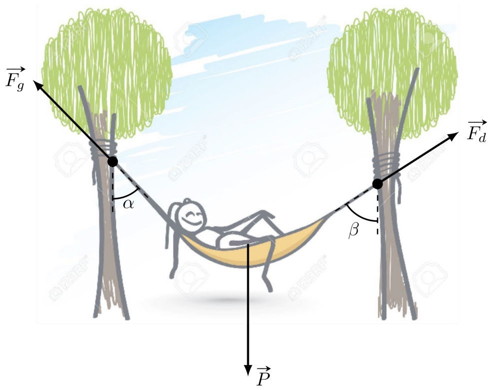
D'où
$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} mg\sin(\alpha) - T \\ -mg\cos(\alpha) + N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} T = mg\sin(\alpha) \\ N = mg\cos(\alpha) \end{cases}}$$

◇

5 **Équilibre hamac** À l'équilibre des forces, on a

$$\vec{F}_g + \vec{F}_d + \vec{P} = \vec{0}$$

Projeter les vecteurs $\vec{F}_g$ et $\vec{F}_d$ dans la base $(\vec{u_x},\vec{u_y})$ avec $\vec{u_x}$ parallèle au sol vers la droite et $\vec{u_y}$ vertical ascendant. En déduire la norme littérale de ces deux vecteurs. On prend $m = 60\,\mathrm{kg}$, $\alpha = 45°$ et $\beta = 60°$. Faire l'application numérique.



Réponse

On projette : $\vec{F}_g = F_g(\cos(\alpha)\,\vec{u_y} - \sin(\alpha)\,\vec{u_x})$ et $\vec{F}_d = F_d(\cos(\beta)\,\vec{u_y} + \sin(\beta)\,\vec{u_x})$

Soit
$$\begin{cases} 0 = F_d\sin(\beta) - F_g\sin(\alpha) \\ 0 = -mg + F_g\cos(\alpha) + F_d\cos(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_d = F_g\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \\ mg = F_g\cos(\alpha) + F_g\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}\cos(\beta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_d = F_g\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \\ mg\sin(\beta) = F_g\underbrace{(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta))}_{=\sin(\alpha+\beta)} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} F_d = \dfrac{mg\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \\ F_g = \dfrac{mg\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \end{cases}}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{\begin{cases} F_d = 4{,}4\times10^2\,\mathrm{N} \\ F_g = 5{,}4\times10^2\,\mathrm{N} \end{cases}}$$

◇

★☆☆ II Mouvement hélicoïdal

Un point matériel M a pour équations horaires en coordonnées cylindriques :

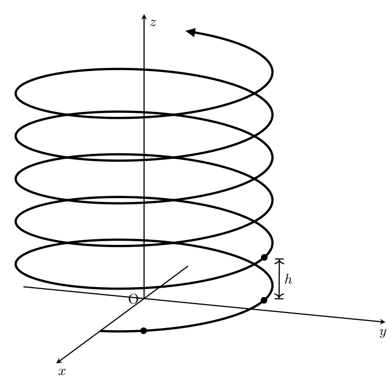
$$\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega_0 t \\ z(t) = \alpha t \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\alpha,\omega_0) \quad \text{des constantes}$$

1 Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base cylindrique.

Réponse

On a

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= R\overrightarrow{u_r} + \alpha t\overrightarrow{u_z}\\
\vec{v}(t) &= \underbrace{\cancel{\dot{R}\overrightarrow{u_r}}}_{=0} + R\underbrace{\dot{\theta}}_{=\omega}\overrightarrow{u_\theta} + \alpha\overrightarrow{u_z} + \alpha t\underbrace{\cancel{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_z}}{\mathrm{d}t}}}_{=0}\\
&= R\omega\overrightarrow{u_\theta} + \alpha\overrightarrow{u_z}\\
\vec{a}(t) &= R\underbrace{\cancel{\dot{\omega}}}_{=0}\overrightarrow{u_\theta} - R\omega^2\overrightarrow{u_r} + \vec{0}\\
&= -R\omega^2\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}
$$



◇

2 Dessiner l'allure de la trajectoire.

Réponse

Cf. ci-dessus.

◇

3 Déterminer h le pas de l'hélice, c'est-à-dire la distance selon l'axe $(\mathrm{O}z)$ dont sont séparés deux points successifs de la trajectoire correspondant à un même angle θ (modulo 2π).

Réponse

Soit t_0 un instant quelconque. Un point à ce temps-là est tel que

$$
\begin{cases}
r(t_0) = R\\
\theta(t_0) = \omega_0 t_0\\
z(t_0) = \alpha t_0
\end{cases}
$$

Le premier point qui est au même angle θ mais avec 2π de plus se trouve donc à t_1 tel que

$$
\begin{aligned}
&\theta(t_1) = \theta(t_0) + 2\pi\\
\Leftrightarrow\ &\omega_0 t_1 = \omega_0 t_0 + 2\pi\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}}
\end{aligned}
$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
&z(t_1) - z(t_0) = h = \alpha t_1 - \alpha t_0\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{h = 2\pi\frac{\alpha}{\omega_0}}
\end{aligned}
$$

◇

4 Ce mouvement est-il uniforme ? À quelle condition est-il circulaire ?

Réponse

$\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2{\omega_0}^2 + \alpha^2} = \text{cte}$, donc il est uniforme. Il est circulaire ssi $\boxed{\alpha = 0}$.

◇

5 Déterminer les coordonnées cartésiennes de ce mouvement.

Réponse

En regardant dans le plan polaire, on trouve $x(t)$ et $y(t)$:

$$
\boxed{\begin{cases}
x(t) = R\cos(\omega_0 t)\\
y(t) = R\sin(\omega_0 t)\\
z(t) = \alpha t
\end{cases}}
$$

◇

III Masse du Soleil

La Terre subit de la part du Soleil la force d'attraction gravitationnelle :

$$
\overrightarrow{F}_g = -\mathcal{G}\frac{M_T M_S}{R^2}\overrightarrow{u_r} \quad \text{où} \quad \mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI}
$$

avec $\overrightarrow{u_r}$ le vecteur unitaire allant du Soleil vers la Terre. La Terre tourne autour du Soleil en décrivant un cercle de rayon $R = 149{,}6 \times 10^6$ km.

1 Déterminer la masse du Soleil.

Réponse

On étudie le système {Terre} dans le référentiel héliocentrique. La Terre étant sur une orbite circulaire, on utilise un repère polaire $(\mathrm{S},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ en appelant S le centre de gravité du Soleil et T le centre de gravité de la Terre. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}} = R\overrightarrow{u_r}$$
$$\vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$
$$\vec{a} = \underbrace{\cancel{R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}}_{\ddot{\theta}=0} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$$

étant donné que la distance Terre-Soleil est fixe, et que la vitesse angulaire de la Terre autour du Soleil est constante. On a d'ailleurs, en appelant $\omega_0 = \dot{\theta}(t)$ cette vitesse angulaire,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

avec T_0 la période de révolution de la Terre autour du Soleil, telle que $T_0 = 365{,}26 \times 24 \times 3600\mathrm{s} = 3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s}$. Ainsi, la seule force s'exerçant sur la Terre étant l'attraction gravitationnelle du Soleil, on a avec le PFD :

$$M_T\vec{a} = \vec{F}_g \Leftrightarrow -\cancel{M_T}R\omega_0^2 = -\mathcal{G}\frac{\cancel{M_T}M_S}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M_S = \frac{R^3\omega_0^2}{\mathcal{G}} = \frac{4\pi^2R^3}{\mathcal{G}{T_0}^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \\ \mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI} \\ T_0 = 3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_S = 1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}$$

◇

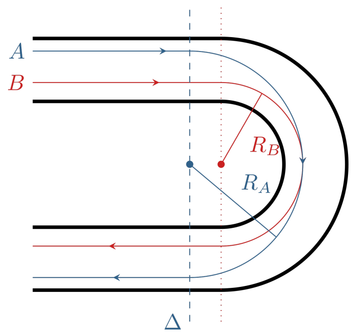
IV Course de F1

Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Fernando ALONSO (point A) et Jenson BUTTON (point B) arrivent en ligne droite et coupent l'axe Δ au même instant de leur parcours. Ils prennent cependant le virage de deux façons différentes :

◇ ALONSO suit une trajectoire circulaire de rayon $R_A = 90{,}0\,\mathrm{m}$;

◇ BUTTON choisit une trajectoire de rayon $R_B = 75{,}0\,\mathrm{m}$.

On cherche à déterminer quelle est la meilleure trajectoire, c'est-à-dire lequel des deux pilote gagne du temps par rapport à l'autre à la sortie du virage.



1 Déterminer les distances D_A et D_B parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Que peut-on conclure ?

Réponse

La voiture A d'ALONSO entame son virage dès qu'elle passe par l'axe Δ, et parcourt un demi-cercle de longueur

$$\boxed{D_A = \pi R_A = 283\,\mathrm{m}}$$

En revanche, la voiture B de BUTTON continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage, et parcourt de nouveau la même distance en ligne droite avant la sortie du virage. Ainsi,

$$\boxed{D_B = 2(R_1 - R_2) + \pi R_B = 266\,\mathrm{m}}$$

La voiture B parcourt moins de distance que la voiture A, mais **il est impossible d'en conclure quoi que ce soit** puisqu'on ne sait pas si les deux trajectoires sont parcourues à la même vitesse.

◇

2 Pour simplifier, on imagine que les deux voitures roulent à des vitesse v_A et v_B constantes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Déterminer ces vitesses, sachant que l'accélération des voitures doit rester inférieur à 0,8 g sous risque de dérapage. Les calculer numériquement.

Réponse

Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de leur trajectoire, parcourue à vitesse constante (en norme), l'accélération (en norme) des voitures vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = 0{,}8g$$

puisque les pilotes prennent tous les risques. Ainsi,

$$\boxed{v_A = \sqrt{aR_A} = 26{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_B = \sqrt{aR_B} = 24{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

3 Conclure quant à la meilleure trajectoire des deux.

Réponse

Calculons le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage :

$$\Delta t = \frac{D}{v} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta t_A = 10{,}6\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta t_B = 10{,}9\,\mathrm{s}}$$

Finalement, Alonso va plus vite que Button pour parcourir le virage : **la meilleure trajectoire est la plus courte des deux**, soit ici **celle la plus large**. Ne pas tenter de vérifier en rentrant chez vous, mais de quoi briller sur Mario Kart. . . ?

◇

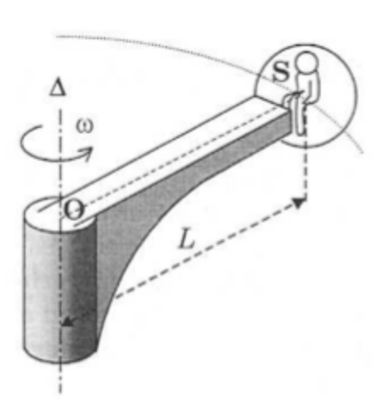
★☆☆ V Entraînement d'une spationaute

Une spationaute doit subir différents tests d'aptitude aux vols spatiaux, notamment le test des accélérations. Pour cela, on l'installe dans une capsule de centre O, fixée au bout d'un bras métallique horizontal dont l'autre extrémité est rigidement liée à un arbre de rotation vertical Δ. La longueur du bras est notée L. On assimilera la spationaute au point matériel S.

L'ensemble {capsule + bras + arbre} est mis en rotation avec une vitesse angulaire croissante, selon la loi

$$\omega(t) = \omega_0(1 - \exp^{-t/\tau})$$

avec ω_0 la vitesse angulaire nominale du simulateur, et τ un temps caractéristique. On donne $L = 10{,}0\,\mathrm{m}$ et $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



1 Établir proprement le système d'étude.

Réponse

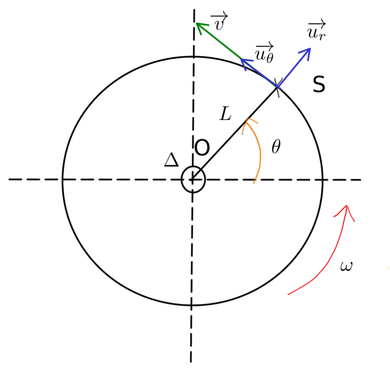
◇ **Système** : {spationaute}

◇ **Référentiel** : référentiel du laboratoire, supposé galiléen

◇ **Repère** : $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ selon le sens de rotation

◇ **Repérage** :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OS}}(t) &= L\overrightarrow{u_r}\\
\overrightarrow{v}_S(t) &= L\omega(t)\overrightarrow{u_\theta}\\
\overrightarrow{a}_S(t) &= L\dot{\omega}(t)\overrightarrow{u_\theta} - L\omega^2(t)\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$



◇

2 À partir de quelle durée peut-on supposer que le mouvement est circulaire et uniforme ? Que deviennent les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans ce cas ? Calculer alors la norme de l'accélération subie par la spationaute.

Réponse

Au bout de quelques τ, $\omega(t) = \omega_0$ et le mouvement sera circulaire uniforme. Les vecteurs vitesse et accélération deviennent :

$$\boxed{\begin{cases}\overrightarrow{v}_S(t) = L\omega_0\overrightarrow{u_\theta}\\ \overrightarrow{a}_S(t) = -L{\omega_0}^2\overrightarrow{u_r}\end{cases}}$$

La norme de l'accélération subie est alors $\boxed{\|\overrightarrow{a}_S\| = L{\omega_0}^2}$.

◇

3 Quelle doit être la valeur de ω_0 pour que l'accélération atteigne 10 g lors du régime de rotation uniforme ? On donnera le résultat en tours par second.

Réponse

$$a_S = 10g \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{10g}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ L = 10{,}0\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{M3.1}$$

$$\text{A.N. } : \boxed{\omega_0 = 3{,}13\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \approx 0{,}50\,\mathrm{tour{\cdot}s^{-1}}} \tag{M3.2}$$

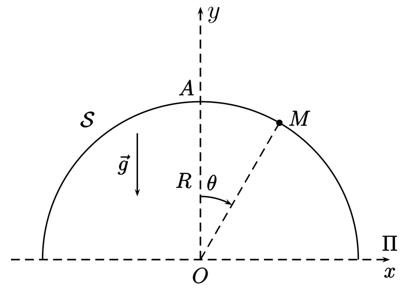
Ordre de grandeur M3.1 :

- Accélération dans un ascenseur : [0,9 ; 1,1] g ;
- Accélération latérale en F1 : [5 ; 6] g ;
- Accélération latérale en avion de chasse : [9 ; 12] g pendant quelques secondes max ;
- Accélération verticale, éjection d'un avion de chasse : ≈ 20 g (interdiction de vol après 2 utilisation du siège éjectable à cause – notamment – du tassement des vertèbres) ;
- Accélération négative frontale en accident de voiture : [40 ; 60] g ! Même sans choc physique, une telle décélération cause des hémorragies internes à cause des organes internes percutant les os. Soyez prudent-es.

Correction du TD d'entraînement

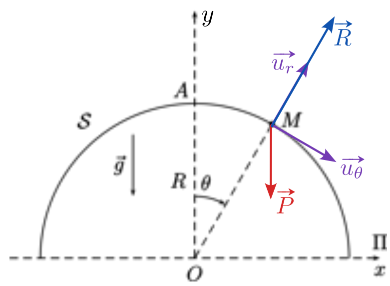
I Glissade d'un pingouin sur un igloo

Un pingouin, assimilable à un point matériel M de masse m décide de faire du toboggan. Il s'élance sans vitesse initiale du sommet A d'un igloo voisin, assimilable à une demi sphère S de rayon R et de centre O, posée sur un plan horizontal Π. On considère que le glissement s'effectue sans frottement dans le plan vertical $(x\text{O}y)$.



1 Appliquer le PFD au pingouin pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle θ. Identifier l'équation du mouvement qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre information contient-elle ?

Réponse



◇ **Système** : {pingouin}

◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen

◇ **Repère** : $(\text{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ **dans le sens de** θ

◇ **Repérage** :

$$\overrightarrow{\text{OM}}(t) = R\overrightarrow{u_r} \quad ; \quad \vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_\theta} \quad ; \quad \vec{a}(t) = R\ddot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2(t)\,\overrightarrow{u_r}$$

◇ **Origine et instant initial** : $\overrightarrow{\text{OM}}(0) = \overrightarrow{\text{OA}} \Rightarrow \theta(0) = 0$ et $\vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0$

◇ **BDF** :

Poids $\quad \vec{P} = mg(-\cos(\theta(t))\,\overrightarrow{u_r} + \sin(\theta(t))\,\overrightarrow{u_\theta})$

Réaction $\quad \vec{R} = R_N\overrightarrow{u_r}$

◇ **PFD** :

$$m\vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mR\dot{\theta}^2(t) \\ mR\ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg\cos(\theta(t)) + R_N \\ mg\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} R_N = mg\cos(\theta(t)) - mR\dot{\theta}^2(t) \\ \ddot{\theta}(t) = \dfrac{g}{R}\sin(\theta(t)) \end{cases}} \qquad \begin{matrix} \text{(M3.1)} \\ \text{(M3.2)} \end{matrix}$$

L'équation du mouvement est celle qui donne l'équation d'oscillateur harmonique aux petits angles, et qu'on a déjà utilisée en cours sur le pendule, et linéaire en θ : l'équation (M3.2). L'équation (M3.1) contient l'information sur le contact à l'igloo.

◇

2 En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ et en intégrant sur t, montrer que

$$\dot{\theta}^2(t) = \frac{2g}{R}(1 - \cos(\theta(t)))$$

Réponse

En prenant (M3.2)$\times\dot\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\ddot\theta(t)\dot\theta(t) &= \frac{g}{R}\dot\theta(t)\sin(\theta(t)) \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot\theta^2(t)\right) &= \frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\cos(\theta(t))) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}\dot\theta^2}{\cancel{\mathrm{d}t}}\cancel{\mathrm{d}t} &= \frac{g}{R}\int_{t=0}^{t}\frac{(-\cos(\theta(t)))}{\cancel{\mathrm{d}t}}\cancel{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\dot\theta^2\right]_{t=0}^{t} &= \frac{g}{R}\left[-\cos(\theta(t))\right]_{t=0}^{t} \\
\Leftrightarrow \boxed{\dot\theta^2(t) = \frac{2g}{R}(1-\cos(\theta(t)))}
\end{aligned}$$

$f\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}f^2\right)$
$\frac{\mathrm{d}\cos(\theta(t))}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta(t)\sin(\theta(t))$

$\int_0^t(\cdot)\mathrm{d}t$

On intègre

On isole

■

3 En déduire la norme de la force de réaction de l'igloo, ainsi que la vitesse du pinguouin en fonction de l'angle θ.

Réponse

On remplace $\dot\theta^2$ dans (M3.1) :

$$\begin{aligned}
R_N &= mg\cos(\theta(t)) - m\cancel{R}\frac{2g}{\cancel{R}}(1-\cos(\theta(t))) \\
\Leftrightarrow &\boxed{R_N = mg(3\cos(\theta(t))-2)}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
v(t) &= \left|R\dot\theta(t)\right| = \sqrt{R^2\dot\theta^2(t)} \\
\Leftrightarrow &\boxed{v(t) = \sqrt{2gR(1-\cos(\theta(t)))}}
\end{aligned}$$

4 Le pingouin décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle, et à quelle vitesse ?

Réponse

La condition de support d'un solide est $R_N > 0$: le pingouin décolle du support si la force de réaction est nulle, soit pour θ_d tel que $R_N = 0$. Or,

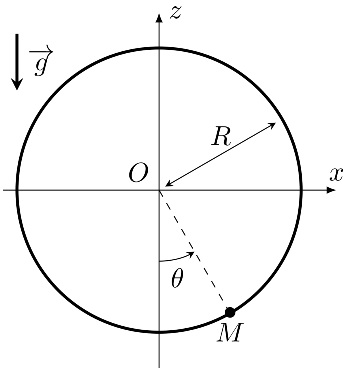
$$R_N = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3\cos(\theta_d)-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\theta_d = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \text{A.N. : } \underline{\theta = 48{,}2°}$$

De même,

$$v(t_f) = \sqrt{2gR(1-\cos(\theta_d))} \Leftrightarrow \boxed{v(t_f) = \sqrt{2gR\left(1-\frac{2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2gR}{3}}}$$

II Oscillations d'un anneau sur un cerceau

Un cerceau de centre O et de rayon R est maintenu dans un plan vertical, et un anneau de masse m assimilé à un point matériel M peut glisser sans frottements le long de ce cerceau.



1 Qu'est-ce que l'hypothèse « sans frottements » implique pour la réaction du cerceau sur l'anneau ?

Réponse

L'hypothèse « sans frottements » signifie que la réaction du cerceau est uniquement normale : il n'y a pas de composante tangentielle.

2 Écrire le PFD appliqué à l'anneau et le projeter dans une base adaptée.

Réponse

- **Système** : {anneau}
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
- **Repère** : $(\mathrm{O},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ dans le sens de θ
- **Repérage** :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = R\overrightarrow{u_r} \quad;\quad \vec{v}(t) = R\dot\theta(t)\,\overrightarrow{u_\theta} \quad;\quad \vec{a}(t) = R\ddot\theta(t)\,\overrightarrow{u_\theta} - R\dot\theta^2(t)\,\overrightarrow{u_r}$$

◇ **BDF** :

Poids $\vec{P} = mg(\cos(\theta(t))\,\vec{u_r} - \sin(\theta(t))\,\vec{u_\theta})$

Réaction $\vec{R} = -R_N\,\vec{u_r}$

◇ **PFD** :

$$m\vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mR\dot{\theta}^2(t) \\ mR\ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\cos(\theta(t)) - R_N \\ -mg\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} mg\cos(\theta(t)) + mR\dot{\theta}^2 = R_N \\ mR\ddot{\theta} + mg\sin(\theta(t)) = 0 \end{cases}} \tag{M3.3}$$

◇

3 En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement.

Réponse

Avec (M3.3), en la mettant sous forme canonique :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{R}\sin(\theta(t)) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\sin(\theta(t)) = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}} \tag{M3.4}$$

◇

On se place dans l'approximation des petits angles ($|\theta| < \theta_0 = 20°$). Initialement, l'anneau est situé à la verticale en-dessous de O et il est lancé vers la droite, avec une vitesse initiale de norme v_0.

4 En déduire l'équation horaire du mouvement.

Réponse

On a donc $\boxed{\theta(0) = 0}$ et $\vec{v}(0) = v_0\vec{u_\theta} = R\dot{\theta}(0)\vec{u_\theta} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R}}$

(M3.4) petits angles : $\boxed{\ddot{\theta}(t) + {\omega_0}^2\theta(t) = 0}$ soit $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Avec les CI : $\theta(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = 0}$ et $\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R} \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{R\omega_0}}$ soit $\boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{R\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

◇

5 À quelle condition sur v_0 l'approximation des petits angles est-elle vérifiée ?

Réponse

La valeur maximale de $|\theta(t)|$ est $\frac{v_0}{R\omega_0}$, quand le sinus vaut ± 1. Pour avoir des petits angles, il faut que l'angle maximal ne dépasse pas θ_0, soit

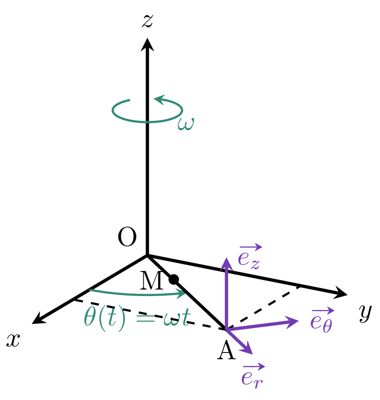
$$\frac{v_0}{R\omega_0} < \theta_0 \Leftrightarrow v_0 < \theta_0 R\sqrt{\frac{g}{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v_0 < \theta_0\sqrt{Rg}}$$

◇

★★★ III Anneau sur une tige en rotation

On considère un petit anneau M de masse m considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottement le long d'une tige OA horizontale dans le plan (xOy), de longueur ℓ, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical Δ passant par son extrémité O. Le référentiel lié au laboratoire est considéré comme galiléen. On considère la base cylindrique locale $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$ associée au point M.

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige, à une distance r_0 du point O (avec $r_0 < \ell$). On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance $r(t) = \mathrm{OM}(t)$ entre le point O et l'anneau M.



1 Faire un bilan des forces agissant sur l'anneau en les projetant dans la base $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

Réponse

◇ **Système** : {anneau} point matériel M de masse m

◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

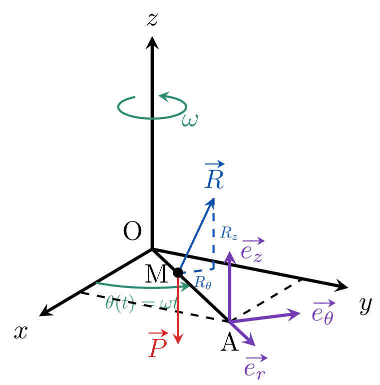
◇ **Repère** : cylindrique $(\mathrm{O},\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$

◇ **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = r(t)\vec{e_r}$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{e_r} + r(t)\dot{\theta}\vec{e_\theta} = \dot{r}(t)\vec{e_r} + r(t)\omega\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}(t)\vec{e_r} + \dot{r}(t)\omega\vec{e_\theta} + \dot{r}(t)\omega\vec{e_\theta} - r(t)\omega^2\vec{e_r} + \underbrace{\vec{0}}_{\dot{\omega}=0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}(t) = (\ddot{r}(t) - r(t)\omega^2)\vec{e_r} + 2r(t)\omega\vec{e_\theta}$$



◇ **Conditions initiales** : $r(0) = r_0$ et $\vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{r}(0) = 0$

◇ **BDF** : pas de frottements donc pas de composante sur $\vec{e_r}$:

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$

Réaction support $\vec{R} = R_\theta\vec{e_\theta} + R_z\vec{e_z}$

◇ **PFD** :

$$m\vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r}(t) - r\omega^2) = 0 \\ 2m\dot{r}(t)\omega = R_\theta \\ 0 = -mg + R_z \end{cases}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\ddot{r}(t) - \omega r(t) = 0} & \text{(M3.5)} \\ R_\theta = 2m\dot{r}(t)\omega & \text{(M3.6)} \\ R_z = mg & \text{(M3.7)} \end{cases}}$$

◇

2 Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment, et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, ω et t.

Réponse

On résout (M3.5) en injectant $r(t) = \mathrm{e}^{st}$:

$$\ddot{r}(t) - \omega^2 r(t) = 0$$
$$\Rightarrow s^2 - \omega^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow s^2 = \omega^2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{s = \pm\omega}$$

Donc $\boxed{r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}}$

Or : $r(0) = r_0 \Leftrightarrow \boxed{r_0 = A + B}$

et
$$\dot{r}(0) = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 = A\omega - B\omega$$
$$\Leftrightarrow \boxed{A = B}$$

Soit $\boxed{A = B = \frac{r_0}{2}}$

Donc $\boxed{r(t) = \frac{r_0}{2}(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}) = r_0\,\mathrm{ch}(\omega t)}$

◇

3 Exprimer les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur M dans la base $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$ en fonction de m, g, $\dot{r}$ et ω.

Réponse

On reprend (M3.6) et (M3.7) : $\dot{r}(t) = \omega r_0\,\mathrm{sh}(\omega t) \Rightarrow \boxed{\vec{R} = 2mr_0\omega^2\,\mathrm{sh}(\omega t)\,\vec{e_\theta} + mg\,\vec{e_z}}$

◇

4 Déduire de la question 2 le temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0, ℓ et ω.

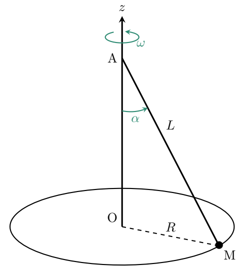
Réponse

Il quitte la tige pour $r(\tau) = \ell$, soit $r_0\,\mathrm{ch}(\omega\tau) = \ell \Leftrightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{argch}\left(\frac{\ell}{r_0}\right)}$

◇

IV Pendule conique

Dans un champ uniforme de pesanteur $\vec{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) dirigé vers le haut en décrivant un cercle de centre O et de rayon R. M est suspendu à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, fixé en un point A de (Oz). L'angle α de (Oz) avec AM est constant.



1 Quel système de coordonnées utiliser ?

Réponse

Pour une vitesse angulaire donnée, le mouvement est circulaire donc les coordonnées polaires semblent suffire, mais le poids s'applique verticalement et la hauteur du mobile va changer avec la vitesse angulaire. On utilisera donc un repère **cylindrique** pour étudier la rotation.

2 Effectuer un bilan des forces s'appliquant à la masse et les écrire dans la base choisie, en fonction de L, ω et α.

Réponse

- **Système** : {M} masse m
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen
- **Repère** : $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ (voir schéma)
- **Repérage** :

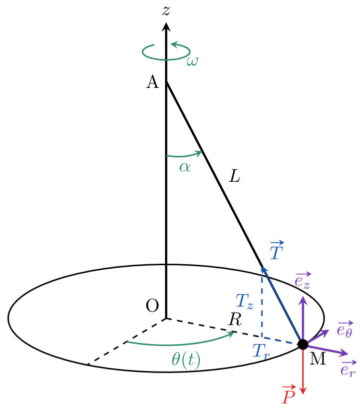
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = R\vec{e_r} = L\sin(\alpha)\vec{e_r} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = \text{cte} \Rightarrow \dot{R} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega = \text{cte} \Leftrightarrow \dot{\omega} = 0 \end{cases}$$

D'où $\quad \vec{v}_{\mathrm{M}}(t) = L\omega\sin(\alpha)\vec{e_\theta} \quad$ et $\quad \vec{a}_{\mathrm{M}}(t) = -L\omega^2\sin(\alpha)\vec{e_r}$

- **BDF** :

Poids $\quad \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$

Tension $\quad \vec{T} = T(-\sin(\alpha)\vec{e_r} + \cos(\alpha)\vec{e_z})$



3 Appliquer le PFD puis exprimer $\cos(\alpha)$ en fonction de g, L et ω. En déduire que la vitesse angulaire doit forcément être supérieure à une vitesse angulaire limite ω_{lim} pour qu'un tel mouvement puisse être possible.

Réponse

PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2\cancel{\sin(\alpha)} = -T\cancel{\sin(\alpha)} \\ 0 = T\cos(\alpha) - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = mL\omega^2 \\ T = \dfrac{mg}{\cos(\alpha)} \end{cases}$$

Soit

$$mL\omega^2 = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \Leftrightarrow \boxed{\cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2}}$$

Pour que ce mouvement soit possible, il faut que $\cos(\alpha) < 1$, soit

$$\frac{g}{L\omega^2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega_{\text{lim}}}$$

4 Que dire du cas où ω devient très grande ? Application numérique : calculer α pour $L = 20\,\text{cm}$ et $\omega = 3\,\text{tours}\cdot\text{s}^{-1}$.

Réponse

Si $\omega \gg \omega_{\text{lim}}$, alors $\cos(\alpha) \xrightarrow[\omega \gg \omega_{\text{lim}}]{} 0$ donc $\boxed{\alpha \xrightarrow[\omega \gg \omega_{\text{lim}}]{} \pi/2}$: le mouvement devient simplement circulaire, et se fait dans le plan horizontal contenant A.

On trouve

$$\underline{\cos(\alpha) = 0{,}138} \Leftrightarrow \underline{\alpha = 82°}$$